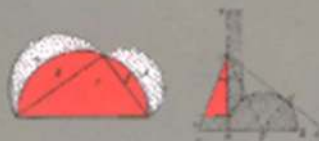


BỘ SÁCH BỔ TRỢ KIẾN THỨC



# Toán học

Biên dịch: Từ Văn Mạc, Trần Thị Ái

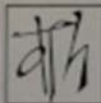


Được sưu tầm, biên soạn bởi những tác giả có uy tín trong lĩnh vực chăm sóc, phát triển toàn diện cho con người, bộ sách **Chìa khóa vàng** ra đời như một cẩm nang bổ ích dành cho các bậc phụ huynh cũng như tài liệu quý báu cho

các em học sinh để tự tin bước vào đời và làm chủ được tương lai của mình.

Bộ sách có nhiều lĩnh vực, phong phú và đầy đủ với cách viết ngắn gọn, rõ ràng, dễ tiếp nhận cũng như dễ thực hiện như ở lĩnh vực hóa học, toán học, vật lý, tâm lý, bộ óc vĩ đại trong khoa học, công nghệ sinh học, động vật, từ điển học sinh thanh lịch... Các kiến thức mang tính cơ bản, được minh họa bằng hình ảnh, qua đó chúng ta có thể hình dung một cách chân thực, nắm rõ và nắm chắc điều kiện cần khi bắt đầu ngồi trên ghế nhà trường. Các bậc phụ huynh từ đó có thể hướng cho các em khám phá khả năng của bản thân để phát huy tốt nhất, lựa chọn đúng đường đi theo sở thích và năng lực của cá nhân.

ISBN: 978-604-59-3579-8



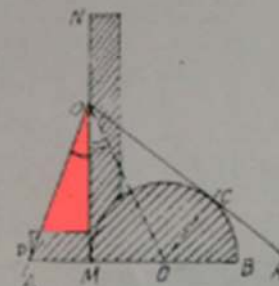
8 936065 581630

BỘ SÁCH BỔ TRỢ KIẾN THỨC



# Toán học

Biên dịch: Từ Văn Mạc, Trần Thị Ái



# **BỘ SÁCH BỔ TRỢ KIẾN THỨC**

**Chìa khoá vàng**

## **TOÁN HỌC**

Biên dịch: Từ Văn Mạc - Trần Thị Ái

Biên mục trên xuất bản phẩm của Thư viện Quốc gia Việt Nam

Toán học / Biên dịch: Từ Văn Mạc, Trần Thị Ái. - Tái bản. - H.: Lao động,  
2015.- 188tr. ; 23cm. - (Bộ sách Bổ trợ kiến thức. Chìa khoá vàng)

1. Toán 2. Sách thường thức 510-dc23

LDH0063p-CIP

**NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG**

**HÀ NỘI - 2015**

## Lời nói đầu

Trái đất đã tồn tại hàng mấy nghìn triệu năm, loài người thì chỉ mới xuất hiện mấy chục vạn năm.

Giả sử dùng một ngày đêm (24 giờ) làm hình tượng để so sánh toàn bộ lịch sử phát triển của Trái đất thì chúng ta sẽ thấy một bức tranh rất thú vị:

00 giờ 00: Giây phút đầu tiên của một ngày-đêm là thời điểm Trái đất hình thành.

12 giờ 00: Đúng giữa trưa, dưới đáy đại dương cổ đại có những đám tế bào nguyên thủy bắt đầu cử động.

16 giờ 48: Các tế bào nguyên thủy nói trên phát triển thành các loại giun, nhuyễn thể, hải miên, rong tảo và tiếp đó là các loài cá.

21 giờ 36: Đại Cổ sinh kết thúc, tiếp đến là thời kỳ khủng long làm chủ.

23 giờ 20: Các loài động vật có vú chiếm ưu thế trên toàn Trái đất.

23 giờ 59 phút 56 giây: Loài người bắt đầu xuất hiện.

Suốt quá trình lịch sử phát triển của loài người từ hoang dã đến văn minh hiện đại chỉ chiếm một thời gian vô cùng ngắn ngủi (4 giây) so với toàn bộ lịch sử phát triển của tự nhiên. Nhưng với đôi tay khéo léo và bộ óc thông minh, loài người đã thúc đẩy xã hội tiến triển rất nhanh với tốc độ ngày càng chóng mặt.

Làn sóng phát triển mạnh mẽ và nhanh chóng như vậy của khoa học kỹ thuật thu hút mối quan tâm mãnh liệt của mọi lớp người, đặc biệt là lớp thiếu niên nhi đồng, tạo niềm say mê hứng thú học tập, tìm tòi và khám phá.

Để góp phần nhỏ bé vào kho tàng trí tuệ của các bạn, chúng tôi tổ chức biên soạn Bộ sách bổ trợ kiến thức *Chìa khoá vàng* qua đó cung cấp một số tri thức phổ thông bổ trợ thêm vào lượng kiến thức mà các bạn đang được nhà trường truyền thụ.

Bộ sách ra thành nhiều tập, đề cập tới các môn khoa học tự nhiên cơ bản, các lĩnh vực khoa học kỹ thuật... Đồng thời trình bày những tri thức về khoa học xã hội, đề cập tới các vấn đề gắn gũi với đời sống hằng ngày của mỗi chúng ta.

Để có được các bản thảo đạt yêu cầu, với sự cộng tác của một số nhà khoa học ở các ngành, chúng tôi tổ chức biên khảo dựa trên cơ sở tập hợp các tư liệu nước ngoài, có chỉnh lý và bổ sung thêm những thành tựu mới nhất để giới thiệu bộ sách này.

Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của tất cả bạn đọc.

**Xin trân trọng cảm ơn  
NHÓM BIÊN SOẠN**

## **Người nguyên thủy ghi các con số như thế nào?**

Ban đầu người nguyên thủy chưa biết đếm số 1,2,3,4... là gì. Lúc bấy giờ họ chỉ mới biết chế tạo búa đá, đi săn mà chưa có khái niệm về số.

Về sau người ta mới biết việc: "hôm nay có thức ăn" hay "hôm nay không có thức ăn", bấy giờ mới sinh ra khái niệm "có" và "không". Đó là khái niệm cổ sơ nhất về "số".

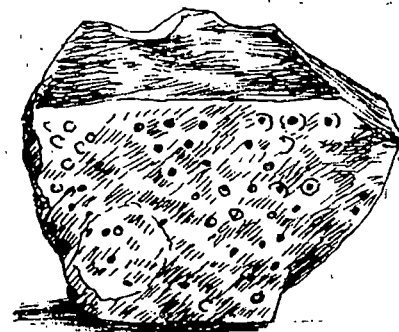
Không biết bao nhiêu năm sau đó mới bắt đầu có khái niệm số. Ban đầu người ta chỉ biết có hai số 1 và 2 và còn chưa biết đến số 3. Trong đầu họ chỉ có các số là 1 và 2 và được xem là ít còn từ 3 hoặc từ 3 trở lên được xem là nhiều, còn nhiều hơn bao nhiêu họ không thể nói rõ được. Bấy giờ khái niệm số chỉ mới đến số "ít" và "nhiều".

Do sản xuất phát triển, người ta có nhu cầu trao đổi, họ đem dê để đổi lấy ngũ cốc, bấy giờ mới đòi hỏi đến số. Dùng một ngón tay để biểu thị một con dê, hoặc dùng 5 hòn cuội để biểu thị 5 con dê, từ đó người ta mới biết đến số.

Thế loài người đã ghi lại con số như thế nào?

Người ta đã dùng cách "khắc gỗ". Khi trăng tròn thì người ta dùng dao khắc lên gỗ một nhát, sau đó qua mỗi ngày lại khắc một nhát, nhát dao này sau nhát dao khác, đến ngày trăng tròn của tháng sau, đếm số theo nhát dao, nhờ vậy người ta biết sau hai lần trăng tròn có bao nhiêu ngày mà biết được một tháng có bấy nhiêu ngày.

Một phương pháp ghi số khác là "kết nút" trên dây. Qua số nút kết trên dây, người ta biết được nhiều ít. Với các nút kết ta có thể phân biệt nút lớn, nút





nhỏ. Nhờ vậy qua việc kết nút có thể phân biệt số lớn số nhỏ. Sự việc này được ghi lại trong thiên “Hệ từ, Kinh Dịch” như sau: “Người xưa giải quyết bằng kết nút”. Đến cuối thời kỳ công xã nguyên thủy, người ta mới biết dùng văn tự để thay phương pháp kết nút.

Theo truyền thuyết, có tù trưởng cổ người Ba Tư chuẩn bị ra trận, ra lệnh cho các tướng sĩ giữ thành, cần phải bảo vệ thành trong vòng 60 ngày. Ông ta lấy một sợi dây dài kết 60 nút, bảo các tướng cứ mỗi ngày qua đi thì tháo đi một nút. Khi các nút được tháo hết là đã qua 60 ngày. Người Ảng - Ka cổ đại khi thu hoạch mùa màng họ cũng dùng cách kết nút để biết đã thu nhập được nhiều ít.

Ghi số là buổi đầu manh nha của số học, cùng với việc ghi số, người cổ đại cũng đã nhận biết được hình.

Sự phát triển của con số và hình, chính là cơ sở để số học phát triển.

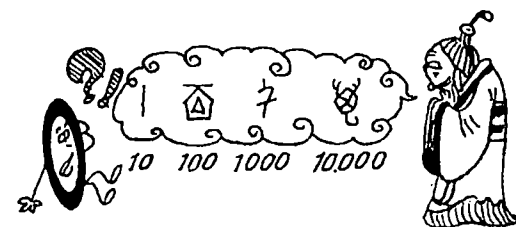
## Có phải chữ số “0” được tìm ra muộn nhất không?

Ngày nay chúng ta sử dụng mười chữ số là: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, chỉ với mười chữ số này ta có thể biểu diễn được vô số các con số, dùng để sử dụng cho mọi trường hợp.

Trong số mười chữ số thì số “0” được tìm ra muộn nhất, so với các con số khác thì số 0 xuất hiện muộn hơn có đến hơn 5000 năm. Thế mới biết số “0” là con số khó nhận được đến đâu. Bạn xem 1 con dê, 3 con dao đều là các vật thực tồn tại nhìn thấy được, sờ mó được, nên cần phải ghi lại bằng chữ số, do vậy các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... đã có chỗ dùng nên phải có số biểu diễn. Chỉ có số 0 là con số đặc biệt đại biểu cho chữ “không có”, mà đã là “không có” thì không hình không ảnh, nên không cần phải biểu diễn thành chữ số.

Cách ghi con số lâu đời nhất là theo hệ thập phân, khi gặp các con số 10, 100, 1000... vì không có chữ số “0” nên lúc đó không thể dùng cách ghi con số như chúng ta dùng ngày nay.

Ngoài các chữ số từ 1 đến 9 họ phải dùng một số ký hiệu khác để biểu diễn. Ví dụ trong các văn tự giáp cốt ở Trung Quốc có các ký hiệu biểu diễn như hình vẽ dưới đây:



Còn ở Ai Cập thì các con số biểu diễn là:



Như vậy ở Trung Quốc, thời cổ đại vừa dùng hệ đếm thập phân vừa dùng cách biểu diễn theo vị trí, nên dễ dàng nhận thấy: nếu không có chữ số “0” quả là rất phiền phức. Do vậy người ta đã sử dụng chỗ bỏ trống để biểu diễn số “0”. Ví dụ khi dùng que tính để biểu diễn con số 203 thì giữa chữ số 2 và 3 người ta chừa một khoảng trống, khoảng trống đóng vai trò số “0”, số 203 được biểu diễn = 2 0 3. Ví dụ “0” là chỗ trống, là vô hình, khó nhận thấy ngay nên dễ bị bỏ sót. Dần dần, người ta dùng hình vuông để thay thế chỗ trống và con số 203 được biểu diễn là 2o3. Đến khi có văn tự, để tiện lợi người ta vẽ hình tròn thay cho hình vuông và 203 được biểu diễn là 2O3, đến đây thì đã gần giống với chữ số 0 mà ngày nay chúng ta đang dùng.

Chữ số Ảrập được phổ biến trên thế giới ngày nay là do người Ấn Độ phát minh, vào buổi đầu chữ số Ấn Độ cũng không có số “0”. Khi cần đến số 0 họ dùng dấu “ā” để thay thế và số 203 được biểu diễn 2ā3, mãi sau này mới dùng chữ số 0 thay thế cho dấu “ā”.

Sự xuất hiện số 0 là một tiến bộ trong cách ghi số, đẩy mạnh sự tiến bộ văn hoá. Vào năm 876, người ta phát hiện một tấm bia kỷ niệm cổ có ghi số 270, đó là con số 0 đã được ghi lại sớm nhất nói lên sự tiên tiến của văn hoá phương Đông vào thời đó.

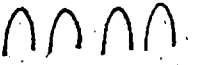
Bấy giờ châu Âu vẫn còn đương ở trong thời kỳ đen tối, chữ số được dùng là chữ số La Mã, số mười được biểu diễn là X, 100 là C, 1.000 là D, 10.000 là M. Vào thời đó khi chữ số "0" được truyền đến châu Âu, lập tức vị giáo hoàng ở La Mã cấm dùng, thậm chí xử tội nặng các học giả dám dùng số 0.

Ngày nay nhận thức của loài người về số 0 đã rất rộng rãi. Số 0 không chỉ là biểu hiện "không có". Khi nhiệt độ không khí hôm nay xuống đến  $0^{\circ}$  thì không có nghĩa là hôm nay không có nhiệt độ. Số 0 trên trục số là một điểm tồn tại hiển nhiên là một điểm thực. Tóm lại 0 cũng là một chữ số.

Trong phép đếm hệ nhị phân chỉ có hai chữ số 1 và 0, tính chất trọng yếu của số 0 có điều khá đặc biệt. Trong quá trình thiết kế máy tính điện tử, biên soạn phần mềm, thiết kế mạch logic không thể tách rời khỏi số 0. Hiểu biết của con người về số 0 ngày càng rộng rãi và sâu xa.

## Có phải viết con số theo vị trí cũng là một phát minh?

Ngày nay khi cho bạn hai chữ số 1 và 8 bạn dễ dàng tạo thành hai con số mới: 18 và 81. Thế nhưng với người Babilon, người Ai Cập, người Maia cổ đại họ đã sáng tạo chữ số của mình, nhưng để ghi con số 81 họ phải dùng đến quy tắc phép tính cộng.

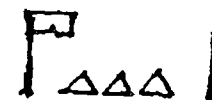
Ví dụ: - với người Ai Cập, con số "81" được viết  ký hiệu (kí hiệu toán học chữ U ngược) của người Ai Cập cổ đại là con số 10 còn I là 1.

Cách viết trên có nghĩa là:  $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 = 81$ .

Còn với chữ số hình nêm của người Babilon cổ được viết là (hình trái). Đó là do người Babilon đã dùng phép đếm hệ 60. Các ký hiệu ở hình bên cạnh có nghĩa là  $60 + 20 + 1 = 81$ .

Còn với người Maia thì con số 81 được viết là •••••, bạn cũng có thể tìm thấy ký hiệu đó có nghĩa là  $20 + 20 + 20 + 1$ , vì người Maia dùng hệ đếm 20.

Người cổ Hy Lạp dùng chữ số La Mã biểu diễn như sau: LXXXI. Với cả hai chữ số này số 81 đều là:  $50 + 10 + 10 + 10 + 1 = 81$  (hình phải).

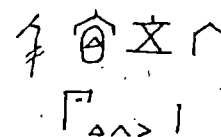


Kiểu ghi số này còn mang dấu vết của cách ghi số kết nút, một sợi dây dài có nhiều nút, nút lớn là số 10, nút nhỏ là số 1, tổng số có bao nhiêu nút, bạn tính ra sẽ thấy! Nếu cần ghi các con số lớn, ví dụ như cần ghi số 88888 thì rõ ràng việc ghi số theo quy tắc phép tính cộng thì quá khó để thực hiện.

Cách ghi số lạc hậu, thì làm các phép tính nhân chia các số lớn đều khó, còn phép khai phương về cơ bản là không thể thực hiện được.

Ở Trung Quốc thời cổ đại người ta dùng một cách ghi số theo hệ đặc biệt. Vào khoảng năm 1600 đến 1100 trước công nguyên đã hình thành 13 chữ số như (hình trái).

Khi gặp các số lớn người ta đã kết hợp với phép tính nhân để biểu diễn. Ví dụ với số 2656 sẽ được ghi như trong hình. Trong đó số đầu tiên là 𠄎 là  $2 \times 1000$ , vị trí thứ hai là 𠄎 6  $\times 100$ , còn ở vị trí thứ ba là 5  $\times 10$ , (hình phải) v.v...



Vào khoảng 500 năm trước công nguyên, ở Trung Quốc đã dùng cách ghi số bằng que đếm, việc ghi số đã dựa vào phép đếm theo hệ thập phân. Trong sách Mặc Kinh vào thế kỷ thứ tư trước công nguyên đã có ghi số: "số 1 khi thì nhỏ hơn 2 khi thì lớn hơn 5". Điều đó có nghĩa khi số 1 ở vị trí hàng đơn vị thì nhỏ hơn số 2, nhưng ở vị trí hàng chục thì lại lớn hơn 5. Với mỗi một chữ số, thì sự nhỏ của nó, ngoài bản thân trị số nó còn được xác định ở vị trí của nó.

Cách ghi số này quả là một phát minh lớn, với thế giới, số học có ý nghĩa thời đại. Trước hết là ở chỗ muốn ghi số chỉ cần 10 chữ số là đủ. Ban đầu dùng chín chữ số từ 1 đến 9 còn số 0 được biểu diễn bằng chỗ trống. Phép ghi số đã thoát khỏi cách dùng quy tắc của phép cộng và phép nhân, nhờ vậy với bất kỳ số nào dù lớn đến đâu cũng có thể ghi được dễ dàng.

Thứ nữa là cách ghi số này đã đem lại thuận tiện cho việc thực hiện các phép tính, mở ra một thế giới mới trong tính toán. Khi dùng quy tắc vị trí là có thể khai căn bậc hai, bậc ba. Nếu không có quy tắc vị trí thì Tổ Xung Chi đã không thể tính được số  $\pi$  có đến 7 số lẻ.

## Người cổ đại biểu diễn phân số như thế nào?

Ngày nay chúng ta khó có thể biết chính xác được là phân số đã xuất hiện từ thời đại nào? Chỉ biết là cách đây rất lâu, ở Trung Quốc đã xuất hiện một bộ sách số học *Chu bì toán kinh* (bài toán đo bóng) trong đó có trình bày các phép toán phân số phức tạp. Điều đó nói lên rằng phân số đã xuất hiện vào thời xa xưa, chỉ ít cũng đến hơn 2000 năm lịch sử.

Trước khi xuất hiện phân số, khi thực hiện phép toán, người cổ đại đã dùng một biện pháp xử lý đơn giản là giữ phần chẵn và bỏ qua phần lẻ. Làm như vậy rõ là có gây nhiều thiếu sót, ví dụ người xưa đã sớm biết là mỗi năm có  $365\frac{1}{4}$  ngày, nếu chỉ giữ lấy phần chẵn 365 ngày mà bỏ qua  $\frac{1}{4}$  ngày thì khi làm lịch có thể gây sai lệch đến hàng tháng.

Sự phát triển của các phép toán đòi hỏi mở rộng từ số nguyên đến phân số và số lẻ. Có thể là hai ba ngàn năm trước, người xưa còn chưa biết chữ số Ả-rập, cũng không biết đến dấu phẩy số lẻ, việc ghi các số lẻ rõ là một điều rất khó. Đầu tiên họ cho mỗi số lẻ một tên gọi, ví dụ với đơn vị gọi là trượng; 0,1 gọi là thước; 0,0001 gọi là một ly; 0,00001 gọi là lai, sau khi đã đặt tên người ta mới ghi số. Ví dụ với số  $\pi = 3,1415927$  được ghi là 3 trượng, 1 thước, 4 tắc, 1 phân, 5 ly, 9 lai, 2 hột...

Nếu dùng chữ để biểu diễn phân số, quá trình đó có thể từ đơn giản đến phức tạp. Phân số mà người xưa biết sớm nhất là  $\frac{1}{2}$ , nếu mô tả bằng lời là một nửa. Sau đó với các phân số có mẫu số là 3, ví dụ  $\frac{1}{3}$  được gọi là “nhỏ hơn một nửa”,  $\frac{2}{4}$  được ghi là “mạnh hơn một nửa”.

Sau cùng với các phân số có mẫu số là 12, phương pháp biểu diễn 12 phân số này như sau:

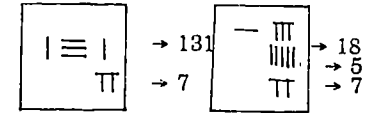
$\frac{1}{12}$  là mạnh;  $\frac{2}{12}$  là hơi yếu;  $\frac{3}{12}$  là thiếu;  $\frac{4}{12}$  là quá thiếu;  $\frac{5}{12}$  là một nửa

non;  $\frac{6}{12}$  là một nửa;  $\frac{7}{12}$  là già nửa;  $\frac{8}{12}$  là quá yếu;  $\frac{9}{12}$  là quá;  $\frac{10}{12}$  là quá mạnh;  $\frac{11}{12}$  là thực yếu;  $\frac{12}{12}$  là đầy đủ.

Rõ ràng là việc dùng chữ để ghi phân số là khá khó, nhưng còn may là dùng que tính để biểu diễn phân số và tính toán tương đối dễ dàng.

Hình phía bên phải biểu diễn các phân

số. Hai phân số là  $\frac{131}{7} = 18\frac{5}{7}$ .



Trong một quyển sách cổ của Trung Quốc được ghi nhận là vào 1500 năm trước,

Tổ Xung Chi đã tính được số  $\pi$  mà trên đây chúng ta đã ghi lại bằng số lẻ thập phân. Nếu mô tả  $\pi$  bằng lời ta phải dùng đến mấy chục từ, còn nếu biểu diễn bằng phân số thì còn có gọn gàng hơn nhiều.

Số  $\pi$  là tỉ số giữa chu vi là ba trăm năm mươi lăm chia cho đường kính là một trăm-mười ba, ước lượng là chu vi 22 chia cho đường kính là 7. Nếu biểu diễn lời mô tả này bằng phân số thì sẽ là  $\frac{355}{113} > \pi > \frac{22}{7}$

## Có phải phân số Ai Cập là phân số đơn giản nhất?

Các phân số  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{13}$ ,  $\frac{1}{105}$ , tử số đều là 1.

Các phân số có tử số bằng 1 trong toán học được gọi là các phân số đơn vị. Trong lịch sử số học người ta thường gọi các phân số này là “phân số Ai Cập”. Vào ba bốn ngàn năm trước, người Ai Cập đã hiểu được phân số và biết các phép tính với phân số.

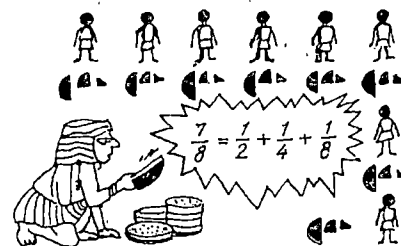
Trong các thành tựu toán học cổ Ai Cập, phép tính phân số là nội dung hết sức trọng yếu. Thế nhưng trong cách tính phân số của người cổ Ai Cập thì các phân số đều được phân tích thành các phân số đơn vị. Ví dụ như với phân số  $\frac{7}{8}$  người ta phân tích thành  $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Nhưng vì sao lại phải phân tích như vậy? Ngày nay điều đó vẫn còn chưa giải thích được và là một “câu đố”. Vì việc phân tích như vậy trên thực tế đã cản trở sự phát triển của các phép toán và không hề có một điểm mạnh nào.

Ví dụ như có 7 cái bánh đem chia cho 8 người mỗi người sẽ được  $\frac{7}{8}$  cái bánh. Thế nhưng lại phân tích  $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ .

Điều đó có nghĩa là để chia đều 7 cái bánh cho 8 người mỗi người sẽ được 3 phần bánh, một phần là  $\frac{1}{2}$  cái bánh, một phần là  $\frac{1}{4}$  cái bánh và một phần là  $\frac{1}{8}$  cái bánh.

Thế làm thế nào mỗi người nhận được bánh của mình? Lấy 4 cái bánh chia đôi được 8 phần, mỗi phần  $\frac{1}{2}$  cái bánh, xong lại lấy hai cái bánh chia mỗi cái thành 4 phần sẽ được mỗi phần là  $\frac{1}{4}$  cái bánh; còn một cái bánh chia 8 phần, mỗi người sẽ được  $\frac{1}{8}$  cái bánh (hình phải). Cách phân chia như vậy chẳng phải rất rõ ràng và rất đều sao?



Thế nhưng người Ai Cập đã phân tích các phân số thành các phân số Ai Cập như thế nào. Trong các sách cổ không hề ghi lại, và người đời sau cũng không rõ, đó lại là một câu đố. Vào năm 1202 tại Pisa thuộc Italia một người có biệt hiệu là Fibonax đã xuất bản một quyển sách là Bản tính có nêu:

Với bất kỳ một phân số nào người ta cũng có thể phân tích thành các phân số Ai Cập. Mãi đến năm 1880 kết luận này mới được một nhà số học Anh là Bilweisd chứng minh một cách chặt chẽ.

Chỉ cần chú ý một chút ta sẽ thấy rằng với bất kỳ một phân số  $\frac{a}{b}$  ( $a < b$ ) đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{a(x+1)-b}{x+1} \cdot \frac{1}{b} \quad (1)$$

Trong đó  $x$  là phần nguyên của phép chia  $\frac{b}{a}$  thường được ký hiệu là  $\left[ \frac{b}{a} \right]$

Nhờ (1) ta có thể biểu diễn phân số  $\frac{a}{b}$  thành phân số Ai Cập.

Ví dụ như: Khi biểu diễn phân số  $\frac{17}{18}$  thành phân số Ai Cập, thì  $x$  là phần nguyên của  $\frac{b}{a}$  sẽ là  $\frac{17}{18} = 1 \frac{1}{17}$ ,  $x$  phải là phần nguyên của  $\frac{17}{18}$  và  $x = 1$ .

Theo công thức (1) ta có:

$$\frac{17}{18} = \frac{1}{1+1} + \frac{(1+1)17-18}{(1+1)18} = \frac{1}{2} + \frac{4}{9}$$

Lại phân tích  $\frac{4}{9}$  thành phân số Ai Cập theo (1) ta lại có

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$\text{Vậy: } \frac{17}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

Nếu chú ý đến công thức sau đây:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)} \quad (2)$$

Bạn có thể thấy việc biểu diễn các phân số dưới dạng phân số Ai Cập không phải là duy nhất.

Trong những năm gần đây người ta hết sức chú ý nghiên cứu phân số Ai Cập. Ví dụ có người nhận thấy:

Với các phân số có mẫu số là lẻ, ta có thể biểu diễn phân số này thành các phân số Ai Cập có mẫu số là số lẻ.

Liệu có thể biểu diễn số 1 dưới dạng các phân số Ai Cập có mẫu số là số lẻ, và liệu nếu được thì có bao nhiêu số hạng?

Vào năm 1976 đã có người giải quyết được vấn đề này và chỉ ra rằng: Có thể biểu diễn số 1 dưới dạng các phân số Ai Cập có mẫu số là số lẻ và ít nhất phải là 9 số hạng là:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{231}$$

Trừ 6 số hạng đầu, 3 số hạng còn lại có thể có các mẫu số là: 21, 135, 10.395.

21, 165, 693.

21, 231, 315

33, 45, 385.

Nếu khai triển các số hạng có mẫu số lớn thành các số hạng có mẫu số nhỏ hơn ta sẽ có:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{77} + \frac{1}{105}$$

Vào năm 1969, một nhà số học khác là Playter trong quyển sách *Đạo chơi trong thế giới số học* đã viết:

Không thể biểu diễn phân số  $\frac{5}{121}$  thành các phân số với ít hơn 3 số hạng như:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{759} + \frac{1}{208725} \quad (1)$$

Vào năm 1983 ở Trung Quốc có Lưu Uyên Căn một sinh viên đại học tìm thấy:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{99} + \frac{1}{1089} \quad (2)$$

Vương Tiểu Minh ở nhà máy luyện thép Giang Tây tìm thấy:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363} \quad (3)$$

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{27} + \frac{1}{297} + \frac{1}{1089} \quad (4)$$

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{91} + \frac{1}{33033} \quad (5)$$

Chúng minh một cách chặt chẽ thì (3) ở vế trái và vế phải đều có các phân số có mẫu số là 121, điều đó không cho phép.

(trên thực tế thì chính  $\frac{4}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{363}$ ). Như vậy trong các phân số kể trên liệu có phải phân số có mẫu số là 1089 là mẫu số nhỏ nhất không? Cho đến nay điều này vẫn chưa được khẳng định.

## Loài Người đã sử dụng các hệ đếm nào?

Đa số các dân tộc trên thế giới dùng hệ đếm thập phân, tức là hệ đếm cứ gặp số 10 thì thêm một nấc nên còn gọi là hệ đếm thập tiến. Người cổ đại khi đếm đồ vật, khi tính số đều dùng 10 đầu ngón tay để đánh dấu. Mỗi người chỉ có 10 đầu ngón tay, theo đầu ngón tay người ta ghi dấu từ 1 đến 10. Khi hết 10 đầu ngón tay, thì ghi một dấu, rồi lại bắt đầu đếm và từ đó tự nhiên hoàn thành hệ đếm "gấp 10 tiến lên 1", tức hệ đếm thập phân.

Theo hệ đếm thập phân, con số đứng phía sau sẽ gấp 10 lần giá trị con số đứng trước. Ví dụ con số 265 có nghĩa là  $2 \times 100 + 6 \times 10 + 5$ .

Có thể là hệ đếm sớm nhất không phải là hệ đếm 10 mà là hệ đếm 60 của người Babilon. Với người Babilon cổ đại, con số 265, con số đứng đầu là 4 và con số cuối là 25 và sẽ là  $4 \times 60 + 25$ . Hệ đếm 60 có một ưu điểm là các số 60 có khá nhiều ước số như: 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15, 20, 30, nên khi làm phép tính chia ta sẽ thu được số chẵn. Đây là ưu điểm của hệ đếm 60 so với hệ đếm 10, vì số 10 chỉ có hai ước số là 2 và 5 nên khi thực hiện phép tính chia ta sẽ thu được nhiều số lẻ.

Chính vì lý do đó mà hệ đếm 60 đầy sức sống, cho đến ngày nay, khi ta dùng phép tính với các góc và thời gian người ta vẫn dùng hệ đếm 60.

Vào thời cổ đại cũng có các bộ tộc nguyên thủy dùng hệ đếm 5. Với các dân tộc này khi đếm số họ quen dùng một tay, đếm đi đếm lại cũng chỉ có 5 đầu ngón tay, vì vậy khi ghi số cũng theo cách "gấp 5 tiến lên 1 nấc".

Đương nhiên khi đếm số cũng có dân tộc huy động cả tay lẫn chân. Cả tay lẫn chân có 20 ngón nên đi đến chỗ "gấp 20 thì tiến lên một nấc". Người Maia từng sử dụng hệ đếm 20 (hình phải):



Người Maia dùng phép đếm nhị thập phân

Mọi người đều biết người Maia đã từng sử dụng hệ đếm 20 nên cho rằng vì nền văn hoá Maia bị mai một nên ngày nay không còn ai dùng hệ đếm 20. Sự thực không như vậy. Ở Đan Mạch ngày nay người ta vẫn còn dùng hệ đếm 20. Với họ số "60" chính là  $3 \times 20$ , số "80" là  $4 \times 20$ . Con số 90 được phát biểu là bốn lần 20 rưỡi là  $4 \times 20 + 10$ . Số "93" sẽ trở thành "thêm 3 vào bốn lần 20 rưỡi".

Có cách nói trước con số hàng đơn vị sau đó nói đến con số hàng chục. Như với số 46 người ta nói "6 và 40" trước đây rất phổ biến ở châu Âu. Ở nước Anh phải đến thế kỷ XVIII mới bãi bỏ, còn ở Na Uy thì mãi đến gần đây mới thôi sử dụng, riêng người Đức hiện vẫn đang còn sử dụng.

Ngoài phép đếm, trong đo lường người ta còn dùng nhiều hệ đếm khác nữa. Ví dụ ở Trung Quốc trước đây người ta dùng đơn vị đo lường là cân có 16 lạng, đó là hệ đếm 16, còn ở Anh một thước Anh có 12 tấc Anh. Các đơn vị đo lường Anh ngày nay vẫn còn nhiều nước sử dụng. Trong máy thu hình người ta dùng đơn vị "18 inso", "21 inso", đó là đơn vị đo Anh. Ta cần chú ý 18 inso không phải là 1 thước Anh và 8 tấc Anh mà là 1 thước Anh và 6 tấc Anh. Người Anh rất thích dùng hệ đếm 12, ví dụ người ta tính 12 cây bút chì thành một lô và gọi là "một tá" và gọi là tá bút chì, 24 cây bút lông thì gọi là 2 tá bút lông, 12 tá thì gọi là 1 rá. Tá và rá đều là hệ đếm 12.

Chúng ta lại quay về lý luận số học, tùy theo yêu cầu của thực tế người ta lại dùng các hệ đếm mới. Khi máy tính điện tử xuất hiện người ta lại dùng hệ đếm nhị phân, phép đếm nhị phân này cùng với phép đếm logic là cơ sở của máy tính. Kỹ thuật máy tính phát triển lại thúc đẩy hệ đếm cơ số 8 phát triển. Ngày nay người ta đã phát hiện việc nghiên cứu hệ đếm nhị phân. Sau khi xuất hiện hệ đếm cơ số 8 là thúc đẩy nảy sinh hệ đếm cơ số 16.

## Ai đã chứng minh định lý tam giác sớm nhất?

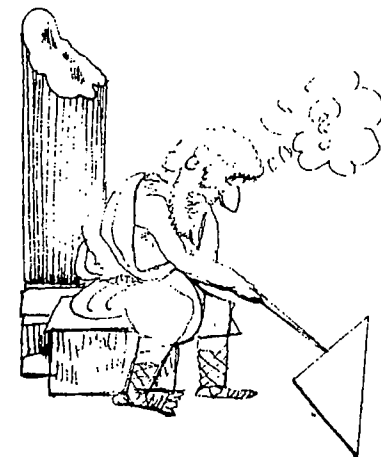
Trong một tam giác vuông, tổng bình phương của các cạnh góc vuông bằng bình phương đường huyền. Định lý này được gọi là định lý tam giác.

Nếu với 3 số tự nhiên mà tổng bình phương của 2 số bằng bình phương của số thứ 3, người ta nói 3 số tự nhiên này tuân theo định lý. Mọi người đều biết ba số 3, 4, 5 tuân theo định lý tam giác.

Theo các tư liệu lịch sử thì vào thế kỷ thứ VI trước Công nguyên, nhà số học Hy Lạp Pythagoras đã chứng minh định lý tam giác. Pythagoras được xem là lời đã chứng minh định lý này sớm nhất. Vì vậy ở nhiều nước, người ta gọi định lý tam giác là định lý Pythagoras và các số thoả mãn điều kiện lý Pythagoras là bộ các số Pythagoras. Theo truyền thuyết những người theo trường phái Pythagoras sau khi đã chứng minh được định lý đã vui mừng như phát điên, và đã giết 100 con bò để ăn mừng; vì vậy định lý này còn có tên là định lý "một trăm con bò". Thế nhưng học phái Pythagoras hết sức bí mật, họ không phổ biến cách chứng minh này ra bên ngoài. Chứng minh xưa nhất về định lý tam giác còn truyền lại đến ngày nay là từ quyển sách Cơ sở hình học. Cơ sở hình học là do nhà số học kiệt xuất cổ Hy Lạp Euclide viết vào thế kỷ thứ tư trước công nguyên, đó là quyển sách rất nổi tiếng còn truyền cho hậu thế. Có điều là có phải chứng minh này là tự Euclide đã sáng tác hay đã dẫn ra từ tác phẩm của các tác giả khác, hoặc là từ chính của Pythagoras. Điều đó cho đến nay vẫn chưa được rõ, tuy nhiên theo thói quen, người ta vẫn cho các chứng minh này là do Euclide đề ra.

Với các bộ số tam giác thì ba số 3 - 4 - 5 là bộ số có trị số bé nhất và người Ai Cập đã viết từ thời xa xưa vào khoảng thế kỷ 23 trước công nguyên. Ngoài ba số 3 - 4 - 5 vào khoảng thế kỷ thứ nhất trong một quyển sách cổ ở Trung Quốc, quyển sách Phép toán cửu chương, và nhà số học cổ Hy Lạp Diphon vào thế kỷ III trong quyển sách Phép làm toán đã đưa ra các bộ số 5 - 12 - 13; 7 - 24 - 25; 8 - 15 - 17; 20 - 21 - 29 là những bộ số tam giác, ngoài ra Diophan còn đưa ra công thức cho phép tính được các bộ số tam giác.

Xem xét kỹ các tư liệu, người ta cho rằng người Babilon cổ đại đã biết định lý tam giác sớm nhất. Vào thời đại Hanomurapi, người Babilon cổ đại, khi tính chiều dài đường chéo hình chữ nhật, họ đã biết sử dụng định lý tam giác, theo các tấm đất còn lưu giữ ở trường Đại học Columbia ở Mỹ, các tấm đất sét này có niên đại khoảng 1900 đến 1600 năm trước công nguyên có ghi 15 bộ số tam giác. Các bộ số này 119-120-169; 3367-3456-



4825; 4601-4800-6649; 12709-13500-18541. Bộ số thứ 11 chính là 45-60-75 cũng là các số 3-4-5 mà mọi người quen biết.

Tuy nhiên người ta vẫn cho rằng Pythagoras chính là người đầu tiên chứng minh định lý tam giác, nhưng chưa chắc Pythagoras là người đã phát hiện định lý tam giác sớm nhất. Bởi vì Pythagoras đã từng đến thăm và học tập tại Cổ Ai Cập và Babilon. Pythagoras không thể không biết các thành tựu số học này của người Ai Cập và Babilon cổ đại.

## Số $\pi$ được tính như thế nào?

Muốn tính số  $\pi$ , ta cần biết chiều dài của đường tròn, chiều dài của đường kính. Nếu đã có hai trị số đó ta lấy "chiều dài đường tròn chia cho chiều dài đường kính ta sẽ tính được số  $\pi$ ". Tiếc rằng đường tròn là đường cong, mà là đường cong thì không đo được chính xác, nên việc tính số  $\pi$  trở nên một việc khó.

Từ thời cổ đại, người Trung Quốc đã có câu "đường kính 1 chu vi 3" là theo kinh nghiệm nêu lên rằng chiều dài của đường tròn gấp ba lần đường kính. Con số này ban đầu chỉ là con số tính thô thiển, nhưng đến năm 260 vào thời Tam quốc nhà số học Lưu Huy đề ra cách giải quyết số học, ông cho rằng cho vẽ một lục giác đều nội tiếp trong một đường tròn, vì mỗi cạnh của hình lục giác bằng bán kính đường tròn, nên chiều dài của cạnh hình lục giác gấp 6 lần chiều dài bán kính, nghĩa là gấp ba lần đường kính của hình tròn. Nếu so sánh giữa hình lục giác đều và hình tròn thì diện tích của hình lục giác nhỏ hơn hình tròn và độ dài của tổng các cạnh hình lục giác bé hơn chu vi của đường tròn rất nhiều. Cho nên nói chu vi gấp ba lần đường kính là không chính xác.

Thế làm thế nào để cải tiến tình hình. Lưu Huy phát hiện khi đang thay hình lục giác thành 12 cạnh đều nhau nội tiếp trong đường tròn thì diện tích và chu vi của hình lục giác và hình tròn sẽ khác nhau ít đi. Nếu thay hình đa giác đều nội tiếp trong đường tròn có  $n$  cạnh bằng hình đa giác có  $2n$  cạnh thì sai số giữa diện tích và chu vi của đường tròn và đa giác sẽ giảm đi. Lưu Huy gọi phương pháp này là "thuật chia cắt hình tròn". Ông nói "chia cắt càng nhỏ thì tổn thất càng ít". Cắt rồi lại cắt, chia cắt đến khi không chia cắt được nữa, sự sai khác giữa hai hình sẽ bằng

không và hình đa giác đều  $n$  cạnh sẽ tiến đến trùng với đường tròn. Đó là phương pháp tiếp cận đến giá trị thực bằng giới hạn, đó là phương pháp tư duy số học rất khoa học, rất tiên tiến.

Người Hy Lạp cổ đại đã phát minh phương pháp tính số  $\pi$  dựa vào hình đa giác nội tiếp. Vào 200 năm trước công nguyên Archimède đã vẽ các đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn. Vẽ vòng tròn bán kính bằng 1 và nếu gọi diện tích của đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp là  $S_n$  và  $T_n$  thì diện tích hình tròn bán kính 1 sẽ là số  $\pi$ .

Vì vậy ta có:

$$S_n < \pi < T_n.$$

Nếu lại vẽ đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp có  $2_n$  cạnh thì diện tích của các hình đa giác nội ngoại tiếp này sẽ là  $S_{2n}$  và  $T_{2n}$ , ta sẽ có:

$$S_n < S_{2n} < \pi < T_{2n} < T_n$$

Nếu so sánh số  $\pi$  với  $S_{2n}$  và  $T_{2n}$  thì  $S_{2n}$  và  $T_{2n}$  sẽ gần với số  $\pi$  hơn. Nếu tiếp tục tăng gấp đôi số cạnh đa giác nội tiếp và ngoại tiếp thì diện tích của chúng sẽ dần đến số  $\pi$ .

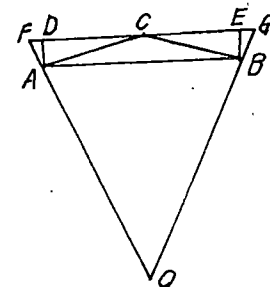
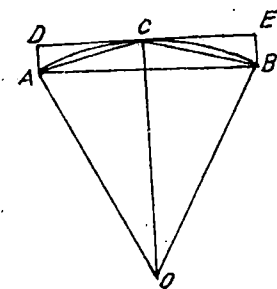
Nếu so sánh thì "thuật chia cắt" của Lưu Huy có thể thuận tiện hơn phương pháp Archimède. Để rõ hơn ta sẽ xem xét cách tính toán của Lưu Huy (xem hình vẽ dưới đây). Cho AB là một cạnh của hình đa giác nội tiếp có  $n$  cạnh, C là trung điểm của AB thì các dây của AC, BC sẽ là hai cạnh của hình đa giác nội tiếp có  $2_n$  cạnh. Cho diện tích của đa giác đều  $n$  cạnh là  $S_n$ . Vẽ trên AB một hình chữ nhật ABED mà cạnh DE của hình chữ nhật đi qua điểm C, và DE cũng nhận C là trung điểm. Vì vậy:

$$\begin{aligned} \pi < S_{2n} + n(S_{\triangle ADC} + S_{\triangle BEC}) &= S_{2n} + nS_{\triangle ACB} \\ &= S_{2n} + (S_{2n} - S_n). \\ &= 2S_{2n} - S_n \end{aligned}$$

Đó là giới hạn trên của  $\pi$ , còn giới hạn dưới là  $S_{2n}$ .

Công thức Lưu Huy sử dụng là  $S_{2n} < \pi < 2S_{2n} - S_n$ .

Còn công thức của Archimède thì không chỉ cần phải tính  $S_n$ ,  $S_{2n}$  mà còn phải tính diện tích  $T_n$ ,  $T_{2n}$ , khối lượng công việc tăng gấp bội,



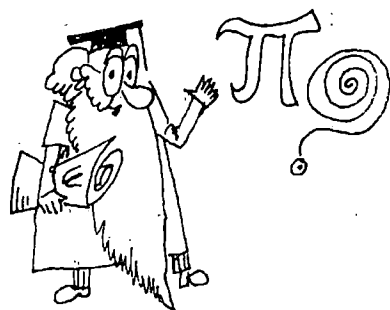


tính toán lại phức tạp. Hình bên ta tách một bộ phận để xem xét. Diện tích  $T_{2n}$  mà Archimède cần tính toán lớn hơn diện tích  $2S_{2n} - S_n$  của Lưu Huy  $2_n$  diện tích của hình tam giác nhỏ ADF, nên diện tích của Lưu Huy so với diện tích của Archimède chính xác hơn nhiều.

Đương nhiên khi xem xét ta phải chú ý đến vấn đề thời gian. So với phương pháp của Archimède thì phương pháp của Lưu Huy xuất hiện sau hơn 400 năm, nền văn minh nhân loại và lịch sử khoa học trải qua 400 năm, đã có sự phát triển lớn lao và đã tiến bộ rất nhiều. Rõ ràng Archimède là người đầu tiên trên thế giới đã ước lượng số  $\pi$  dựa vào giới hạn dưới và giới hạn trên của nó. Tính sáng tạo của Archimède cũng như Lưu Huy chứng tỏ sự tuyệt diệu của trí tuệ.

## Có phải người ta đã tính số $\pi$ đến một tỉ con số sau dấu phẩy?

Tỉ số giữa chu vi với đường kính của đường tròn gọi là tỉ suất đường tròn. Đến năm 1737, nhà toán học vĩ đại Euler mới đề nghị dùng chữ cái Hy Lạp là " $\pi$ " (đọc là Pi) để biểu diễn tỉ suất đường tròn. Ở cấp tiểu học người ta chấp nhận số  $\pi = 3,14$  còn đến cấp trung học số  $\pi$  được xem bằng



3,1416. Trên thực tế đó chỉ là các giá trị gần đúng. Số  $\pi$  là một số lẻ thập phân vô hạn không tuần hoàn nên không có cách nào tính được chính xác giá trị của  $\pi$ .

Vào thời cổ đại Trung Quốc người ta nói "đường kính 1 chu vi 3" có nghĩa là "đường kính đường tròn 1 thì chu vi sẽ có độ dài là 3", đó là số  $\pi$  có sớm nhất trên thế giới.

Vào hơn 2000 năm về trước, Archimède ở Hy Lạp đã tìm thấy giá trị số  $\pi$  vào khoảng giữa hai số 3,1428 và 3,1429.

Vào thế kỷ thứ nhất, đời nhà Hán, Lưu Hâm ở Trung Quốc đã tính được giá trị số  $p$  là 3,15347. Vào thế kỷ II, Trương Hành tính được số  $\pi$  bằng  $\sqrt{10}$ ; Vào thế kỷ III Lưu Huy tính được số  $\pi = 3,1416$ .

Vào thế kỷ V, Tổ Xung Chi dùng "thuật chia cắt của Lưu Huy" ước lượng số  $\pi$  là vào khoảng giữa hai số thập phân:  $3,1415926 < \pi < 3,1419527$ .

Ông cũng đã đề ra ước suất  $\frac{22}{7}$  và mật suất  $\frac{355}{113}$  là hai ước lượng của số  $\pi$  ở dạng phân số. Các phép tính của ông phải đến những năm 800 sau này được người Arab Piansi tìm thấy. Vào năm 1427, Piansi tìm được số  $\pi$  với 17 số lẻ.

Vào năm 1610, người Hà Lan là Rudolf đã đem hết tinh lực tính được số  $p$  với 35 số lẻ, ông đã đem con số này khắc trên bia mộ, người đời sau gọi đó là số "Rudolf".

Sau đó người Nhật Bản là Quan Hiếu cùng đệ tử là Kiến Bộ Hiền đã tính số  $\pi$  đến 32 số lẻ.

Vào năm 1789, một người Anh là Georhe Wierge Weika đã tính đến số  $\pi$  đến 143 số lẻ (chỉ 126 số chính xác), số  $\pi$  một lần nữa lại chiếm vị trí quán quân về con số lẻ.

Vào năm 1844, Schale Williams Das tính số  $\pi$  đến 200 số lẻ.

Năm 1855, Raysie đã tính được với 500 số lẻ.

Năm 1873, Willimas Scheikes đã tính được số  $\pi$  đến 707 số lẻ, nhưng vào những năm 30 của thế kỷ XX người ta phát hiện trong các số lẻ này từ số 528 trở đi là không chính xác, nên thực tế chỉ số 527 số lẻ.

Bốn năm sau hai người Mỹ đã lập kỷ lục mới tính số  $\pi$  với 1120 số lẻ.

Từ khi máy tính điện tử ra đời thì máy tính điện tử đã thay thế máy tính cơ khí nên việc tính số  $\pi$  đã không còn khó khăn nữa. Tốc độ và tính năng của máy tính không ngừng được cải tiến nên người ta đã tính số  $\pi$  đến hàng tỉ con số lẻ. Các bạn xem bảng cho dưới đây sẽ rõ.

| Năm  | Người tính                    | Số chữ số lẻ | Thời gian để tính |
|------|-------------------------------|--------------|-------------------|
| 1950 | -                             | 2037         | 70 giờ            |
| 1955 | -                             | 3089         | -                 |
| 1957 | Mỹ                            | 100.265      | 8 giờ 43 phút     |
| 1973 | Pháp                          | 1 triệu      | 23 giờ 18 phút    |
| 1983 | (Nhật), Điền Xuyên, Kiến Ninh | 16.777216    | 30 giờ            |
| 1986 | Các nhà khoa học Mỹ           | 29.360.000   | 28 giờ            |
| 1987 | (Nhật), Kim Điền, Khanh Chính | 1.335 tỉ     | 35 giờ 14 phút    |

|        |                               |             |               |
|--------|-------------------------------|-------------|---------------|
| 1988   | (Nhật), Kim Điền, Khanh Chính | 20.132,6 tỉ | 5 giờ 57 phút |
| 1989   | Mỹ                            | 4000 triệu  | -             |
| 8/1989 | (Nhật), Kim Điền, Khanh Chính | 5.568,7 tỉ  | -             |
| 9/1989 | Mỹ Gnacmanry                  | 1.1 tỉ      |               |

Thế nhưng số  $\pi$  có hàng tỷ con số lẻ thì được lợi ích gì trong thực tế? Trong công việc thực tế không ai đòi hỏi phải chính xác đến như vậy. Nhưng đó cũng có lợi đối với công nghệ máy tính. Vì điều đó trở thành một "tiêu chuẩn" để đo tính năng của máy tính. Đương nhiên người ta cũng hy vọng là tử số  $\pi$  liệu có thể đi đến kết luận lý thú nào đó.

## Nội dung bài toán khó của hình học thời cổ đại như thế nào?

Ba bài toán hình học khó thời cổ đại chính là 3 bài toán dựng hình thời cổ Hy Lạp. Đó là ba bài toán sau đây:

1. Bài toán chia một góc bất kỳ thành ba phần bằng nhau.
2. Bài toán về cầu phương hình tròn: Dựng một hình vuông thế nào cho diện tích của hình vuông bằng diện tích của hình tròn cho trước.
3. Dùng phương pháp cầu phương dựng một khối lập phương có thể tích gấp đôi thể tích một hình lập phương cho trước.

Ba bài toán này xuất hiện vào khoảng thế kỷ VI đến thế kỷ IV trước Công nguyên. Bài toán gấp đôi thể tích một khối lập phương có liên quan đến một câu chuyện thần thoại. Chuyện kể rằng vào thời đó ở tại Đảo Dilo trên biển Aegean bị nạn dịch hạch hoành hành dữ dội. Một nhà tiên tri nói rằng ông ta được thần linh truyền báo là bệ thờ khối lập phương thờ thần Apollo quá bé, cần phải lập tức tăng thể tích bệ thờ dạng khối lập phương lên gấp đôi thì mới chấm dứt được bệnh dịch. Các thợ thủ công thời đó đã lập tức tăng kích thước cạnh bệ thờ lên gấp đôi tức là tăng  $2 \times 2 \times 2 = 8$ , và thể tích bệ thờ đã tăng lên 8 lần, không đáp ứng được ý của thần linh và bệnh dịch ngày càng hoành hành dữ dội hơn. Lúc đó người ta đã nhanh chóng phát hiện sai lầm và nghiên cứu hết sức cẩn thận để làm thế nào tăng thể tích khối lập phương lên gấp đôi.

Mới xem qua thì bài toán khá đơn giản và không khó lắm, thế nhưng bài toán này bị ràng buộc khá chặt chẽ là chỉ được dùng thước kẻ và compa để dựng hình và chính do ràng buộc này mà ba bài toán trở thành ba bài toán khó. Trải qua hơn 2000 năm, ba bài toán đã thu hút không biết bao nhiêu tinh lực, tâm huyết mong tìm được lời giải. Mãi đến thế kỷ XIX người ta mới chứng minh được là nếu chỉ dùng có thước kẻ và compa thì về căn bản không thể thực hiện được ba bài toán dựng hình đã đặt ra.

Tại sao trong hình học, trong phép dựng hình lại chỉ được sử dụng thước kẻ và compa?

Người Hy Lạp cho rằng nguyên tắc cơ bản của hình học là chỉ sử dụng một số rất ít các định nghĩa và tiên đề mà có thể đưa ra được số các mệnh đề nhiều nhất, vì vậy trong phép dựng hình cũng cần phải hạn chế số công cụ đến độ ít nhất. Người Hy Lạp còn cho rằng học hình học là để rèn luyện tư duy, phải dựa vào sự suy nghĩ chứ không phải dựa vào các công cụ vẽ hình. Vì vậy họ đã quy định trong phép dựng hình chỉ được sử dụng thước kẻ và compa là các loại công cụ đơn giản nhất.

Hình học phẳng cổ Hy Lạp (cũng là hình học phẳng phổ thông ngày nay) quy định rằng trong phép dựng hình chỉ được dùng các thước kẻ không có chia độ và đánh dấu. Thước kẻ chỉ có mục đích là kẻ nối hai điểm cho trước bằng một đường thẳng không hạn chế độ dài. Còn compa là một công cụ để từ một điểm làm tâm vẽ các đường tròn, cung tròn có bán kính với độ dài bất kỳ. Trong khi sử dụng hình chỉ sử dụng thước và compa một số lần hữu hạn. Ngoài ra còn quy định có thể dùng giao điểm của các đường thẳng, của đường thẳng và đường tròn, của giao điểm đường tròn và đường tròn (hoặc cung tròn) để xác định các điểm. Tập hợp các quy định này được gọi là các quy tắc dựng hình trong hình học phẳng.

Từ thế kỷ XVIII trở về trước người ta cho rằng có thể tìm lời giải cho "Ba bài toán lớn", chỉ có điều là chưa tìm được các bước, các thủ tục để tiến hành giải, và chưa có ai nghĩ rằng đó là ba bài toán "không có lời giải". Từ suy nghĩ và nhận thức, người có cách nghĩ có tính cách đột phá là anh sinh viên trẻ Gauss. Chính Gauss đã dùng thước và compa để dựng nên hình 17 cạnh đều và cũng đã chứng minh là không thể có cách vẽ được nhiều loại đa giác đều khác. Ví dụ ông đã dùng thước và compa không thể vẽ được hình 7 cạnh đều, hình 11 cạnh đều, hình 9 cạnh đều.

Từ cách suy nghĩ đó đã đưa đến câu hỏi là liệu ba bài toán khó về hình học có phải là ba bài toán không có lời giải?

Vào năm 1837, một sinh viên 23 tuổi là Wasel đã chứng minh là dùng thước và compa người ta không thể chia một góc bất kỳ thành ba phần đều nhau cũng như không thể dựng một khối lập phương có thể tích gấp đôi một khối lập phương có thể tích cho trước. Như vậy người ta đã giải quyết được hai trong số ba bài toán khó cổ đại.

Vào khoảng năm 1830, một thanh niên Pháp 19 tuổi là Galois, đã phát minh lý thuyết nhóm Galois. Theo lý thuyết Galois thì việc chứng minh ba bài toán khó cổ đại không có lời giải là một vấn đề khá đơn giản. Vào năm 1882, nhà toán học Đức Lindman chứng minh rằng số  $p$  là một số siêu việt và theo đó thì bài toán cầu phương trình tròn là không có lời giải, và từ đó ba bài toán lớn về hình học cổ đại xem như được giải quyết. Như vậy các bài toán học đã chứng minh ba bài toán hình học cổ đại là không có lời giải.

Ba bài toán khó hình học cổ đại đã trở thành một vấn đề có tính chất lịch sử, ngày nay bài toán làm thế nào “để chia ba một góc” bằng thước và compa đã không còn có nghĩa nữa.

## Vì sao bài toán cầu phương lại không thực hiện được?

Trong lịch sử bài toán “biến tròn thành vuông” đã kêu gọi hứng thú cho không biết bao nhiêu người.

Người nghiên cứu bài toán này sớm nhất là nhà học giả cổ Hy Lạp Anacrasse vào thế kỷ V trước Công nguyên. Thời đại của ông là thời đại mà mê tín còn thịnh hành, nhưng ông lại không tin thần thánh. Trong thần thoại Hy Lạp, Apollo là vị thần Mặt trời nhưng Anacrasse lại cho là Mặt trời không phải là thần mà chỉ là một quả cầu lửa. Do vậy ông bị gán cho tội “bất kính với thần thánh” và bị giam vào ngục.

Trong nhà giam, một tay ông cầm cây gỗ, một tay cầm dây, đo tới đo lui. Nhà ngục đã hạn chế hành động của ông, nhưng không thể buộc ông ngừng suy nghĩ, ông nghĩ cách làm thế nào để vẽ được một hình vuông mà diện tích của nó đúng bằng diện tích một hình tròn cho trước.

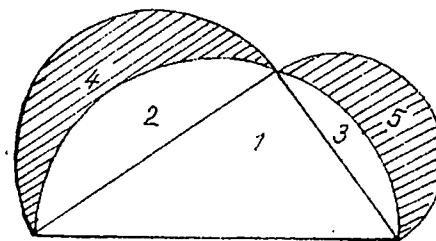
Cho đến khi chết Anacrasse vẫn không giải được bài toán này. Sau khi ông chết, bài toán “biến tròn thành vuông”<sup>(\*)</sup> được lan truyền và đã hấp dẫn nhiều nhà nghiên cứu, đến mức ở Hy Lạp đã xuất hiện một chuyên đề với tên “hiến thân cho bài toán cầu phương”.

Nhà học giả cổ Hy Lạp Hypocrate (khoảng 460 - 377 năm trước công nguyên) đã nghiên cứu vấn đề này và tìm ra định lý “trăng lưỡi liềm” củng cố lòng tin vào khả năng có thể cầu phương hình tròn. Định lý “trăng lưỡi liềm” có nội dung như sau: Trên các cạnh của một tam giác vuông, ta vẽ 3 nửa đường tròn, chúng sẽ cắt nhau thành hai mặt trăng lưỡi liềm, tổng diện tích của hai mặt trăng lưỡi liềm bằng diện tích của tam giác vuông như hình vẽ bên.

Dễ dàng tìm thấy rằng diện tích của nửa hình tròn vẽ trên cạnh huyền bằng tổng diện tích hai nửa đường tròn vẽ trên hai cạnh của góc vuông nên ta có:

$$S_1 + S_2 + S_3 = (S_2 + S_4) + (S_3 + S_5)$$

$$\text{Do đó } S_1 = S_4 + S_5.$$

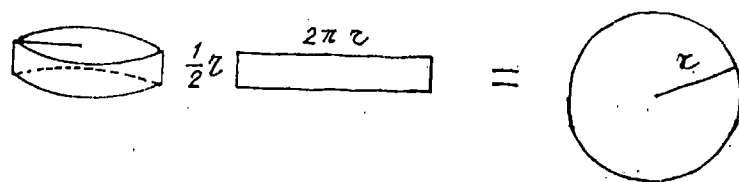


Bài toán này, ngày nay mọi học sinh phổ thông trung học đều chứng minh được nhưng vào thời Hypocrate, ông hết sức vui mừng vì cho rằng hai trăng lưỡi liềm  $S_4$  và  $S_5$  được tạo thành do hai cung tròn còn  $S_1$  là diện tích của một tam giác vuông, diện tích của tam giác vuông này rõ ràng là rất dễ tính, như vậy giữa đoạn thẳng và cung tròn ắt có một mối liên quan nào đó. Nếu nghiên cứu kỹ chắc là có thể giải được bài toán cầu phương. Tiếc rằng mọi nỗ lực của Anacrasse đều thất bại.

Không chỉ có ông Anacrasse bị thất bại mà không biết bao nhiêu người hay giới học giả suốt 2000 năm sau đó cũng chỉ chuốc lấy thất bại khi mưu toan giải bài toán cầu phương kể cả Leonardo Da Vinci. Leonardo Da Vinci là một nhà danh họa thời Phục hưng nhưng ông đồng thời cũng là nhà khoa học, ông cũng đã nghiên cứu bài toán cầu phương. Ông cho rằng có thể giải bài toán cầu phương bằng thực nghiệm. Ông dùng một “khối trụ tròn lùn”, đây là một hình tròn có diện tích đã biết, chiều cao nửa đường bán kính. Ông cắt khai mặt bên hình trụ thành một

<sup>(\*)</sup> Hay còn gọi là bài toán cầu phương một hình tròn. (N.D).

bằng giấy phẳng. Theo ông diện tích băng giấy là  $\frac{1}{2}r \times 2\pi r = \pi r^2$  mà diện tích của hình tròn cũng chính là  $\pi r^2$ , như vậy theo ông, ông đã vẽ được một hình chữ nhật mà diện tích đúng bằng diện tích hình tròn như trình bày ở hình vẽ dưới đây.



Mọi người cho đó là một chuyện buồn cười vì theo quy định của phép dựng hình thì chỉ được dùng thước kẻ và compa mà không hề nói đến việc dùng lăng trụ tròn. Vì sao mọi nỗ lực trong suốt 2000 năm đều thất bại? Vấn đề là do ở số  $\pi$ .

Nếu số  $\pi$  là một số nguyên hoặc một phân số có thể giải được bài toán cầu phương. Tiếc rằng số  $\pi$  không phải là số nguyên cũng như một phân số.

Đến thế kỷ XVIII người ta mới chứng minh được rằng số  $\pi$  là một số vô tỉ, là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Về số vô tỷ thì có loại cầu phương được, nhưng có loại không cầu phương được.

Do vậy có người cho rằng số  $\pi$  có thể là số siêu việt? Nếu là một số siêu việt thì tuyệt nhiên không thể cầu phương được. Mọi người đều biết số nguyên, phân số, số vô tỉ lập thành hệ nghiệm của các phương trình đại số, người ta gọi chúng là các số đại số. Ngoài ra còn có một loại số không phải là số đại số mà được gọi là số siêu việt. Vào thế kỷ XIX, người ta còn biết rất ít về số siêu việt, vào năm 1881 một nhà số học Đức đã chứng minh số  $\pi$  là một số siêu việt, điều đó đã hoàn toàn dập tắt mọi con đường giải bài toán cầu phương.

Thật là một bài toán đã gây khó dễ cho không biết bao nhiêu bộ óc thông minh. Người ta chỉ có thể tự an ủi là nhờ nghiên cứu vấn đề này, người ta đã biết đến được số nguyên, phân số, số hữu tỉ, số vô tỉ, số đại số, số siêu việt. Nhờ đó mà con người ta từng bước, từng bước đi sâu vào số học.

Theo thông báo công bố trên tạp chí "Tri thức là mạnh" số 6 năm 1991 xuất bản tại Liên Xô, một nhà số học Hungari đã sơ khởi giải quyết

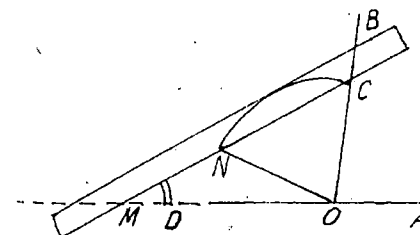
bài toán này. Ông đã chứng minh: Với bất kỳ một hình tròn nào đều có thể chia thành một số hữu hạn các hình vuông. Ông đã trình bày chứng minh luận đề này trên 40 trang giấy. Nghe nói chứng minh của ông đã được một số nhà số học Mỹ thừa nhận. Thế nhưng chưa được giới toán học chấp nhận và còn phải tiến hành các chứng thực khác nữa.

## Có phải thực sự không thể chia một góc bất kỳ thành 3 góc bằng nhau?

Nếu theo quy định của phép dựng hình chỉ dùng thước kẻ và compa thì thực sự không thể chia một góc thành 3 phần đều nhau. Đó là điều mà toán học đã chứng minh (xem nội dung phần bài toán khó cổ đại). Thế nhưng nếu bỏ qua hạn chế chỉ dùng thước kẻ không chia độ và compa thì người ta có nhiều cách chia một góc bất kỳ thành 3 góc bằng nhau. Dưới đây xin giới thiệu vài phương pháp (xin độc giả tự chứng minh):

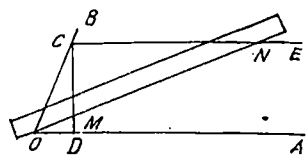
Cho  $\widehat{AOB}$  là một góc bất kỳ, hãy dựng góc bằng  $\frac{1}{3} \widehat{AOB}$ .

**Phương pháp Archimède.** Trước khi dựng hình cần phải đánh dấu trên thước kẻ hai điểm M, N bất kỳ, sau đó bắt đầu giải bài toán: Lấy O làm tâm, lấy độ dài MN làm bán kính vẽ một cung tròn cắt OB tại điểm C, AO kéo dài tại điểm D như biểu diễn ở hình vẽ phía dưới. Đặt điểm N trên thước kẻ tại điểm D, điểm M trên thước sẽ ở về phía OD kéo dài. Dịch chuyển thước để điểm M di động trên OD hướng về phía điểm D, giữ điểm N di động hướng về điểm C trên cung DC. Khi 3 điểm M, N, C nằm trên đường thẳng, thì đường thẳng này vẽ nên góc  $\widehat{OMC}$  bằng  $\frac{1}{3} \widehat{AOB}$ .

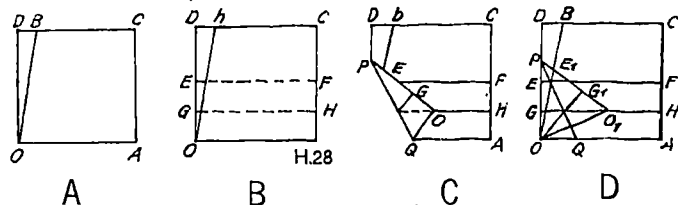


**Phương pháp Paphos:** Đánh dấu hai điểm M và N trên thước kẻ. Chọn trên OB một điểm C thế nào cho  $OC = \frac{1}{2} MN$ . Từ C vẽ  $CD \perp OA$ .

Vẽ  $CE \parallel OA$  như hình vẽ dưới. Đặt thước kẻ giữa điểm M di động trên CD và điểm N di động trên CE. Khi 3 điểm O, M, N cùng nằm trên đường thẳng thì đường ON sẽ tạo nên góc  $\widehat{AON} = \frac{1}{3} \widehat{AOB}$ .



**Phương pháp gấp giấy:** OACD là một mảnh giấy hình vuông như ở hình trái, cho  $\widehat{AOB}$  là một góc bất kỳ mà ta cần chia làm ba phần đều nhau. Phương pháp chia góc được thực hiện như sau:



1. Gập đôi hình vuông OACD theo đường EF, lại gập đôi hình AOFF theo đường GH, như hình trên.

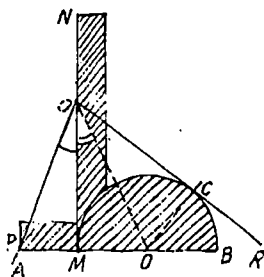
2. Gập để điểm O ở góc dưới bên trái nằm lên đường GH, đồng thời điểm E sẽ trùng lên cạnh OB. Đánh dấu đường PQ như ở hình 28C.

3. Đánh dấu các điểm O, G, E trên mặt giấy thành các điểm O<sub>1</sub>, G<sub>1</sub> và E<sub>1</sub>. Vuốt phẳng tờ giấy như ban đầu sẽ được thành hình chữ nhật như ở hình 28D. Các đường OO<sub>1</sub> và OG<sub>1</sub> sẽ chia góc  $\widehat{AOB}$  thành ba phần đều nhau.

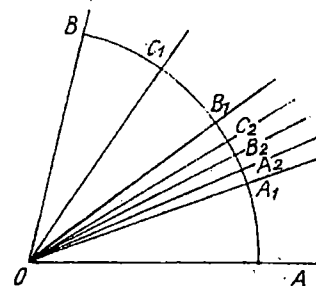
Dụng cụ để chia góc thành ba phần đều nhau: Có thể dùng chất dẻo trong hoặc bìa cứng làm dụng cụ chia ba một góc như ở phần gạch chéo trên hình vẽ.

Đây chính là dụng cụ tạo thành từ một góc vuông và các nửa vòng tròn, trong đó  $\widehat{PMN}$  là góc vuông, các điểm P, M, Q, R ở trên một cạnh của góc vuông sao cho  $PM = MQ = QR$ , MR là đường kính của nửa đường tròn tâm Q.

Cách sử dụng: Giả sử cần chia  $\widehat{AOD}$  thành ba phần bằng nhau. Dùng dụng cụ chia ba một góc đặt lên góc  $\widehat{AOB}$  sao cho điểm O nằm trên cạnh



MN của góc vuông. Điểm P nằm trên cạnh OA và dịch chuyển dụng cụ để cho nửa đường tròn trên dụng cụ nhận OB làm tiếp tuyến với tiếp điểm tại C. OM và OQ sẽ chia góc  $\widehat{AOB}$  thành ba phần bằng nhau.



Trên đây là phương pháp chia một góc bất kỳ thành ba phần đều nhau rất chính xác. Tuy nhiên không có phương pháp nào tuân thủ các điều kiện của phép dựng hình trong hình học. Dưới đây xin giới thiệu một phương pháp gần đúng.

Giả sử  $\widehat{AOB}$  là góc ta cần chia làm ba phần. Trước hết chia  $\widehat{AOB}$  làm bốn phần. Việc chia một góc làm bốn phần không có gì khó. Trước hết ta chia góc  $\widehat{AOB}$  thành 4 phần. Lại chia một góc nào đó vừa thu được thành 4 phần và cứ tiếp tục chia một góc nhỏ vừa thu được 4 phần... Cứ thế tiếp tục thực hiện n lần; đến lúc sẽ có một góc  $\widehat{AOB}_n$  hầu gần bằng  $\frac{1}{3} \widehat{AOB}$ . Vì giới hạn

của  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} \dots$  bằng  $\frac{1}{3}$ .

## Vì sao cần phải nghiên cứu ma phương (hình vuông kỳ ảo)?

Ma phương còn được gọi là tung hoành đồ (hình ngang dọc). Ma phương nguồn gốc khá lâu đời. Ma phương được người Trung Quốc phát hiện trước tiên.

Đến đời nhà Tống, nhà toán học nổi tiếng Dương Huy đã nghiên cứu và tìm ra nhiều loại ma phương trong đó có ma phương cấp 4 và 5 đến cấp 10. Các ma phương này mang tên có vẻ cổ kính trang nhã như đệ âm đồ, lục lục đồ, bách trị đồ, bát trạn đồ, liên hoàn đồ... Trình đại Vị đời nhà Minh, Phương Trung Thống, Trương Triều đời nhà Thanh cũng đã kế thừa các truyền thống lâu đời này, có thể nói ở đây truyền thống thật dài, đời đời nối nhau. Lý Nghiệm, một chuyên gia về nền toán học cổ của

Trung Quốc đã từng viết trong một quyển sách có giá trị “Các nhà nghiên cứu tung hoành đồ nổi tiếng” được các học giả trong và ngoài nước coi trọng. Đến thời cận đại có Đồ Tuần Lập, Trần Hoài Thư, Hứa Thuần Phổng tiếp tục nghiên cứu, ngoài ra còn một số lớn các nhà nghiên cứu nghiệp dư, ham thích nghiên cứu phân bố khắp nơi trong toàn quốc, con số rất đông đảo mà ít nước nào sánh kịp.

Nhà toán học nổi tiếng Nhật Bản là Quan Hiến cùng với An Bộ Nguyên xưa từng được tôn xưng là “thánh toán” đều được học hỏi các tri thức về ma phương từ Trung Quốc, sau đó họ đã tiếp tục phát huy và phát triển đã đỗi kịp và vượt Trung Quốc. Hiện tại các nhà nghiên cứu ma phương Nhật Bản đang chiếm vị trí hàng đầu thế giới. Ở phương Tây cũng có các học giả chuyên tâm nghiên cứu như ở Pháp có Lobô, Paixien, Hayer, nhà nghiên cứu Mỹ nổi tiếng là Frankleir được xếp vào những người nổi tiếng trong phạm vi chuyên môn này.

Các nghiên cứu về ma phương có giá trị về nhiều mặt. Nghiên cứu ma phương có quan hệ mật thiết với nhiều ngành học thuật như khảo cổ học, phong tục học, văn học sử về đồ hình, tôn giáo cũng như trong giao lưu văn hoá.

Lý thuyết tập hợp là một ngành của số học rất phát triển trong thời cận đại. Nhà số học Mỹ đã viết quyển sách Lý thuyết tập hợp xuất bản vào năm 1963. Mở đầu quyển sách có viết:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

“Lý thuyết tập hợp hay còn gọi là giải tích tổ hợp từ xưa đã là một ngành của số học. Theo truyền thuyết vào khoảng 2200 năm trước người ta đã quan sát thấy trên lưng rùa thần ma phương.

Do đó có thể thấy, ngày nay người ta đã nghiên cứu ma phương rất sâu sắc, việc thiết lập ma phương đến cấp 190 cũng không còn là vấn đề khó. Từ ma phương cổ xưa đã phát

triển thành các ma phương có ý nghĩa rộng rãi, các khối ảo, các ma trận chữ nhật và dĩ nhiên trong hoành đồ là một vấn đề nghiên cứu trong học thuyết tổ hợp. Ở châu Âu phải đến thế kỷ XIV mới bắt đầu nghiên cứu ma phương. Trong phạm vi lý thuyết tổ hợp, việc nghiên cứu tung hoành đồ của Trung Quốc rất được coi trọng.

## Thế nào là “phương pháp khử Gauss”?

Trong các sách đại số cao cấp *Đại số tuyến tính* và *Phương pháp tính* khi nói đến việc dùng ma trận để giải hệ phương trình tuyến tính, ở các nước Âu Mỹ vẫn gọi là “phương pháp khử Gauss”. Người ta hay nói đến “Phương pháp khử Gauss” để giải các hệ phương trình tuyến tính, ví như giải hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 34 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26 \end{cases}$$

Phương pháp giải chung là trước hết ta biết ma trận mở rộng

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Sau đó tiến hành biến đổi các biến đổi sơ cấp các hàng (ví như nhân một hàng cho một số khác không, cộng vào một hàng một hàng khác đã nhân với một số khác không; thay đổi vị trí hai hàng). Sau một loạt các biến đổi liên tục, ma trận mở rộng (1) sẽ biến thành:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Nhờ đó thực tế ta đã được  $x_3 = \frac{11}{4}$  thay thế  $x_3$  vào hàng trên ta có thể tìm được  $x_2 = \frac{11}{7}$ , sau khi được  $x_2, x_3$  ta lại vào hàng trên cùng và thu được  $x_1 = \frac{37}{4}$

Hoặc từ (2) ta có thể tiếp tục biến đổi sơ cấp ma trận (2) để thu được ma trận (3).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 37/4 \\ 0 & 1 & 0 & 17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

“Phương pháp khử Gauss” thường được dùng để giải hệ phương trình tuyến tính bằng máy tính điện tử.

## Tính toán nhanh có cần bí quyết không?



Muốn tính toán được nhanh phải tập làm tính nhiều, rèn luyện nhiều. Tục ngữ nói rằng: “Hay làm khéo tay” có nghĩa là qua việc lặp đi lặp lại nhiều lần ta có thể làm chủ được tốc độ tính toán, tìm hiểu rõ các quy luật có thể tìm được bí quyết của phương pháp.

Dương nhiên là trong quá trình suy nghĩ, tập luyện, việc tận dụng kinh nghiệm của người đi trước là hết sức quan trọng. Dưới đây xin giới thiệu mấy cách tính toán khi đi mua hàng làm đề tài để nêu lên cách tính nhanh.

Phương pháp thêm bớt: Khi mua hàng hoá để tính tiền trả người ta thường dùng phương pháp thêm bớt để tính cho nhanh. Ví dụ mua 7,56 đồng tiền hàng mà ta lại có một tờ giấy 10 đồng, cần phải tính tiền thừa là bao nhiêu? Ở vị trí số lẻ 6 ta phải tính thêm thế nào để bù thành số 10 tức là cộng thêm 4, ở các vị trí khác ta lấy bù chín ví dụ ở vị trí số 5 ta bù 4, ở vị trí số 7 ta bù 2 ( $5 + 4 = 9$ ;  $7 + 2 = 9$ ). Ta có các số phải bù là 2,44 và số tiền thừa phải tính là 2,44đ.

Phương pháp tính số nguyên sau đó đến số lẻ. Trước hết tính số lớn sau đó tính số nhỏ. Trước hết tính số lớn tức là trước hết là chọn một số

lớn hơn tổng số. Ví dụ mua 2,6kg thịt, mỗi cân giá 3,8đ. Tổng số tiền phải trả sẽ là bao nhiêu. Trước hết ta làm tròn giá tiền 1kg thịt hơi thành một số nguyên lớn hơn ví dụ 4đ 1kg. Còn lượng thịt để tính ta chọn 2,5kg thay cho 2,6kg. Lập tức ta sẽ tìm được số tiền hơi lớn hơn  $4 \times 2,5 = 10$ đ. Ghi nhớ lấy con số này. Tiền phải trả sẽ là số khá gần với các số 8, 9 và 10. Sau đó lại tính kỹ hơn, mỗi cân thịt đã tính đôi 2 hào nên 2,5kg thịt đã tính đôi thêm 5 hào, trừ số tính đôi này sẽ còn 9,5đ. Số tiền tính thiếu 0,1kg sẽ là 0,38đ nên tổng số tiền phải trả là 9,88đ.

Cần ghi nhớ các số đặc thù sau đây khi ứng dụng nguyên tắc “trước số nguyên sau số lẻ” để tính toán như  $4 \times 25 = 100$ .

$$2 \times 5 = 10 \quad \frac{1}{2} = 0,5$$

$$4 \times 25 = 100 \quad \frac{1}{4} = 0,25, \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$8 \times 125 = 1000 \quad \frac{1}{8} = 0,125$$

$$16 \times 625 = 10.000 \quad \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Tổng các số từ 1 đến 10 là  $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ .

Tổng các số từ 1 đến 100 là  $1 + 2 + \dots + 99 + 100 = 5050$ .

Nhờ các chữ số đặc thù này và sử dụng linh hoạt ta có thể tính được nhanh hơn.

Ví dụ phép tính  $3317 : 5$  có thể đổi thành  $3317 \times 2 : 10 = 663,4$ . Với cách đó ta biến việc thực hiện các phép chia thành thực hiện phép nhân đơn giản hơn, đáp số phải lùi một dấu phẩy.

Còn như phép tính nhân  $28 \times 25 = 7 \times 4 \times 25 = 7 \times 100 = 700$ .

Sử dụng các hệ thức:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

thì phép tính  $81 \times 79$  có thể biến thành:

$$(80 + 1)(80 - 1) = 80^2 - 1 = 6400 - 1 = 6399$$

còn số  $99^2$  sẽ là:

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 10.000 - 2 \times 100 + 1 = 9801.$$

Trên đây chỉ giới thiệu các phương pháp cơ bản biến các trường hợp tính toán thành các trường hợp tính đơn giản hơn.

## Bài toán “100 con gà” và bài toán “Hoà thượng ăn bánh bao” có gì khác nhau?

“Bách kê thuật” tuyệt nhiên không phải là “bách kê yển”. Trong vở kịch “Dùng mưu chiếm uy hồ sơn” Tọa Sơn Điều đã tổ chức “bách kê yển” để thực khách mặc tình ăn uống. “Bách kê thuật” là bài toán số học với nội dung 100 đồng mua 100 con gà.

Bài toán 100 con gà mới xem qua hơi giống với bài toán “Hoà thượng ăn bánh bao” nhưng trên thực tế hoàn toàn khác. Bởi vì bài toán “Hoà thượng ăn bánh bao” đơn giản hơn nên ở đây xét trước.

Đại hoà thượng mỗi người ăn 3 cái bánh bao, tiểu hoà thượng 3 người ăn 1 cái bánh bao. 100 hoà thượng ăn hết 100 bánh bao, hỏi có bao nhiêu hoà thượng?

Bài toán này có chỗ hay là nếu dùng phương pháp đại số để giải thì chả có gì khó, tuy nhiên nếu giới hạn dùng phương pháp số học thì việc giải toán quả có rắc rối. Tất cả phải dựa vào “mẹo”.

Đại hoà thượng 1 người ăn 3 bánh bao;

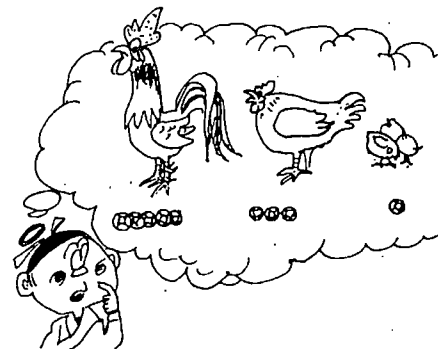
Tiểu hoà thượng 3 người ăn 1 bánh bao.

Dựa vào hai mệnh đề này ta thấy:

Cứ 1 nhóm 4 hoà thượng gồm 3 tiểu hoà thượng + 1 đại hoà thượng thì ăn 4 cái bánh bao. Nếu ta chia 100 hoà thượng thành từng nhóm 4 người sẽ là  $100 : 4 = 25$  nhóm.

Trong 25 nhóm này thì đại hoà thượng có 25 còn tiểu hoà thượng là 75. Nhờ cách sắp xếp này ta dễ dàng tính được chính xác số đại hoà thượng và tiểu hoà thượng.

Với bài toán 100 con gà thì có khó hơn nhiều. Nội dung bài toán 100 con gà như sau:



Đem 100 đồng mua 100 con gà. Gà trống giá 5đ 1 con. Gà mái giá 3đ 1 con; còn gà con 3 con giá 1đ.

Hỏi số gà mua được mỗi loại là bao nhiêu?

Trong bài toán này có 3 số chưa biết, so với bài toán hoà thượng ăn bánh bao thì nhiều hơn 1 số chưa biết, nên độ khó có tăng lên một cấp. Bài

toán này xuất hiện vào thế kỷ V trong sách Trương Khâu Kiện toán kinh, tính cho đến nay đã đến 1000 năm là bài toán cổ khó.

Người xưa yêu cầu đủ 3 đáp số của bài toán là số gà trống, gà mái, gà con tương ứng là (4, 18, 78); (8, 11, 81); (12, 4, 84). Từ đáp số cũng cho thấy cứ tăng số gà trống lên 4 con thì phải giảm số gà mái 7 con và gà con tăng lên 3 con thì số tiền vẫn 100đ.

Tiếc rằng trong sách cổ không có nêu cách giải, do đó bài toán thu hút sự chú ý của người đời sau tìm cách giải.

Có người cho rằng người xưa đã làm như sau: Trước tiên không mua gà trống, chỉ mua gà mái và gà con thì bài toán trở thành “gà mái 3 đồng 1 con, gà con 3 con giá 1đ, với 100đ mua 100 con thì được bao nhiêu gà mái, bao nhiêu gà con?”. Bài toán trở thành hoàn toàn giống bài toán hoà thượng ăn bánh bao và đáp sẽ mua được 25 gà mái, 75 gà con.

Dựa vào đó nếu mua thêm gà trống nghĩa là gà trống là từ không đến có như thế phải giảm số gà mái và gà con phải mua. Rõ ràng nếu chỉ đơn thuần tăng số gà trống và giảm số gà mái thì số tiền tăng giảm không thể nào thích ứng với nhau. Như vậy phải tăng đồng thời số gà trống đồng thời số gà mái và tăng số gà con thì mới tìm được số tiền tăng gần thích ứng tức phải dùng số gà trống tương đương với số gà mái và gà con.

Chỉ cần qua một số lần thử ta có thể tìm thấy tỉ lệ tăng giảm sẽ là: Khi tăng 4 gà trống và 3 gà con thì phải giảm tương ứng số gà mái là 7; số gà mua không thay đổi và số tiền phải trả thêm sẽ là  $4 \times 5 \frac{7 \times 1}{3} = 21$  do mua tăng gà trống và gà con, còn số tiền giảm đi khi bớt số gà mái sẽ là  $7 \times 3 = 21$  tiến hành thử nhiều lần ta sẽ có:



| Gà trống              | Gà mái                   | Gà con                 |
|-----------------------|--------------------------|------------------------|
| $0 + 4 = 4$           | $25 - 7 = 18$            | $73 + 3 = 78$          |
| $0 + 4 \times 2 = 8$  | $25 - (7 \times 2) = 11$ | $75 + 3 \times 2 = 81$ |
| $0 + 4 \times 3 = 12$ | $25 - (7 \times 3) = 4$  | $75 + 3 \times 3 = 84$ |

Ngày nay có nhiều cách để giải bài toán này. Đa số dùng phương pháp đại số giải bài toán hệ phương trình nhiều ẩn số.

Đặt  $x$  là số gà trống,  $y$  là số gà mái,  $z$  là số gà con.

Ta sẽ có:

$$x + y + z = 100 \quad (1)$$

$$5x + 3y + \frac{z}{3} = 100 \quad (2)$$

Đây là hệ phương trình vô định.

Từ phương trình (1) ta có:

$$z = 100 - x - y \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta có:

$$7x = 4y = 100 \quad (3)$$

Vì 100 là bội số của 4 nên  $x$  cũng phải là bội số của 4.

Thế thì ta sẽ có:

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| $x = 4$  | $x = 8$  | $x = 32$ |
| $y = 18$ | $y = 11$ | $y = 4$  |
| $z = 78$ | $z = 81$ | $z = 84$ |

Bài toán 100 con gà xuất hiện 1000 năm về trước, sau truyền đến Ấn Độ, Ai Cập, các nước Ả Rập, cuối cùng truyền sang Italia và châu Âu đã có cống hiến lớn trong giao lưu văn hoá, là một bài toán có sức hấp dẫn lớn.

## Chuyện “Chàng cầm mua thịt” có liên quan gì với toán học cổ Khiết Đan?

Vào khoảng 2000 năm trước khoảng thế kỷ thứ nhất ở Trung Quốc có quyển sách Sách toán chín chương. Trong sách có bài toán sau đây:

Có một số người góp tiền mua một món hàng, nếu mỗi người bỏ ra 8 tiền thì thừa 3 tiền, nếu mỗi người bỏ ra 7 tiền thì lại thiếu 4 tiền. Hỏi số

người góp tiền là mấy người, món hàng này giá bao nhiêu?

Ngày nay với những học sinh trung học phổ thông đã học qua đại số thì dễ dàng tìm thấy số người góp tiền là 7 và món hàng giá 53 tiền. Thế nhưng có điều là người cổ đại chưa biết



đến đại số họ đã giải bài toán như thế nào? Loại bài toán này là bài toán “thừa và thiếu”. Có rất nhiều bài toán thuộc loại thừa và thiếu “Chàng cầm mua thịt” là bài toán lý thú thuộc loại này. Chúng tôi thử phân tích bài toán “Chàng cầm mua thịt”.

Có một chàng cầm đi mua thịt, tay cầm tiền nhưng không thể nói được mình có bao nhiêu tiền, chỉ biết rằng nếu dùng món tiền này để mua 16 lạng thịt thì thiếu 40 tiền, còn nếu chỉ mua 9 lạng thì lại thừa 16 tiền. Bạn thử tính xem chàng cầm đã mang đi bao nhiêu tiền và có thể mua được mấy lạng thịt?

Chúng ta phân tích bài toán này. Vấn đề mấu chốt là chàng cầm mang theo chuỗi tiền nhưng mua được bao nhiêu lạng thịt?

Điều cần phải biết là giá mỗi lạng thịt  $u$  tiền, chàng cầm có  $v$  tiền và nếu  $x$  là số lạng thịt mua được thì:

$$ux - v = 0$$

$$\text{và} \quad x = \frac{v}{u}$$

Vấn đề rắc rối người ta không biết  $u$  và  $v$ . Vì vậy qua hàng nghìn năm người xưa đã phải dùng 2 phép thử. Lần thứ nhất giả thiết là dùng số tiền này để mua 16 lạng thịt, thì chàng cầm không đủ tiền, lần thứ hai giả thiết mua 9 lạng thì lại thừa tiền.

Theo điều kiện đề toán là:

$$v = 16u - 40 \quad (1)$$

$$v = 9u + 16 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$7u = 56.$$

và  $u = 8$  thay vào (2) ta có:  $v = 88$ .

$$\text{và } x = \frac{88}{8} = 11 \text{ lạng.}$$

Như vậy ta tính được trong tay chàng câm có 88 tiền và mỗi lạng thịt giá 8 tiền mà số tiền đó mua được 11 lạng thịt.

Ngày nay nếu ta nghiên cứu lại bài toán “thừa thiếu” trong Sách toán chín chương, ta có thể tìm được phương pháp giải sau đây: Giả sử số giả thiết ban đầu là  $a_1$  giả thiết lần 2 là  $a_2$  thì số thừa và thiếu là  $b_1$  và  $b_2$  (thừa nếu  $b_1, b_2 > 0$ ), còn thiếu nếu như  $b_1, b_2 < 0$ ).

$$\text{Thế thì} \quad v = a_1 u - b_1 \quad (1)$$

$$v = a_2 u - b_2 \quad (2)$$

Lấy (1) - (2) ta có:

$$u(a_1 - a_2) = b_1 - b_2.$$

$$u = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$$

Đồng thời ta tính được:

$$v = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 - a_2}$$

$$x = \frac{v}{u} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - b_2}$$

Trong *Sách toán chín chương* số người là  $u$ , số vật là  $v$ , số người góp tiền là  $x$ .

Dùng công thức vừa tìm được ta tính được số người là 7, và món hàng giá 53 tiền.

Tìm được cách giải bài toán này ta dễ dàng tìm được các bài toán thừa thiếu tương tự. Đó là thành tựu xuất sắc về số học của Trung Quốc thời cổ đại. Phải hơn 1000 năm sau trong các sách toán của các học giả Ả Rập mới xuất hiện bài toán thừa thiếu, trong sách gọi cách này là “Phép toán Khiết Đan”, vào thời đó người Ả Rập gọi Trung Quốc là Khiết Đan.

Ở châu Âu vào thời trung cổ để giải bài toán  $px - q = 0$  có lúc người ta đã đưa ra “giả thiết kép”. Vào thời đó đại số học còn chưa phát triển, giả thiết kép là phép giải bài toán chủ yếu ở châu Âu thời trung cổ, mà phương pháp giả thiết kép có nguồn gốc từ phép toán thừa thiếu thời cổ đại.

## Bài toán chia dầu có gì giống với quả bi-a trên bàn?

Chia dầu là bài toán làm người ta đau đầu nhức óc. Giả sử có một bình đựng dầu đựng 12 lít dầu, yêu cầu bạn chia lượng dầu này thành hai phần, mỗi phần 6 lít. Nếu trong tay bạn mà có cân, bạn thực hiện phép cân thì bài toán trở nên dễ dàng. Thế nhưng quy tắc đặt ra cho bài toán lại làm cho bạn đau đầu là không được dùng cân để cân, cũng không phép dùng các dụng cụ đo thể tích có chia độ, mà yêu cầu bạn chỉ với 2 hoặc 3 cái bình có quy cách xác định, bạn phải đổ san qua rót lại thế nào để có thể chia dầu được làm đôi.

Trước hết xin giới thiệu các bạn một bài toán cổ để các bạn tìm cách giải.

Có một cái bình chứa đầy 10 lít nước, ngoài ra còn có 2 cái bình khác, một cái chứa vừa đúng 3 lít, một cái khác chứa vừa đủ 7 lít. Bạn hãy tìm cách chia bình nước 10 lít thành hai phần mỗi phần 5 lít chỉ dùng 3 cái bình đó. Bằng cách đổ qua đổ lại nước từ bình này sang bình khác với số lần san qua rót lại càng ít càng tốt.

Phương án tốt nhất là phải san rót đến 9 lần. Bài toán cung cấp 3 chỉ tiêu đúng lượng 10 lít, 7 lít và 3 lít. Để có thể giảm số lần đổ qua đổ lại đến ít nhất, cần phải suy nghĩ để tìm lối ra cho giải pháp. Bởi vì đã có một bình 3 lít nên bước đi còn lại làm thế nào tính riêng ra được một lượng 2 lít, sau đó nhờ bước đi  $3 + 2 = 5$  là có thể chia 10 lít thành ra hai phần đều nhau, mỗi phần có 5 lít. Như vậy bước đi đầu tiên phải làm thế nào tính ra được 2 lít. Biện pháp tốt nhất là nhờ vào bước  $9 - 7 = 2$  mà 9 là do  $3 + 3 + 3$  mà có.

|          |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bình 10l | 10 | 3 | 3 | 6 | 9 | 9 | 2 | 2 | 5 |
| Bình 7l  | 0  | 7 | 4 | 4 | 1 | 1 | 0 | 7 | 5 |
| Bình 3l  | 0  | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | 3 | 0 |

Qua cách phân tích vừa nêu là tìm đến giải pháp sau đây. Mũi tên trong hình 43 là kết quả của một cách suy nghĩ tinh tại.

Mũi tên đầu tiên trên đường lẫn biểu diễn từ bình 10 lít đổ qua bình 7 lít, trong bình 10 lít đổ qua bình 7 lít, trong bình 10 lít còn lại 3 lít nước tức là từ  $(10,0,0) \rightarrow (3,7,0)$ ; sau đó là  $(3, 7, 0) \rightarrow (3, 4, 3) \rightarrow$

Quá trình này hoàn toàn phù hợp với sơ đồ đã biểu diễn ở trang trước. Sơ đồ này là một gợi ý cho ta cách giải bài toán chia dầu nói chung. Trước hết hãy vẽ nên một hình chữ nhật nằm nghiêng, sau đó trên “bàn bi-a” này vạch các đường lăn của quả bi-a dựa vào con đường lăn của quả bi-a ta có thể tìm thấy cách đổ qua đổ lại giữa các bình.

Có một bình lớn đựng vừa đầy 12 lít nước. Ngoài ra còn có 2 bình khác, một bình được 7 lít nước và một bình được 5 lít. Hãy dùng các bình để chia 12 lít nước thành mỗi phần có 6 lít.

Bạn muốn biết một ngày quan trọng nào đó trong quá khứ hay tương lai là ngày thứ mấy không? Xin giới thiệu với các bạn một cách tính mà không cần dùng đến lịch. Cách tính này dựa vào nguyên lý của cách tính lịch mà tính ra.

$$S = X - 1 + \left\lceil \frac{X-1}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{X-1}{100} \right\rceil + \left\lceil \frac{X-1}{400} \right\rceil + C$$

Ví dụ cần tính xem ngày tết Nguyên đán vào năm 2001 là ngày thứ mấy? Trước hết ta tính S:

$$\text{Mà } \frac{2486}{7} = 355 \dots 1$$

0: Ngày chủ nhật

1: Ngày thứ hai

2: Ngày thứ ba

3: Ngày thứ tư

4: Ngày thứ 5

5: Ngày thứ sáu

6: Ngày thứ 7.



Tóm lại nếu số viên đá là bội số của 6 cộng 1 người đi sau sẽ áp đảo (hậu phát chế nhân) và nhất định thắng. Dùng phương pháp “gộp 6” thì người đi trước sẽ “tiên phát chế nhân” (chơi trước sẽ áp đảo) cứ gộp trọn 6 viên, 6 viên cuối cùng sẽ còn thừa 1 viên để lại cho người chơi trước.

Nếu lấy nguyên tắc chia 6 dư 1 thì người chơi sẽ thắng cuộc. Ví dụ có 40 viên đá đem chia cho 6 dư 4, người chơi trước sẽ lấy 3 viên còn 37 viên, đem chia 6 dư 1 để cho người chơi sau. Như thế thì bất luận người sau lấy như thế nào thì người đi trước vẫn dùng nguyên tắc gộp 6 để dành phần thắng.

Nếu đổi quy tắc chơi, giả sử chọn cách chơi mỗi lần lấy tối đa là 8 viên hoặc 4 viên thì cách chơi sẽ như thế nào để thủ thắng. Chúng ta sẽ theo cách thức như vừa trình bày ở trên mà vạch đường lối. Giả sử quy tắc chơi bây giờ tối đa lấy không quá 7 viên đá, thì thay vì cho cách gộp 6 lại gộp 8. Nếu số viên đá chia cho 8 dư 1 thì người chơi trước sẽ thua, còn các trường hợp khác người chơi trước nhất định thắng.

Đương nhiên trong quá trình chơi chớ để lấy nhầm số các viên đá, nếu lấy nhầm mà đối phương phát hiện được thì lập tức sẽ chuyển từ thế chủ động sang thế bị động.

Đó là cách chơi đơn giản nhất trong các trò chơi cờ đá. Bí mật trò chơi đã bị lộ thì trò chơi trở nên vô vị nên đổi cách chơi.

Dưới đây chúng tôi xin giới thiệu với các bạn một cách chơi khác.

Còn có một loại trò chơi cờ đá khác cũng khá đơn giản, thế nhưng cách chơi tất thắng lại khá khó phát hiện.

Số viên đá được chia thành nhiều đồng, 3 đồng, 5 đồng, 8 đồng... Số viên đá trong mỗi đồng có thể nhiều ít khác nhau. Quy tắc lấy các viên đá cũng đơn giản, ít nhất phải lấy 1 viên đá và tối đa không hạn chế, nhưng mỗi lần bốc chỉ lấy các viên đá từ 1 đồng đá, bạn có thể trong 1 lần lấy tất cả số đá trong 1 đồng nhưng không thể cùng một lúc lấy các viên đá từ hai đồng khác nhau. Ai lấy viên đá cuối cùng, kẻ ấy bị thua cuộc. Bạn hãy tìm một bạn chọn và chơi theo quy tắc đó mười ván, bạn sẽ thấy việc tìm đường lối chơi tất thắng là khá phức tạp.

Thế nhưng cũng có hai loại tình huống đơn giản.

Tình huống thứ nhất giả sử số viên đá trong mỗi đồng là 1. Nếu số đồng (cũng là số viên đá) là lẻ thì người chơi trước sẽ thua. Nếu số đồng là chẵn thì người chơi trước sẽ thắng.

Một tình hình khác là số đồng là 2, nhưng số viên đá ít nhất là 3 viên. Nếu số viên đá trong mỗi đồng như nhau, người chơi trước thua, nếu số viên đá trong mỗi đồng khác nhau, người chơi trước thắng. Biện pháp chơi là nếu như có 1 đồng chỉ có 1 viên thì người chơi trước sẽ tóm trọn cả đồng kia, còn đồng chỉ có 1 viên dành cho người chơi sau. Nếu như mỗi đồng chứa ít nhất hai viên thì lấy phần hơn trong đồng lớn, để cho hai đồng có số viên đá như nhau. Khi đối phương lấy đá thì số đá hai đồng sẽ khác nhau. Cứ thế tiếp tục thì số viên đá ngày càng ít, đến khi một đồng chỉ còn 1 viên thì bạn tóm trọn đồng kia còn 1 viên dành cho người chơi sau.

Trên đây là vài tình huống riêng, thế thì trong trường hợp chung thì sẽ ra sao?

Ở đây phải sử dụng đến phép nhị tiến.

Ta biết rằng mỗi số tự nhiên đều có thể biểu diễn bằng tổng của các số của lũy thừa của 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 (người ta gọi đó là các số cơ bản)... ví dụ:

$$100 = 64 + 32 + 4 \quad 7 = 4 + 2 + 1$$

$$57 = 32 + 16 + 8 + 1 \quad 13 = 8 + 4 + 1, \text{ v.v...}$$

Khi chơi cờ đá bạn hãy dự tính thế nào để khi lấy số các viên đá đi hình thành nên tình huống này.

Sau đó xét xem các số cơ bản 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 trong cách biểu diễn các tình huống xuất hiện bao nhiêu lần. Giả sử nếu số viên đá tập trung thành 4 nhóm, số các viên đá tương ứng ở mỗi nhóm là 100, 57, 13, 7; từ các tình huống đã nêu ở trên ta thấy:

Số 64 xuất hiện 1 lần, số 32 xuất hiện 2 lần, số 16 xuất hiện 1 lần, số 8 xuất hiện 2 lần, 4 xuất hiện 3 lần, số 1 xuất hiện 3 lần, số 2 xuất hiện 1 lần. Như vậy các số 1, 2, 4, 16, 64 xuất hiện số lẻ lần.

Còn các số 8, 32 xuất hiện số chẵn lần, khi lấy các viên đá bạn phải nắm chắc một then chốt: phải làm thế nào các số cơ bản xuất hiện chẵn lần. Điều đó hoàn toàn có thể thực hiện được. Số cơ bản lớn nhất trong dãy số 100 là 64, chỉ cần ta lấy từ 100 viên đá số viên đá thế nào để còn lại  $1 + 2 + 16 + 32 = 51$  là được.

Sau khi đối phương lấy đá, trạng thái “số cơ bản” xuất hiện chẵn lần có thể bị mất. Bạn phải tìm cách lập lại trạng thái “số căn bản” xuất hiện chẵn lần. Qua mỗi lần lấy đá, số viên đá ngày càng ít dần, cuối cùng sẽ đến lúc mà bạn gặp một trong hai tình huống sau đây:

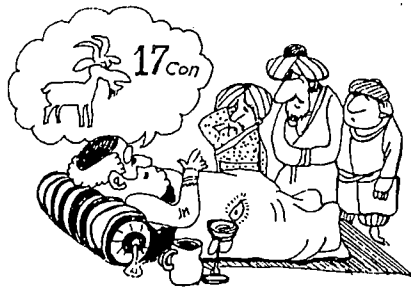
a) Ngoại trừ một nhóm, số các viên đá ở các nhóm còn lại đều bằng 1. Bạn hãy tóm gọn số viên đá ở nhóm có nhiều viên đá hoặc lấy ra chỉ để còn lại 1 viên đá. Vì số nhóm các viên đá là lẻ nên bạn sẽ nhất định thắng.

b) Chỉ còn có 2 nhóm, số viên đá ở các nhóm khác nhau như đã phân tích ở trên, ở tình huống này bạn có thể nhanh chóng chọn được phương án để thắng cuộc.

Vì sao đang ở trạng thái “số cơ bản” xuất hiện chẵn lần, dù chỉ lấy đá bằng phương án nào thì trạng thái này cũng bị phá vỡ? Vì sao sau khi trạng thái này bị phá vỡ bạn có thể chọn cách lấy đá để trạng thái nêu trên nhất định được thiết lập lại? Về vấn đề này mời các bạn suy nghĩ thêm.

Thêm một bước nữa. Nếu cho phép mỗi lần có thể lấy các viên đá từ hai nhóm thì làm thế nào để thắng cuộc?

## Chia dê như vậy có hợp lý không?



Chuyện ba người con chia dê xuất hiện sớm nhất ở các nước Ả Rập, sau đó lưu truyền đến các nơi khác trên thế giới, và trở thành một bài toán lý thú.

Truyền rằng một nông dân sinh được ba người con trai, lúc lâm chung người cha trối lại rằng: “Sau khi ta mất đi, ta lại 17 con dê, ta dành  $\frac{1}{2}$  cho con cả,

$\frac{1}{3}$  cho con thứ và  $\frac{1}{9}$  số dê cho con út, các con phải chia thế nào cho các con dê đều là dê sống, cũng không được bán để chia tiền, cũng không được giết thịt để chia thịt”.

Sau khi người cha qua đời, các con đem chia số dê theo lời trăng trối của cha. Họ đã tìm hết cách tính đi tính lại và đều không thấy lối thoát. Vì theo lời trăng trối khi cậu cả được một nửa số dê, tức là  $\frac{1}{2}$  của 17 con dê là 8 con dê rưỡi, vậy làm thế nào chia được mà vẫn giữ đúng lời trăng trối

của cha? Với người con thứ ba và con út cũng gặp phải khó khăn tương tự. Vì 17 chia ba, 17 chia 9 đều là các số lẻ. Vậy phải chia theo cách nào đây?

Ba người con thực thà chưa biết làm cách nào để chia dê theo đúng được lời trăng trối của cha, thì có một cụ già láng giềng dẫn bảy dê đi qua, cụ già cười hà hà và nói: “Ta cho các cháu mượn 1 con dê như thế sẽ tất cả là 18 con, 18 chia đôi là 9 con, chia ba là 6 con, chia 9 là 2 con”. Ba người con mừng rỡ nhận phần dê được chia lùa đi, còn 1 con dê thừa lại trả lại ông cụ láng giềng thông minh và tốt bụng.

Dù rằng cụ già đã giúp 3 người con chia được số dê nhưng liệu cách chia này có đúng đắn không? Nếu án theo con số thì rõ ràng có sai sót tại sao 17 chia đôi lại được 9 con?

Chúng ta đều biết muốn chia tròn ta phải dùng phép nhân cho phân số và các phân số phải bằng 1. Thế mà theo cách chia thì tổng các phần ứng với mỗi người là:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$  không bằng 1.

Nếu dùng phép chia phân số ta sẽ thu được số đầu dê là thập phân vô hạn tuần hoàn.

Thực ra ta có thể biểu diễn các phần chia được của mỗi người theo tỷ lệ, tức là  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ . Đây là bài toán theo kiểu tỷ lệ thức, ta phải dùng cách chia theo bài toán tỷ lệ mới đúng. Nếu gọi số đầu dê của người con cả là x thì:  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) : \frac{1}{2} = 17 : x$  từ đó tính được  $x = 9$ .

Cũng theo cách này ta có thể chia được số đầu dê của người con thứ và người con út tương ứng là 6 và 2. Kết quả tính toán chứng minh cách giải quyết của cụ già láng giềng thông minh là hoàn toàn chính xác.

Thế tại sao cụ già láng giềng không dùng phương pháp tỷ lệ mà lại dùng phương pháp phân số? Lý do là do cụ già thông minh đã thấy rõ là tổng tỷ lệ chia của 3 người con là  $\frac{17}{18}$  nếu chỉ thêm vào  $\frac{1}{18}$  thì sẽ thu được số nguyên là “1”  $\left(\frac{17}{18} + \frac{1}{18} = 1\right)$

Do đó cụ già cho mượn 1 con dê tức là thêm vào  $\frac{1}{18}$ .

Làm như vậy trên thực tế đã ngầm thay đổi đề toán từ bài toán tỷ lệ thành bài toán phân số. Thay đổi đầu bài thành: có 18 con dê được chia theo tỷ lệ  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}$  và  $\frac{1}{18}$  hỏi mỗi phần được mấy con dê?

Nếu cụ già láng giềng không dùng cách cho mượn đầu dê mà muốn dùng phương pháp phân số để chia, trước hết cần phải tính xem số dê là bao nhiêu để biến đổi có được là số nguyên:

$$17: \frac{17}{18} = 18$$

Chỉ khi biết được số dê là 18 thì mới có thể dùng phương pháp phân số để phân chia.

Từ câu chuyện trên đây ta có thể thấy để giải một bài toán cần phải đọc kỹ để hiểu rõ ý của đề, sau đó mới có thể xem xét có thể giải bài toán theo phương pháp nào?

Câu chuyện này lưu truyền rộng rãi, sau đó có thay đổi nhiều về con số. Ta chú ý rằng tổng  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$  không bằng 1 mà bằng  $\frac{1}{12}$  mà 12 là bội số chung nhỏ nhất của 2, 4 và 6. Do đó bài toán biến thành: Cụ già sau khi chết để lại 11 con dê, người con cả được chia  $\frac{1}{2}$ , con thứ được chia  $\frac{1}{4}$ , còn người con út được chia  $\frac{1}{6}$  số dê, vậy phải chia như thế nào?

Như vậy người ta tự hỏi nếu vẫn giữ hình thức của câu chuyện cổ: Ba người con mượn 1 con đầu dê sau khi chia xong trả về chủ cũ. Đó là tình tiết khéo léo của câu chuyện và như vậy liệu có bao nhiêu cách biến đổi?

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}$$

Giả sử  $X < Y < Z$  và  $n+1$  là bội số chung nhỏ nhất của các số  $X, Y, Z$ .

Lúc đầu người ta cho rằng số nghiệm của phương trình này là vô hạn. Thế nhưng nếu nghiên cứu kỹ thì chỉ có 7 số thoả mãn được  $X, Y, Z$  tương ứng (xem ở bảng dưới), số đầu dê ít nhất là 7 và nhiều nhất là 41, khác đi thì bài toán không giải được.

Tổng số dê (hay trâu, ngựa...)

7 11 11 17 19 23 41

Tỷ lệ chia cho người con cả (phân số)  $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

Tỷ lệ chia cho con thứ  $\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$

Tỷ lệ chia cho con út  $\frac{1}{8} \frac{1}{6} \frac{1}{12} \frac{1}{9} \frac{1}{5} \frac{1}{8} \frac{1}{7}$

Điều đáng chú ý từ bảng cho trên đây thì chỉ với 11 là có hai cách giải và có hai tỷ lệ chia khác nhau. Theo cách chia theo tỷ lệ  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$  người con út chỉ được 1 con dê so với người anh cả chắc không chọn phương án chia này.

## Bảng đoán tuổi được tính như thế nào?

Đây là một bảng đoán tuổi nhỏ, trong bảng có 4 bảng số dành cho đoán tuổi. Dùng bảng này chỉ có thể đoán được cho các em nhỏ 15 tuổi trở xuống. Xét xem kỹ bảng đoán tuổi "nhỏ" này ta có thể biết cách tính toán bảng đoán tuổi.

| Biểu 1 | Biểu 2 | Biểu 3 | Biểu 4 |
|--------|--------|--------|--------|
| 1      | 2      | 4      | 8      |
| 3      | 3      | 5      | 9      |
| 5      | 6      | 6      | 10     |
| 7      | 7      | 7      | 11     |
| 9      | 10     | 12     | 12     |
| 11     | 11     | 13     | 13     |
| 13     | 14     | 14     | 14     |
| 15     | 15     | 15     | 15     |

Trước hết xin trình bày cách sử dụng các chữ số này để đoán tuổi. Giả sử chúng tôi muốn đoán tuổi của bạn, tôi yêu cầu bạn xem kỹ các biểu rồi báo cho chúng tôi biết số tuổi của bạn được ghi ở các biểu nào? Chúng tôi lập tức có thể nói được số tuổi của bạn. Thậm chí tôi có thể nhầm lẫn mà vẫn nói đúng được tuổi của bạn.

Ví dụ: Bạn nói ở biểu số 2 và số 4 có ghi tuổi của bạn, tôi biết được tuổi của bạn là 10. Còn nếu bạn nói tuổi của bạn có ghi ở bảng 1, bảng 3 và 4 thì tuổi của bạn sẽ là 13.

Làm thế nào mà chúng tôi đoán được chính xác như vậy?

Trước hết tôi cần nhớ các số đều ở các biểu ví dụ biểu số 1 là 1, biểu số 2 là 2, biểu số 3 là 4, biểu số 4 là 8. Chúng tôi không cần xem biểu; nếu bạn nói biểu số 1 và biểu số 3 và 4, chúng tôi nhớ các số ở đầu biểu và làm

phép tính  $1 + 4 + 8 = 13$ , phương pháp rất đơn giản nhưng không hề sai.

Rõ ràng là khi dự đoán tuổi là dùng phép cộng, thế thì khi tính toán để lập bảng ta phải dùng quá trình ngược lại là dùng phép trừ. Với mỗi số trước hết trừ 8, sau đến trừ 4, trừ 2, trừ 1 cho đến khi bằng không. Ví dụ nói dãy số:

$$15 - 8 - 4 - 2 - 1 = 0$$

$$14 - 8 - 4 - 2 = 0$$

$$13 - 8 - 4 - 1 = 0$$

...

$$7 - 4 - 2 - 1 = 0$$

$$6 - 4 - 2 = 0$$

Sau đó bắt đầu điền số vào các bảng theo nguyên tắc. Sau các số đầu dãy xuất hiện các số thứ tự nào thì được ghi vào bảng đó ví dụ sau số 15 có các số 8, 4, 2, 1 nên số 15 được ghi vào các bảng số có số 1, 2, 4, 8 ở đầu bảng: sau số 14 có các số 8, 4, 2 nên số 14 được ghi vào các bảng đoán tuổi. Các bạn có thể tự mình tính một bảng để thử đoán tuổi cho các bạn.

Trên đây cho một bảng đoán tuổi “nhỏ” sử dụng cho những ai có độ tuổi nhỏ hơn 15. Khi cần đoán cho những người có độ tuổi lớn hơn ví dụ có tuổi nhỏ hơn 31 tuổi thì phải tính thêm cột thứ 5, số đầu cột thứ 5 là 16. Cách điền số vào cột này cũng theo cùng cách tương tự là chỉ ghi chữ số nào ở dãy số có số 16.

Ví dụ: Với dãy số 23 - 16 - 4 - 2 - 1 thì số 23 được ghi vào các cột 5, cột 3, cột 2, cột 1.

Với những ai trong khoảng nhỏ hơn 63 tuổi thì thêm cột thứ 6, con số đầu cột thứ 6 là 32.

Nếu biểu diễn các số 1, 2, 4, 8, 16, 32 ở dạng số nhị phân ta sẽ có 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000.

Chữ số 15 biểu diễn ở dạng số nhị phân sẽ là 1111 giống như là  $1000 + 100 + 10 + 1$ , nhìn qua ta có thể biết các cách điền số vào các cột.

Thực tế là các cột số đều được biểu diễn theo phép đếm nhị phân. Ta thử biểu diễn một vài số theo phép đếm nhị phân:

23 sẽ được viết là 10111

33 sẽ được viết là 100001

62 sẽ được viết là 111110

Bây giờ chắc chắn bạn đã biết cách điền các số vào các cột.

## “Vấn đề 36 sĩ quan” là gì?

Vấn đề 36 sĩ quan bắt nguồn từ một truyền thuyết. Truyền kể rằng có lần một Quốc vương nước Phổ tiến hành một cuộc duyệt binh lớn, truyền lệnh cho 6 chi đội lính tham gia để duyệt binh. Quốc vương quy định mỗi chi đội phải chọn 6 sĩ quan có quân hàm khác nhau (ví dụ có thể chọn sĩ quan thượng tá, trung tá, thiếu tá và thượng uý, trung uý, thiếu uý). Vậy mỗi chi đội chọn quan xếp thành đội hình 6 hàng ngang và 6 hàng dọc, ở mỗi hàng ngang và hàng dọc các sĩ quan phải không cùng hàm và không cùng đơn vị. Viên quan điều hành bày đi, xếp lại vẫn không đạt được đội hình theo đúng yêu cầu của Quốc vương. Về sau câu chuyện lan truyền ra ngoài mọi người ai nấy cũng đều tìm các phương án sắp xếp đội hình nhưng rốt cuộc không ai thu được kết quả. Vấn đề này được gọi là “Vấn đề 36 sĩ quan” và lưu truyền rộng rãi. Vấn đề khó này đã thu hút nhiều tâm lực của nhiều nhà toán học nổi tiếng.

Người ta tìm thấy rằng nếu Quốc vương đề ra yêu cầu ít hơn một chút hoặc nhiều hơn một chút, ví như yêu cầu bày thành 5 hàng ngang 5 hàng dọc hoặc 7 hàng ngang 7 hàng dọc, thì có thể được nhưng với 6 hàng ngang 6 hàng dọc thì không thể được. Ta thử xét trường hợp xếp thành 7 hàng ngang 7 hàng dọc.

A, B, C, D, E, F, G biểu diễn các đơn vị bộ đội, các chỉ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 chỉ các cấp quân hàm của các sĩ quan. Ở mỗi hàng ngang, hàng dọc đều có 7 chữ cái A, B, C, D, E, F, G biểu diễn đó là các sĩ quan từ 7 đơn vị, các chỉ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 chỉ các cấp quân hàm của các cấp sĩ quan khác nhau.

|                |                |                |                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| A <sub>1</sub> | B <sub>3</sub> | C <sub>2</sub> | D <sub>5</sub> | E <sub>4</sub> | F <sub>7</sub> | G <sub>6</sub> |
| G <sub>3</sub> | A <sub>2</sub> | B <sub>1</sub> | C <sub>6</sub> | D <sub>7</sub> | E <sub>4</sub> | F <sub>5</sub> |
| F <sub>2</sub> | G <sub>1</sub> | A <sub>3</sub> | B <sub>7</sub> | C <sub>6</sub> | D <sub>5</sub> | E <sub>4</sub> |
| E <sub>5</sub> | F <sub>6</sub> | G <sub>1</sub> | A <sub>1</sub> | B <sub>1</sub> | C <sub>2</sub> | D <sub>3</sub> |
| D <sub>4</sub> | E <sub>7</sub> | F <sub>6</sub> | G <sub>1</sub> | A <sub>5</sub> | B <sub>3</sub> | C <sub>2</sub> |
| C <sub>7</sub> | D <sub>4</sub> | E <sub>5</sub> | F <sub>2</sub> | G <sub>3</sub> | A <sub>5</sub> | B <sub>1</sub> |
| B <sub>6</sub> | C <sub>5</sub> | D <sub>4</sub> | B <sub>3</sub> | F <sub>2</sub> | G <sub>1</sub> | A <sub>1</sub> |

Ngày nay bài toán 36 sĩ quan thuộc một bài toán của phép toán tổ hợp. Cách đội hình sắp xếp được gọi là các ma trận hoặc ma trận chữ nhật,



ví dụ cách xếp 6 hàng ngang, 6 hàng dọc gọi là ma trận vuông cấp sáu. Do từ ban đầu các yếu tố của ma trận đều biểu diễn nhờ các chữ cái La tinh A, B, C, D... nên các ma trận này thường được gọi là các ô vuông Latin. Bảng vuông Latin phù hợp với điều kiện trục giao gọi là "bảng vuông trục giao". Bài toán 36 sĩ quan thuộc loại bài toán của phép toán hợp của bảng vuông Latin trục giao. Nhà toán học kiệt xuất Euler đã chứng minh là ma trận vuông cấp sáu theo yêu cầu của Quốc vương Phổ là không thể được, kết luận này đã được nhà toán học Pháp Thali chứng minh vào năm 1901. Thế là bài toán 36 sĩ quan đã được giải quyết.

Điều đáng chú ý người ta chứng minh được rằng các ma trận cấp 3, cấp 4, cấp 5, cấp 7, cấp 9 có thể giải được. Ta thử xét ma trận cấp 4. Ta thử lấy các quân bài A, K, Q, J trong bộ bài lơ khơ xem A, K, Q, J là 4 quân hàm. Vì trong bộ bài lơ khơ ngoài số (xem như quân hàm) còn có hoa (4 hoa: rô, cơ, bích, nhép) nên có thể xem loại hoa của quân bài như là số chỉ đội khác nhau. Như vậy ta có 16 quân bài. Ta thử sắp xếp thành hai ma trận vuông sau đây:

|   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|--|
| A | K | Q | J |  |
| Q | J | A | K |  |
| J | Q | K | A |  |
| K | A | J | Q |  |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ♣ | ♠ | ♥ | ♦ |
| ♠ | ♣ | ♦ | ♥ |
| ♥ | ♦ | ♣ | ♠ |
| ♦ | ♥ | ♠ | ♣ |

Đó chính là các ma trận vuông Latin trục giao. Các ma trận này được ứng dụng rộng rãi trong công tác thiết kế, thí nghiệm. Trong công nghiệp, nông nghiệp, trong khoa học kỹ

thuật luôn cần phải tiến hành một số lớn việc sắp xếp tổ chức các tổ thực nghiệm. Việc sử dụng các bảng vuông Latin trong công tác thiết kế, thực nghiệm có thể giảm đi nhiều công sức trong việc sắp xếp, tiết kiệm được nhiều sức người sức của, tăng được hiệu quả công việc.

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| A ♣ | K ♠ | Q ♥ | 3 ♦ |
| Q ♠ | 3 ♣ | A ♦ | K ♥ |
| J ♥ | Q ♦ | K ♣ | A ♠ |
| K ♦ | A ♥ | J ♠ | Q ♣ |

## Vì sao từ một bức vẽ lại đặt ra một đẳng thức vô tận?

Một nhà phổ biến khoa học nổi tiếng của Liên Xô trước đây Belxoman đã kể một câu chuyện hết sức có ý nghĩa. Hoạ sĩ Beđinxki có vẽ bức tranh với tựa đề "Trí lực". Trong tranh có một tấm bảng đen, trên bảng có viết một đề toán:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

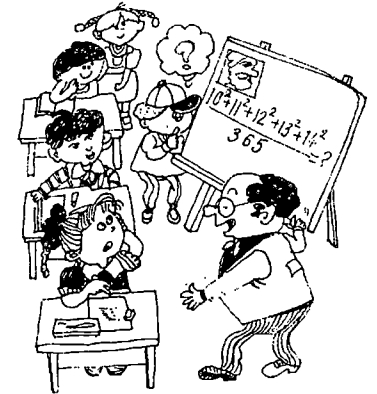
Ở phía dưới tấm bảng đen có nhiều học sinh, trong số đó có em đang gãi đầu, có em đang chăm chú làm tính trên giấy nháp.

Vì sao hoạ sĩ lại vẽ về đề tài này? Liệu có dụng ý đặc biệt không?

Thực ra ở bên góc tấm bảng đen có một khung ảnh có vẽ một chân dung nửa người có tên là Latinski. Latinski là một giáo sư. Ông rời bỏ chức vụ giáo sư và đời sống thị thành để về dạy dỗ con cái, các trẻ em mù chữ con nhà nghèo khó ở thôn quê, tình nguyện làm một giáo viên tiểu học không tiếng tăm ở nông thôn. Nhờ có các kiến thức toán học uyên bác, ông dạy các em nhỏ nhiều kiến thức bổ ích và lý thú. Bài toán ghi trên bảng là do ông đặt ra, mới xem thì có vẻ tầm thường, thế nhưng nếu ai chú ý thì sẽ thấy:  $13^2 = 169$ ,  $14^2 = 196$ ;  $169 + 196 = 365$ . Có thể nhanh chóng tìm ra một mối liên quan giữa các chữ số trong bài toán:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365.$$

Nhờ đó thật dễ dàng tìm lời giải cho đề toán "trí lực". Thật vậy sao? Chẳng phải là tử số của phân số gồm 2 tổng số, mỗi tổng là 365, nên có thể nhanh chóng tìm thấy đáp số bài toán là 2. Câu chuyện được lan truyền



rộng rãi trên thế giới. Tiến sĩ Cuchen người Mỹ rất khâm phục vị giáo sư tiểu học bỏ qua mọi danh lợi này. Ông không chỉ khâm phục phẩm chất của giáo sư mà còn tiếp nhận được kiến thức toán học sâu sắc của vị giáo sư đó. Ông suy nghĩ về việc liệu có thể mở rộng được đẳng thức vừa nêu không?

Tiến sĩ Cuchen là nhà số học, hiểu biết rộng về các tính chất kỳ diệu của các số tự nhiên, xem sự kiện này là rất lý thú. Phẩm chất không vì danh lợi của Latinski đã có sức lôi cuốn. Trải qua nhiều suy nghĩ, cuối cùng ông đã tìm thấy câu trả lời. Ông phát hiện: Đẳng thức trên chỉ là một đẳng thức vô tận và là ví dụ thứ hai trong vô số các đẳng thức tương tự. Ví dụ thứ nhất người ta đã biết từ lâu. Đó là các số "3, 4, 5" trong sách cổ: Đó chính là:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Trong đẳng thức trên có 3 số tự nhiên liên tiếp, về trái có 2 số, về phải có 1 chữ số. Trong biểu thức của họa sĩ có 5 số tự nhiên liên tiếp, về trái có 3 số về phải có 2 số. Cứ theo cách nghĩ đó nếu nêu lên được ví dụ thứ 3 thì sẽ có 7 số tự nhiên liên tiếp; với về trái có 4 số về phải có 3 số. Theo cách nghĩ đó ông phát hiện ra đẳng thức sau đây:

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

Phát hiện đó làm bản thân ông cũng hết sức kỳ lạ, giúp ông tiếp tục thừa thắng tiến lên, tiếp tục xem xét, cuối cùng tìm được quy luật thiết lập đẳng thức một cách vô tận. Nếu viết ra sẽ được một toà bảo tháp hết sức đẹp đẽ:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2.$$

Quy luật lập đẳng thức như sau: Nếu gọi số hạng ở về trái là  $x$  thì số số hạng ở về phải là  $(x+1)$ ; nhưng số tự nhiên liên tiếp ở giữa mới là vấn đề cốt lõi. Tiến sĩ Cuchen tìm thấy số tự nhiên đứng ở giữa phải là  $2x(x+1)$

Ví dụ:

Với  $x = 1$  thì  $2 \times (1+1) = 4$

Với  $x = 2$  thì  $2 \times 2 \times (2+1) = 12$

Với  $x = 3$  thì  $2 \times 3 \times (3+1) = 24$

Với  $x = 4$  thì  $2 \times 4 \times (4+1) = 40.$

Các bạn thử tiếp tục các đẳng thức tiếp theo.

Ví dụ, với  $x = 5$  thì  $2 \times (x + 1) = 10 \times 6 = 60$  và ta sẽ được một đẳng thức kỳ diệu là:

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2.$$

Bạn có thấy không, từ một bức tranh đã khêu gợi bao nhiêu là tri thức. Các kiến thức toán học được phát hiện từ những quy luật bình thường mà có.

## Thế nào là bài toán "nữ sinh Akhoman"?



Vào năm 1850 ở nước Anh có một vị linh mục quản lý giáo khu Akhoman đã đưa ra một bài toán khá lý thú.

Trong một ký túc xá nữ có 15 nữ sinh. Bà xơ trông coi hàng ngày dẫn các nữ sinh dạo chơi. Bà chia các học sinh làm 5 tổ, mỗi tổ có 3 nữ sinh theo bà đi dạo. Bà không muốn ngày nào cũng đi dạo với cùng một nhóm 3 nữ sinh cố định mà mỗi ngày với một tổ để cho mỗi nữ sinh trong suốt tuần lễ đều có cơ hội tiếp xúc với bà. Đó chính là bài toán "các nhà nữ sinh Akhoman".

Vào năm sau Akhoman đã công bố trên tạp chí một đáp án của ông về bài toán; trước hết ông đánh số các nữ sinh từ 1 đến 15, cách sắp xếp các đội trong một tuần sẽ như sau:

| Chủ nhật | Thứ hai | Thứ ba  | Thứ tư  | Thứ năm | Thứ sáu | Thứ bảy |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 2 3    | 1 4 5   | 1 6 7   | 1 8 9   | 1 10 11 | 1 12 13 | 1 14 15 |
| 4 8 12   | 2 8 10  | 2 9 11  | 2 12 14 | 2 13 15 | 2 4 6   | 2 5 7   |
| 5 10 15  | 3 13 14 | 3 12 15 | 3 5 6   | 3 4 7   | 3 9 10  | 3 8 11  |
| 6 11 13  | 6 9 15  | 4 10 14 | 4 11 15 | 5 9 12  | 5 11 14 | 5 9 13  |
| 7 9 14   | 7 11 12 | 5 8 13  | 7 10 13 | 6 8 14  | 7 8 15  | 6 10 12 |

Thế nhưng với các nhà toán học thì đáp án này chưa đủ. Họ đặt ra câu hỏi thế liệu còn có các đáp án khác nữa không, và liệu có cách giải tổng quát hơn không?

Cũng năm đó các nhà toán học Anh Twelweis và Kaisei đã thêm một bước vào bài toán này.

Liệu có thể vạch ra một cách sắp xếp trong vòng 13 tuần không chỉ trong mỗi tuần phù hợp với các quy định đặt ra trong bài toán ở trên mà còn phải làm thế nào cho mỗi học sinh trong vòng 13 tuần lại có thể quay về ở một tổ với cùng các học sinh trong một ngày trước đó trong chu trình này.

Bài toán đã hết sức khó, mãi đến năm 1979 mới được Danars giải được nhờ máy tính điện tử.

Akhoman chỉ đặt ra bài toán với 15 nữ sinh, nhưng các nhà toán học đã mở rộng đến 3k nữ học sinh và bài toán nữ sinh đã được mở rộng rất nhiều.

Lời giải tổng quát của bài toán được một sinh viên hệ toán trường đại học sư phạm Cát Lâm, Trung Quốc là Lục Gia Hy đưa ra năm 1961. Nhưng đáng tiếc cách giải vẫn chưa được công bố.

Vào năm 1971 một học giả người Italia là Scathari và Wilson một giáo sư toán học trường đại học Cachar đã công bố lời giải về bài toán Akhoman và giải quyết trọn vẹn bài toán này.

Vào năm 1981, Lục Gia Hy đã trở thành một nhà toán học xuất sắc nhưng vẫn để tâm nghiên cứu bài toán nữ sinh Akhoman. Việc giải bài toán nữ sinh Akhoman một cách cơ bản có liên quan với một bài toán phức tạp hơn là bài toán nhóm ba Stanay. Bài toán được công bố trên một tập sách có uy tín của toán học thế giới vào năm 1983: "Lý thuyết tổ hợp".

Nhưng bài toán nhóm ba Stanay lúc đó còn chưa được giải quyết trọn vẹn. Bài toán được nhà toán học Hà Lan là Thailins hoàn thành vào tháng 10 năm 1989.

Cần nói thêm rằng bài toán nữ sinh Akhoman không có lời giải duy nhất, mà có thể có nhiều lời giải khác nhau. Ví dụ:

| Chủ nhật | Thứ hai | Thứ ba | Thứ tư  | Thứ năm | Thứ sáu | Thứ bảy |
|----------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 1 2 5    | 1 3 9   | 1 4 15 | 1 8 10  | 1 6 11  | 17 7 14 | 1 12 13 |
| 3 14 15  | 2 8 15  | 2 9 11 | 2 13 14 | 2 7 12  | 2 4 10  | 2 3 6   |

|         |         |         |          |         |         |          |
|---------|---------|---------|----------|---------|---------|----------|
| 4 6 12  | 4 11 13 | 3 10 12 | 3 4 7    | 3 9 13  | 3 5 11  | 4 5 8    |
| 7 8 11  | 5 12 14 | 5 7 13  | 5 6 9    | 4 9 14  | 6 13 15 | 7 9 15   |
| 9 10 13 | 6 7 10  | 6 8 14  | 11 12 15 | 5 10 15 | 8 9 12  | 10 11 14 |

## Làm thế nào để đi vào mê cung?

Mê cung có một lịch sử khá lâu đời. Tên gọi mê cung thường để chỉ các lối đi có nhiều đường ngang, lối rẽ, chỗ ngoặt khiến người ta đã đi vào thì rất khó tìm được lối ra. Khởi thủy, mê cung có thể là các công sự phòng ngự có cấu trúc phức tạp khiến cho người ta đã lạc vào thì như đi vào đám sương mù. Trong truyện "Thuỷ Hử" có kể rằng tại Chúc Gia Trang có "bàn xà lộ" đường đi quanh co rắc rối, khắp nơi có nhiều ngõ ngách rất giống nhau, khó phân biệt được đâu là đầu, đâu là cuối; khiến cho các hảo hán Lương Sơn Bạc đi vào được mà không đi ra được, đó chính là một mê cung.

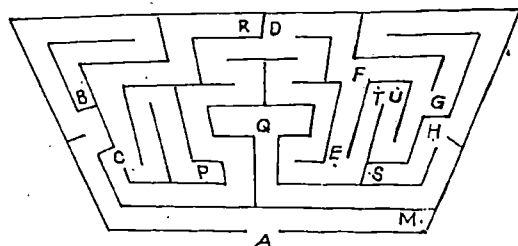
Trong thần thoại Hy Lạp cũng có một câu chuyện kể về mê cung. Chuyện kể rằng tại miền Gret thuộc cổ Hy Lạp có một toà mê cung. Trong mê cung có một quái vật nửa người nửa bò. Quái vật đòi các cư dân quanh vùng cứ ba năm một lần phải hiến tế một đồng nam một đồng nữ. Erest con của quốc vương Thuy Điển là một anh hùng chém yêu trừ quái, tự nguyện giả làm đồng nam để vào mê cung giết chết quái vật. Đó là một công việc thực sự nguy hiểm, bởi vì cho dù khi đã giết được quái vật cũng khó có khả năng thoát khỏi được mê cung. Một thiếu nữ là nàng Ariana rất thông minh, vốn rất yêu Erest, nàng liền đưa cho Erest một cuộn chỉ. Nhờ đó khi Erest vào mê cung vẫn còn có một dây liên lạc, để sau khi giết được quái vật sẽ theo sợi dây mà an toàn ra khỏi mê cung. Sau này xuất hiện thành ngữ "cuộn chỉ Ariana" là bắt nguồn từ câu chuyện đó. Ý nghĩa của thành ngữ biểu thị một cách ghi nhớ đường hoặc chỉ một biện pháp thoát hiểm.

Về sau mê cung trở thành một trò giải trí cho khách du ngoạn. Ở Pháp trong công viên Versailles có một mê cung. Ở Trung Quốc trong công viên Viên Minh cũng có một mê cung.

Ngày nay mê cung trở thành một loại toán học “giải trí”. Chúng tôi muốn nói đến loại mê cung vẽ trên giấy để cho bạn đọc tự tìm lối ra, để đọc giả từ một trò chơi mà mở mang được trí lực.

Ở hình dưới có vẽ một mê cung.

Vấn đề đặt ra là làm thế nào từ lối vào A lại đến được trung tâm B, hoặc làm thế nào để từ trung tâm B lại ra được cửa vào A. Để tìm được đường đi, người ta hay từ trung tâm tìm đường ra cửa, vì từ trung tâm B đi ra thì lối rẽ tương đối ít hơn khi đi vào, nên đi từ trong ra có thể dễ tìm lối thông đối với các mê cung rắc rối.



Hai điều tối kỵ khi đi vào mê cung là: 1) đi vào chỗ cùng đường; 2) đi vào lối quẩn tức là vòng qua vòng lại, lại trở về lối cũ. Để rõ hơn, chúng tôi đánh dấu các chỗ cùng đường hoặc lối rẽ bằng một dấu chấm như ở hình vẽ.

Các bạn có thể nhớ quy tắc sau đây thì có thể đi vào được mê cung:

- 1) Khi gặp đường cùng thì quay ngược trở lại.
- 2) Gặp lối rẽ nên chọn rẽ phải.

Từ hình 59 có thể thấy BR là chỗ đường cùng, khi chạm đến các điểm đó thì phải quay ngược trở lại. Từ điểm R đến điểm B ta có thể thấy C lối ra.

Trên hình 59, 3 điểm D, E, F tạo thành một tam giác, đó có thể là lối quẩn. Nếu xuất phát từ điểm D thì sẽ đến điểm E rồi đến điểm F rồi lại quay trở về điểm D. Gặp trường hợp này phải dựa vào nguyên tắc rẽ phải. Theo hình vẽ nếu theo nguyên tắc “rẽ phải” thì nếu xuất phát từ điểm D bắt phải đến điểm E sẽ chạm vào ngõ cụt tại T; quay đầu trở lại sẽ từ T quay về E. Tiếp tục theo quy tắc rẽ phải ta đến điểm F. Từ F theo lối rẽ phải lại đến điểm G. Bằng cách đó ta sẽ không theo lối quẩn lại quay về D.

Theo hai quy tắc trên đây các bạn sẽ đi thông suốt được mê cung. Thế nhưng chắc cũng không tránh khỏi có lúc không thoát ra khỏi các lối rẽ. Khi quan sát trực tiếp trên giấy bạn sẽ tìm cách đi được trong mê cung. Khi sử dụng linh hoạt các quy tắc chung chắc chắn bạn sẽ đạt được thành công.

## Cần bao nhiêu năm để chuyển được 64 chiếc vòng vàng?

Tại thánh miếu Benarena miền Bắc Ấn Độ có để một tấm bảng bằng đồng, trên tấm bảng đồng có gắn 3 cây kim bằng đá quý.

Theo truyền thuyết của đạo Balamôn thì Brahma một trong ba vị chúa thần, là thần sáng tạo thế giới. Vào lúc thần Brahma sáng tạo thế giới thì đã có tấm bảng đồng, trên một cây kim đá quý có xếp 64 chiếc vòng vàng. Các vòng vàng được sắp xếp theo thứ tự vòng lớn xếp ở dưới, các vòng ở phía trên càng ở trên cao càng nhỏ dần, tạo nên một hình tháp (được gọi là tháp Phạn). Về sau, bất kể ngày đêm, luôn có vị tu sĩ, theo quy định của thần Brahma chuyển các vòng vàng từ cây kim đá quý này sang cây kim đá quý khác. Quy tắc di chuyển khá đơn giản: mỗi lần chỉ được chuyển đi một vòng, khi di chuyển chỉ được phép đặt vòng nhỏ lên trên vòng lớn và cấm làm ngược lại. Mục tiêu cuối cùng là làm thế nào chuyển được tất cả số vòng từ một cọc này sang cọc khác.

Các tu sĩ kế tiếp nhau từ đời này sang đời khác nhưng vẫn chưa chuyển được tất cả số vòng sang một cọc khác. Theo truyền thuyết, khi làm được điều đó thì toàn thế giới sẽ bị biến đi.

Chúng ta sẽ không quan tâm đến ý nghĩa của truyền thuyết tôn giáo này, nhưng nếu đặt thành một bài toán để giải thì sẽ là vấn đề lý thú.

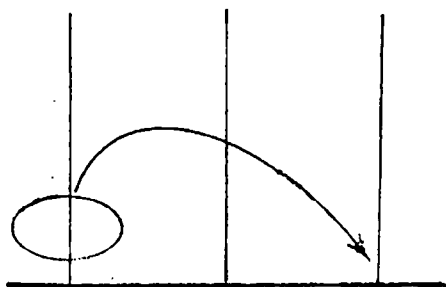
Bài toán dù phức tạp đến đâu, nếu xuất phát từ đầu bài, đi từ đơn giản đến phức tạp thì sẽ tìm được quy luật giải.

Ta sẽ giải bài toán theo quy tắc đó.

1. Trước hết xét trường hợp cần chuyển 1 vòng từ cọc này sang cọc khác, ta chỉ cần một lần chuyển là xong.

2. Khi cần chuyển 2 vòng từ cọc này sang cọc khác, cần phải thực hiện ba lần chuyển.

3. Khi cần chuyển 3 vòng: ta cần thực hiện theo 3 giai đoạn: Giai đoạn 1, chuyển hai vòng nhỏ nhất ở trên cùng đến hai cọc, giai đoạn 2: chuyển



vòng lớn nhất sang một cọc khác. Giai đoạn hai chuyển hai vòng từ hai cọc kia đặt lên vòng lớn nhất theo thứ tự từ lớn đến nhỏ. Như vậy để dời được 3 vòng ta phải thực hiện là  $3 + 1 + 3 = 7$  lần.

4. Dời 4 vòng: để chuyển được 4 vòng ta cũng phải chia làm 3 giai

đoạn: giai đoạn 1 chuyển 3 vòng nhỏ hơn ở phía trên, giai đoạn 2 chuyển vòng lớn nhất sang cọc khác; giai đoạn 3 lại chuyển 3 vòng nhỏ từ các cọc khác về đặt lên trên vòng lớn nhất theo thứ tự từ lớn đến nhỏ. Như vậy số lần thao tác phải làm là:  $7 + 1 + 7 = 15$ .

Từ dãy số 1, 3, 7, 15 ta tìm thấy quy luật biến hoá của dãy số:

$$1 = 2^1 - 1$$

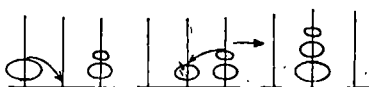
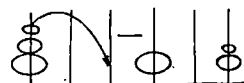
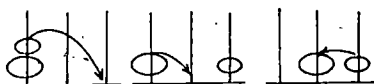
$$3 = 2^2 - 1$$

$$7 = 2^3 - 1$$

$$15 = 2^4 - 1.$$

Như vậy nếu cần chuyển  $n$  vòng ta cần phải thực hiện  $2^n - 1$  lần di chuyển. Dùng phương pháp quy nạp ta có thể chứng minh được quy luật vừa nêu là đúng. Sau khi đã chứng minh được tính đúng đắn của quy luật ta có thể tính được khi cần chuyển hết 64 vòng cần phải bao nhiêu lần thao tác. Dùng máy tính điện tử người ta tính được.

$$2^n - 1 = 18.446.744.073.709.531.615.$$



Đây là một chữ số có 20 con số, là một con số lớn khó tưởng tượng. Nếu các tu sĩ thay phiên nhau di chuyển không kể thời gian ăn uống và cứ mỗi lần chuyển xem như tốn hết 1 giây thì cần đến 58 nghìn tỉ năm. Tính từ lúc hệ Mặt trời ra đời cho đến nay thì được khoảng 5 tỷ năm, tính thế thì thấy hệ thống Mặt trời có thể tồn tại lâu đến bao nhiêu chỉ ít ước tính cũng 100 tỉ năm.

Như vậy giả sử 100 tỉ năm sau mà hệ Mặt Trời bị tiêu diệt thì 64 vòng trên chiếc cọc vẫn chưa chuyển xong! Tính ra như vậy mới thấy việc thế giới tan biến sau một tiếng nổ quả là khó vậy.

## Trong một năm, một đôi thỏ đẻ được bao nhiêu đôi thỏ con?

Vào năm 1202, một thương nhân ở thành phố Pisa thuộc Italia tên là Lutonay (biệt danh là Fibonaxi), ông có viết quyển sách "Bàn tính", trong sách có đặt một bài toán lý thú sau đây:

Để biết trong một năm một đôi thỏ bố mẹ sinh được bao nhiêu đôi thỏ con, người ta làm rào vây, nhốt một đôi thỏ vào đó. Biết rằng khi thỏ được sinh ra thì sau 2 tháng đã có khả năng sinh đẻ. Và lại một đôi thỏ có thể mỗi tháng đẻ một lần, mỗi lần sinh được một đôi thỏ con (một con đực, một con cái), đó là đôi thỏ sơ sinh. Vậy sau một năm có bao nhiêu đôi thỏ?

Ta hãy làm một phép phân tích:

Tháng thứ nhất, có một đôi thỏ con;

Tháng thứ hai, đôi thỏ vừa sinh chưa có khả năng sinh đẻ, đôi thỏ bố mẹ sẽ thai nghén một đôi thỏ;

Tháng thứ ba, đôi thỏ nhỏ đã trưởng thành, sẽ sinh ra một đôi thỏ con, bấy giờ ta có hai đôi thỏ con.

Tháng thứ tư, thỏ bố mẹ đầu tiên sẽ sinh một đôi thỏ con, còn đôi thỏ con vừa sinh tháng trước đã trưởng thành; bấy giờ ta có 3 đôi thỏ.

Tháng thứ năm, đôi thỏ bố mẹ ban đầu sinh một đôi thỏ con, đôi thỏ con sinh ở tháng thứ ba cũng đã trưởng thành, chúng lại sinh một đôi thỏ cháu, bấy giờ ta có 5 đôi thỏ;

Cứ tiếp tục phân tích như vậy ta sẽ có bảng liệt kê sau đây:

| Tháng thứ  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 6 7 8   | 9  | 10 | 11 | 12  | ... |
|------------|---|---|---|---|-----------|----|----|----|-----|-----|
| Số đôi thỏ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 8 13 14 | 34 | 55 | 89 | 144 | ... |

Ở hàng dưới của bảng ta thấy có dãy số: 1, 1, 2, 3, 5, 8... được gọi là "dãy số Fibônaxi" (người đời sau đặt tên để ghi nhớ công của ông).

Nếu chú ý một chút, bạn sẽ thấy: Trong dãy số này, kể từ số hạng thứ ba trở đi, thì mỗi số hạng đứng sau bằng tổng hai số hạng liền nhau đứng ngay trước đó. Ví dụ:

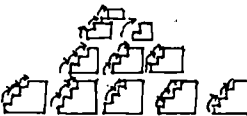
$$5 = 2 + 3; 8 = 5 + 3...; 55 = 21 + 34...$$

Nếu biểu diễn  $U_n$  là số hạng thứ  $n$  ta có:

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \text{ (với } n \geq 3)$$

Từ đề toán ta thấy: Nếu số đôi thỏ ở tháng thứ  $n$  là  $U_n$  ta có thể phân biệt số các đôi thỏ thành 2 loại: Số đôi thỏ  $U_{n-1}$  được sinh ra ở tháng thứ  $n-1$ , một loại thỏ được sinh ra ở tháng thứ  $n$  là  $U_{n-2}$  đôi (số đôi thỏ mới sinh ở tháng thứ  $n-2$  đến tháng thứ  $n$  đã có khả năng sinh đẻ).

Ngoài ra còn có một số trường hợp cũng có quy luật phát triển theo dãy số, ví dụ tính số bậc thang trên các tầng lầu:

| Số tầng lầu | Cách lên bậc thang                                                                 | Cách đánh số |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1           |  | 1            |
| 2           |                                                                                    | 2            |
| 3           |                                                                                    | 3            |
| 4           |                                                                                    | 5            |
| ...         |                                                                                    | ...          |

Nếu chấp nhận rằng nếu cứ mỗi tầng lầu được chia thành hai nhóm cấp, thì ở các tầng 1, 2, 3, 4... thì số cấp lên các tầng sẽ là 1, 2, 3, 5, 8...

Có khá nhiều hiện tượng có liên quan đến dãy số Fibônaxi (ví dụ số lá trên thực vật...)

Dãy số có nhiều ứng dụng quan trọng và lý thú như "phép tuyển chọn ưu tiên" trong "phép tính phân số" (còn gọi là phương pháp dãy số Fibônaxi) chính là dựa vào tính chất của dãy số Fibônaxi.

## Tăng 10% lại giảm 10% liệu có trở về nguyên con số cũ chẳng?

Có một thương nhân muốn thuê người làm để trông coi tiệm bán hàng. Người chủ bảo: "Tiền công của người mỗi tháng 250đ, nếu buôn có lời thì được tăng 40%. Nếu buôn lỗ sẽ giảm 40%. Nếu thoả thuận thì không được nuốt lời". Người làm suy nghĩ kỹ rồi ưng thuận. Sau một tháng kinh doanh có lãi, lương được tăng đến 350đ. Sau hai tháng chủ bảo tính toán và thấy bị lỗ, tính ra lương bị giảm chỉ còn 210đ. Người làm công cãi lại: Ông tăng lương mỗi tháng chỉ có 100đ, sau khi giảm lại giảm đến 140đ? Người chủ trả lời: Tháng trước lương của anh là 350đ, giảm đi 40% chẳng phải 210đ thì là bao nhiêu?

Người làm tính lại quả thấy như vậy nên chịu im tiếng. Tính đi tính lại chỉ giận mình chưa học phép tính phần trăm ở cấp tiểu học chưa tốt.

Khi tính các bài toán phân số, số phần trăm thường gặp số đơn vị "1" (hoặc còn gọi là số nguyên 1 đơn vị). Nếu không cẩn thận với số nguyên 1, dễ nhầm lẫn phép tính sẽ bị sai ngay. Ở bài toán trên người làm thuê đã không chú ý đến số nguyên này, anh ta chỉ chú ý đến lời nói tăng 40% và giảm 40% và cho rằng nếu tăng giảm với tỉ lệ như nhau thì số tiền công sẽ như nhau; trong khi đó người thương nhân lại rất láu cá. Khi nói tăng 40% thì đơn vị tăng là 250 tức là tiền công sẽ là:

$$250 \times (1 + 40\%) = 350.$$

Còn khi nói giảm thì đơn vị 1 ở đây đã biến đổi, vì sau khi tăng tiền công đã là 350đ thì khi giảm sẽ là:

$$350 \times (1 - 40\%) = 210.$$



Như vậy một tăng, một giảm theo tỉ lệ như nhau, kết quả khác nhau, mà không trở về con số cũ!

Như vậy ở đây vấn đề là ở con số nguyên 1 đơn vị.

Một nhà máy nọ năm nay sản xuất được 1200 máy thu hình. So với năm trước sản lượng nhà máy đã tăng 20%. Hỏi năm trước nhà máy đã sản xuất được bao nhiêu máy thu hình?

Chắc có bạn sẽ cho rằng năm nay sản lượng nhà máy so với năm trước tăng 20% phải chăng sản xuất của nhà máy năm trước là:

$$1200 (1-20\%) = 960 \text{ (máy)}$$

Chắc bạn sẽ cho là sản lượng năm trước của nhà là 960 máy. Nhưng nếu nghiệm lại thì với số 960 máy thì khi tăng 20% sẽ chỉ là:

$$960 (1 + 20\%) = 960 + 192 = 1152 \text{ (máy)}$$

Như vậy so với đề thì không phù hợp. Như vậy rõ ràng đã tính sai, nhưng sai ở chỗ nào ta phải xem sai ở đâu? Theo cách tính thì  $1 - 20\%$  có ý nói là sản lượng của năm trước so với năm nay ít hơn 20% hoàn toàn khác với ý nói: sản lượng của năm nay so với năm trước tăng 20%.

Cách làm chính xác phải là:

$$\frac{1200}{(1 + 20\%)} = 1000 \text{ (máy)}$$

Như vậy số máy sản xuất năm trước sẽ phải là 1000 máy.

Trong phép tính phân số cũng như phép tính phần trăm còn phải chú ý đến việc không chỉ có một con số 1 đơn vị mà còn có thể có hai hay nhiều hơn con số 1 đơn vị. Khi đó cần phải thống nhất các con số 1 đơn vị với nhau để khi tính toán chỉ còn có thống nhất 1 đơn vị. Mời bạn xem tiếp bài toán sau đây:

Một đôi vợ chồng già có tổng số tuổi là 140 tuổi. Họ có một con trai, tuổi người con trai bằng  $\frac{3}{8}$  tuổi của người cha và bằng nửa số tuổi của người mẹ. Hỏi tuổi của mỗi người trong hai vợ chồng già?

Trong đề bài  $\frac{3}{8}$  tuổi của người cha là 1 đơn vị, còn mệnh đề  $\frac{1}{2}$  số tuổi người mẹ lại có một con số đơn vị khác. Như vậy khi giải bài toán ta phải tìm cách thống nhất hai số đơn vị này lại với nhau. Ta biết:

$$\text{Số tuổi của người con} = \frac{3}{8} \text{ tuổi người cha} = \frac{1}{2} \text{ tuổi người mẹ.}$$

Như vậy nếu lấy tuổi của mẹ làm đơn vị 1 tuổi thì tuổi của cha sẽ là:

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

Như vậy tuổi của mẹ sẽ là:

$$140 : \left( \frac{4}{3} + 1 \right) = 60$$

Còn tuổi của cha sẽ là:  $60 \times \frac{4}{3} = 80$ .

## Khi giải các đề toán có được phép đặt giả thiết không?

Khi giải các bài toán phức tạp, bạn cần mạnh dạn đặt các "giả thiết", ví dụ bài toán lồng gà và thỏ thuộc loại này.

Như vậy số động vật nhốt trong lồng là hai loại khác nhau. Nếu đếm đầu thì có 55 đầu, còn nếu đếm chân thì có 170 chân.

Hỏi số gà và thỏ nhốt trong lồng?

Loại đề bài này quả có làm người ta điên đầu: Gà thì có 2 chân, thỏ thì có 4 chân, nhốt chung lại thì quả là không dễ tính ra. Bây giờ giả thiết là cả gà và thỏ đều có 4 chân, hai loại động vật đều trở nên có 4 chân, bài toán đã trở thành thuận nhất:

$$55 \times 4 = 220 \text{ (chân).}$$

Như vậy nảy ra một mâu thuẫn, số chân nhiều hơn con so 170:

$$220 - 170 = 50 \text{ (chân).}$$

Vì sao số chân lại nhiều hơn 50 chân? Đó là do chúng ta đã cho cả hai loại động vật đều có 4 chân. Mà mỗi con gà chỉ có 2 chân, số chân gia tăng ở đây là 50 chân, như vậy số gà có thể tính ra là:  $50 : 2 = 25$ .

Số gà là 25 thì số thỏ tất phải là 30 con.



Như vậy với cách “nếu như” bài toán đã trở nên dễ giải quyết. Đương nhiên bạn có thể giải thiết thỏ nhất trong lồng có hai chân thì số chân trong lồng sẽ là:

$$55 \times 2 = 110 \text{ (chân)}$$

Như vậy số chân thừa ra sẽ là:

$$170 - 110 = 60.$$

Số chân dôi ra là do đã giảm ở mỗi con thỏ 2 chân. Từ con số 60 ta tính được số thỏ:

$$60 : 2 = 30.$$

Xem cả hai cách giải thì xuất phát từ chỗ “nếu như”.

Ta hãy xem một đề toán khác:

Một văn kiện có 105 trang, hai người A và B cùng chung nhau chép lại văn kiện. Mỗi ngày A chép nhanh hơn B là 5 trang. Hai người cùng làm việc với nhau 3 ngày thì B bị bệnh; số trang văn kiện còn lại, A phải chép 2 ngày nữa mới xong. Hỏi mỗi ngày A chép được bao nhiêu trang?

Chỗ khó của đề toán là tốc độ chép của A và B khác nhau, nếu giả thiết hai người trở thành một người, xem tốc độ chép như nhau, thì bài toán sẽ trở nên dễ hơn nhiều.

Bây giờ giả thiết rằng B có tốc độ chép như A thì khi hai người cùng dùng chung với nhau 3 ngày thì số trang chép được sẽ nhiều hơn là  $5 \times 3 = 15$  trang.

Tổng số trang giả thiết sẽ chép được  $105 + 15 = 120$  trang.

Giả thiết số trang này chỉ riêng do A chép thì số ngày A phải chép là  $3 \times 2 = 6$  ngày, sau lại chép thêm 2 ngày, tất cả là  $6 + 2 = 8$  ngày.

Như vậy bài toán đã trở nên đơn giản: Có một văn kiện có 120 trang, A phải chép trong 8 ngày mới xong. Hỏi mỗi ngày A chép được mấy trang?

Rõ ràng là mỗi ngày A chép được 15 trang.

Bây giờ chắc các bạn đã quen với lối “nếu như” rồi chứ?

Xin nêu thêm một đề toán khác để ấn tượng “nếu như” được sâu sắc hơn.

Có hai số biết tổng số của chúng là 40, hiệu số là 30. Tìm giá trị của mỗi số.

Nếu giả thiết cả hai số đều là số lớn thì sẽ dễ làm hơn. Nếu cộng 40 với hai lần hiệu số của hai số, ta sẽ được hai số lớn.

Nếu giả thiết cả hai số đều là số bé cũng giải được dễ dàng. Nếu lấy hai lần tổng trừ đi hai lần hiệu số hai số thì sẽ được giá trị của 2 số nhỏ.

Cách tính tiếp sau không cần phải nói tiếp gì thêm nữa.

## Có thể dùng tính chất các số chẵn, số lẻ để giải toán không?

Mọi người đều biết các số 2, 4, 6, 8... chia hết cho 2 được gọi là “số chẵn”, còn các số 1, 3, 5, 7... không chia hết cho 2 là những số lẻ.

Số chẵn, số lẻ có các nét đặc thù ví như:

Số lẻ  $\pm$  số lẻ = số chẵn

Số lẻ  $\pm$  số chẵn = số lẻ

Số chẵn  $\pm$  số chẵn = số chẵn

Số lẻ  $\times$  số chẵn = số chẵn

Số lẻ  $\times$  số lẻ = số lẻ

Số chẵn  $\times$  số chẵn = số chẵn.

Lợi dụng tính chất của các số chẵn, số lẻ có thể có các cách giải hay cho nhiều bài toán. Ta sẽ xem xét một số ví dụ sau đây:

Trong bảng có 15 chữ số, hãy chọn ra 5 chữ số để tổng của chúng bằng 30. Bạn có làm được không? Bạn chỉ phí công

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

dù có tính tới, tính lui thì cũng không thể tìm ra được đáp án đúng. Dù có cách gì đi nữa thì tổng của chúng cũng không thể là 30. Bạn có chứng minh được ngay điều đó không.

Cách chứng minh đơn giản nhất là dùng tính chất của số lẻ. Trong bảng số 15 chữ số đều là số lẻ, nếu muốn chọn từ đó ra 5 chữ số để tổng của chúng 30 là số chẵn thì là điều không thể được.

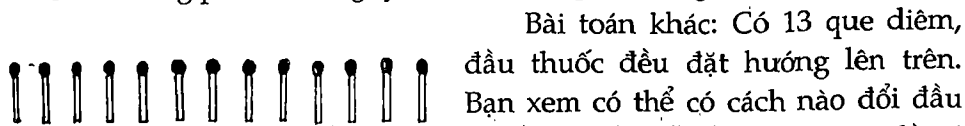
Bài toán khác: Có 17 đội bóng thi đấu với nhau. Có thể bố trí để thi đấu với mỗi đội 3 lượt trong một đợt thi đấu không?

Đáp án là không thể. Vì rằng nếu mỗi đội phải thi đấu 3 lượt với 1 đội khác trong một đợt thi đấu thì với 17 đội cần có số trận đấu là:



$(17 \times 3) : 2$  trận. (Chú ý A đấu với B là một trận).

51:2 không phải là số nguyên nên rõ ràng là không thể bố trí được.



Bài toán khác: Có 13 que diêm,

đầu thuốc đều đặt hướng lên trên.

Bạn xem có thể có cách nào đổi đầu

que diêm, cứ mỗi lần phải quay đầu 6

que diêm xuống dưới để sau một lần số lần quay đầu thì các que diêm đều quay đầu xuống dưới (hoặc đổi chiều của que diêm hướng xuống quay được lên trên).

Đáp án cũng là không thể. Bởi vì nếu số các que diêm được quay xuống là 1, 3, 5, 7... là các số lẻ thì 13 que diêm có đầu phải quay xuống dưới.

Số lẻ + số lẻ + ... số lẻ = số lẻ lần

13 que

Nếu mỗi lần đổi 6 que thì dù có chọn cách đổi chiều như thế nào, bao nhiêu lần nếu số que diêm phải đổi chiều là số chẵn (số chẵn - số chẵn = số chẵn), như vậy dù bằng cách nào thì cũng không thực hiện được.

Ta lại xem một cách xếp số:

3 1 2 1 3 2

Trong 6 chữ số này có 2 số 1, 2 số 2 và 2 số 3, xếp thế nào để giữa hai số 1 có một chữ số khác, giữa hai chữ số 2 có hai chữ số, giữa hai chữ số 3 có 3 chữ số khác. Lại sắp xếp 4 chữ số 1; 2; 3; 4 cách sắp xếp là giữa hai con số 1 phải có một chữ số khác, giữa hai chữ số 2 có hai chữ số, giữa hai chữ số 3 có ba chữ số khác, giữa hai chữ số 4 có bốn chữ số khác. Cách xếp sẽ là:

4 1 3 1 2 4 3 2

Liệu có thể mở rộng được bài toán không? Ví như có thể có năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5 liệu có thể có cách xếp để giữa hai số 1 có một chữ số khác, giữa hai chữ số 2 có hai chữ số khác, giữa hai chữ số 5 có năm chữ số khác?

Kết luận chung là không thể. Ta có thể dùng tính chất số chẵn số lẻ để chứng minh kết luận đó.

Ta thử xếp các số theo yêu cầu đó. Giả sử hai chữ số k, một viết ở vị trí ak, một viết ở vị trí bk thì:

$$b_k - a_k = k + 1.$$

Thử xét:

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3) + (b_4 - a_4) + (b_5 - a_5) = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$$

Nếu viết phía trái.

$$= (b_1 + a_1) + (b_2 + a_2) + (b_3 + a_3) + (b_4 + a_4) + (a_5 + b_5)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10) - 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$= 55 - 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5).$$

Chú ý: Viết phía trái = số lẻ - số chẵn = số lẻ, còn viết phía phải = 20 là số chẵn, điều đó không có khả năng.

Như vậy dựa vào tính chất số chẵn số lẻ, ta có thể giải được một số bài toán theo dạng trả lời câu hỏi là được hay không. Điều đó quả có tiện lợi.

## Trồng cây có cần đến toán học không?

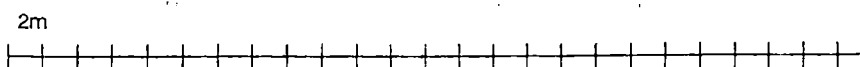
Trồng cây có ý nghĩa thực tiễn quan trọng: để lọc sạch không khí, điều tiết khí hậu, làm đẹp thành phố, duy trì sinh thái...

Như vậy trong trồng cây thì có gì liên quan đến toán học? Đương nhiên là có. Trong các đề toán ở cấp tiểu học có 4 đề toán liên quan đến việc trồng cây.

Xin kể ra vài ví dụ:

Có một đoạn đường dài 50m, cứ cách 2m thì trồng một cây. Hỏi cần trồng mấy cây? Không cần suy nghĩ lâu cũng dễ thấy:

$$50 : 2 = 25 \text{ cây.}$$



Nếu bạn chỉ trả lời như vậy thì là sai. Vì chớ quên một cây trồng ở đầu đường nên phải thêm 1 cây nữa.

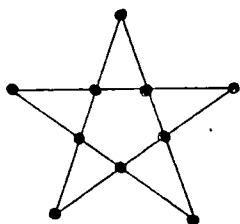
Như vậy số cây cần phải là  $25 + 1 = 26$ . Đó mới là đáp án đúng.

Ngoài ra còn có một số bài toán trồng cây lý thú khác, để giải chúng cần suy nghĩ nhiều. Ví dụ:

Có 10 cây cần trồng thành 5 hàng, mỗi hàng có 4 cây. Bình thường muốn trồng 5 hàng mỗi hàng có 4 cây thì cần phải 20 cây. Nhưng ở đây lại có 10 cây nghĩa là chỉ có một nửa số cây cần thiết. Rõ ràng đây không phải là giải pháp dễ tìm.

Thực ra thì có thể làm được việc đó. Để giải đáp thì giải pháp mỗi cây phải được sử dụng hai lần. Xin các bạn xem hình dưới đây thì sẽ rõ.

Nhà khoa học lớn của Anh Newton rất thích thú với các bài toán cho học sinh. Ông đã đặt ra các bài toán:



Trồng 9 cây thành 9 hàng, mỗi hàng 3 cây. Giải pháp là mỗi cây sẽ được trồng trên 3 hàng. Giải pháp xem hình (1). Newton còn đặt ra yêu cầu trồng 9 cây thành 10 hàng, mỗi hàng có 3 cây (xem hình 2). Nếu yêu cầu trồng 10 cây thành 10 hàng, mỗi hàng có 3 cây, giải pháp như ở hình (3).

Vào thế kỷ XIX nhà toán học Do Thái Same Loaid trong một thời gian dài đã nghiên cứu bài toán sau đây:

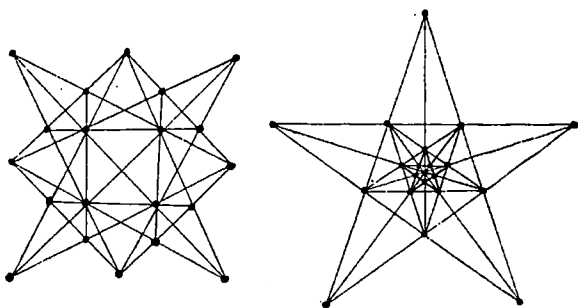
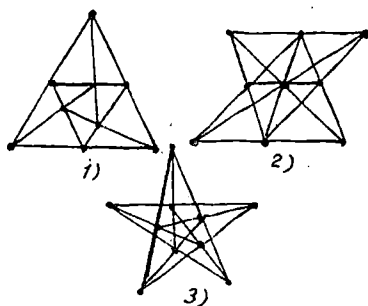
Có 20 cây, trồng mỗi hàng 4 cây, hỏi có thể trồng được mấy hàng?

Ông ta đề ra giải pháp trồng được 18 hàng (xem hình trang bên phía trên).

Gần đây có người dùng máy tính điện tử nghiên cứu lại bài toán này và tìm ra giải pháp trồng được 20 hàng (xem hình phía dưới).

Sau đó có người lại tìm được phương án trồng được 21 hàng. Đương nhiên đó cũng chưa phải là phương án cuối cùng.

Người ta còn muốn tìm được các giải pháp với kết quả lớn hơn về bài toán trồng cây này.



## Bí quyết của các trò chơi với que diêm là gì?

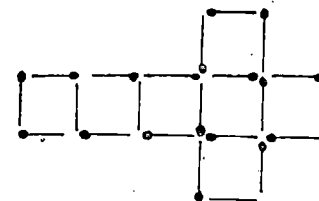
Tiến hành các trò chơi với các que diêm có nhiều chỗ tiện. Với mấy que diêm, có thể xếp thành một hình gì đấy, sau đó có thể xoá đi và lại xếp hình khác dễ dàng không hề tốn sức. Bày đi xếp lại có thể tạo một trò mới.

Liệu có thể lấy các que diêm làm trò giải trí được không. Thực sự thì mọi việc không phải lúc nào cũng giống nhau, chỉ cần suy nghĩ một chút là có thể tìm rõ được. Ngay như việc nhanh chóng xếp được một hoa văn cũng đã làm điều vui sướng rồi. Một công mà được đôi việc, sao lại không làm?

Chỉ cần biết tính toán một chút thì trò chơi với que diêm với dễ làm lại vừa vui.

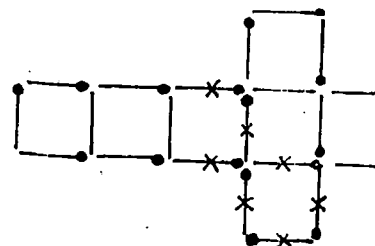
Sau đây là một bài toán:

Làm thế nào lấy đi từ hình này 7 que diêm để chỉ còn lại 4 hình vuông.



Để làm bài toán này ta cần phải phân tích cơ bản một chút. Trong hình vẽ này có 7 hình vuông. Muốn xếp một hình vuông ta cần có 4 que diêm. Muốn xếp 7 hình vuông cần có 28 que diêm, mà số que diêm trong hình vẽ thì chỉ có 22 que. Như vậy đã có 6 que diêm được dùng chung. Đã có các que diêm được dùng hai lần.

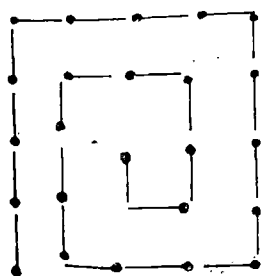
Bây giờ yêu cầu lấy đi 7 que diêm, để chỉ còn lại 15 que diêm. Đề toán yêu cầu phải có 4 hình vuông, mà có 15 que diêm, thiếu 1 que? Như vậy



phải có 1 que diêm được dùng chung. Như vậy, cần phải lấy đi 5 que diêm đang được dùng chung và chỉ để lại 1 que diêm dùng chung.

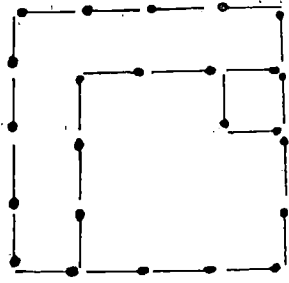
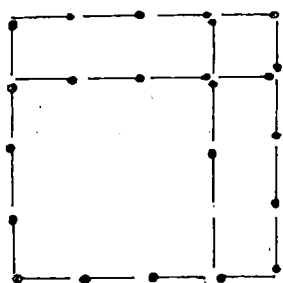
Lại xét một bài toán khác.

Hình vẽ là một đường xoắn ốc được xếp từ các que diêm. Cần thay đổi vị trí 1



que diêm để có được 3 hình vuông to nhỏ khác nhau. Chỉ di động 3 que diêm để có được 3 hình vuông to nhỏ khác nhau. Với bài toán này ngoài việc tính toán ta cần có óc quan sát và trí tưởng tượng. Vòng ngoài cũng có thể làm cơ sở cho một hình vuông lớn, chỉ cần lắp thêm một que diêm là được một hình vuông hoàn chỉnh. Ở bên trong lại có 3 que diêm làm gốc cho một hình vuông, chỉ thiếu một que diêm là được

một hình vuông. Nếu dời chỗ hai que diêm ở giữa để tạo thành hai hình vuông thì hình vuông thứ ba sẽ xuất hiện.



Như vậy bài toán 4 que diêm đã được giải. Bài toán 3 que diêm cũng được giải tương tự.

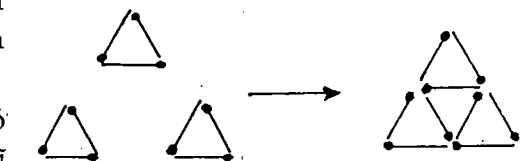
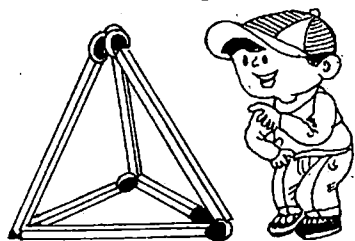
Dưới đây là một bài toán có một điểm khó và cũng cần suy nghĩ mới được.

Đề: Có 6 que diêm hãy xếp như thế nào để có 4 hình tam giác đều.

Có 6 que diêm làm thế nào xếp được 4 tam giác? Về nguyên tắc để có 1 tam giác cần có 3 que diêm, muốn xếp 3 tam giác phải có 9 que diêm. Nếu lại lợi dụng các que diêm dùng chung thì có thể tăng thêm một hình

và thành 4 hình! Bây giờ ta xem hình tam giác nhỏ. Nếu tạo một tam giác lớn với cạnh có 2 que diêm thì sẽ thành 3 hình tam giác lớn, tổng cộng có 5 tam giác!

Tưởng tượng thêm một chút lấy 3 tam giác ở giữa làm đáy, dựng lên trên 3 cạnh 3 tam giác sẽ tạo nên một hình chóp, như vậy



đã xếp được 4 hình tam giác nhỏ. Các tam giác có 3 cạnh chung và như vậy với 4 hình tam giác này đã làm giảm được 3 que diêm. Như vậy chúng ta đã giải được bài toán, với 6 que diêm mà dựng được 4 hình tam giác đều. Đó là một tứ diện đều. Cách giải bài toán này ta đã dùng cách chuyển bài toán que diêm từ dạng hình học phẳng sang hình học không gian.

## Cái tinh xảo của “bàn thất xảo” là ở chỗ nào?

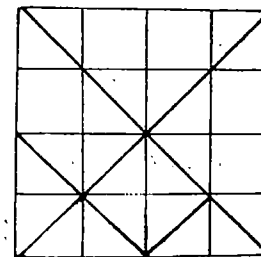
Bàn thất xảo (có 7 điều khéo léo) có lịch sử khá lâu đời. Tuy chưa có ai nói được chính xác năm tháng ra đời của nó, nhưng có thể nói nó xuất hiện cách đây đã hơn một nghìn năm. Buổi đầu nó chưa có tên là bàn thất xảo mà có tên là “kỷ yển”. Ăn hay yển có nghĩa thông dụng là tiệc tùng ăn uống, kỷ là cái bàn chân thấp: nên “kỷ yển” có nghĩa là cái bàn ăn. Vào thời Tống, kỷ yển có 6 mảnh ghép, mỗi mảnh có kích thước xác định, có thể chia lẻ để sử dụng từng mảnh, cũng có thể ghép thành một bàn chung có hình dạng khác nhau. Sau này mới ghép thêm một mảnh nữa nên từ bàn có 6 mảnh thành có 7 mảnh, đổi tên thành bàn “Thất tinh” (Bảy ngôi sao).

Nếu trong nhà có bàn “thất tinh” thì khi có khách tùy theo số lượng khách và cỗ bàn mà có thể ghép để bàn có mặt bàn hoặc to, hoặc nhỏ, biến hoá vô cùng, làm tăng được niềm vui của khách.

Sự phổ biến của bàn thất xảo ra ngoài chúng tỏ nó có lực hấp dẫn riêng. Lực hấp dẫn này được bao gồm trong chữ xảo (xảo là khéo). Bảy mảnh của bàn có thể tháo, ghép ngang dọc. Xem ra từ một mảnh bàn hoàn chỉnh có thể bày ra nhiều kiểu bàn. Trong quá trình tháo lắp, hai mảnh bàn dễ dàng ghép lại thành hình có kích thước như định trước.

Vì sao?

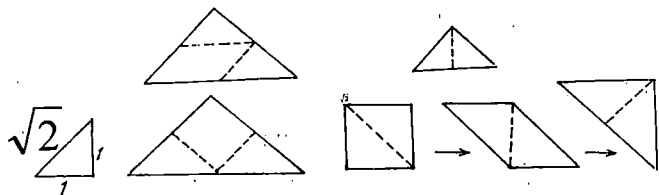
Trước hết hãy xem đường biên của bàn. Bàn “thất xảo” có 7 mảnh, mảnh hình tam giác có 3 cạnh, mảnh hình vuông có 4 cạnh... 7 mảnh có 23 cạnh. Các cạnh đó không phải dài ngắn tùy ý mà được tính toán để khi sử dụng có thể dễ ghép lại với nhau.



Đem bàn ghép thành hình vuông, sau đó chia thành 16 ô vuông nhỏ. Khởi điểm của các đường biên đều xuất phát từ đỉnh của ô vuông nhỏ ở chính giữa, từ đó dễ dàng tính được độ dài của các đường biên. Cho chiều dài của mỗi ô vuông nhỏ là 1, theo định lý Pitago (Phythagoras) thì đường của ô vuông nhỏ là  $\sqrt{2} \left( \sqrt{1^2 + 1^2} \right)$ . Xem xét kỹ thì kích thước của 23 đường biên là  $2; 2 \times 2; \sqrt{2}; 2 \times \sqrt{2}$ .

Như vậy đường biên có chiều dài  $2 \times 2$  là gấp đôi đường biên có chiều dài  $2, 2 \times \sqrt{2}$  là gấp đôi chiều dài của  $\sqrt{2}$ . Thực tế chỉ có hai loại, đó là chỗ khéo léo của loại kích thước này.

Về diện tích thì bàn thất xảo cũng có nét đặc sắc: hai hình tam giác có diện tích bé nhất ghép với nhau có thể thành hình vuông, hình vuông này có diện tích bằng 2. Thay đổi một chút 2 hình tam giác nhỏ này lại có thể ghép thành hình bình hành hoặc một hình tam giác. Đương nhiên là diện tích vẫn là 2.



Hai hình tam giác lớn đều có thể ghép từ 3 mảnh nhỏ. Bất luận là ghép thế nào thì diện tích của hình tam giác lớn vẫn là mảnh có diện tích 2 cộng thêm diện tích 2 mảnh tam giác nhỏ. Như vậy hình tam giác lớn có diện tích là 4. Vì vậy diện tích của bản Thất xảo dù ở hình dạng nào vẫn là:

$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 = 16.$$

Như vậy với các hình có diện tích bằng nhau hoặc diện tích lớn gấp bội ta có thể có hai loại hiệu quả:

1 - Từ nhiều mảnh nhỏ khác nhau có thể ghép thành mảnh lớn có hình dạng nhất định. Ví dụ như ở hình vẽ trên từ một hình tam giác có thể ghép theo 3 cách.

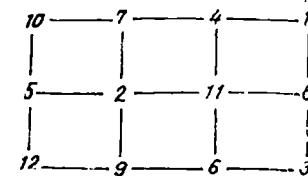
2 - Với một diện tích chọn trước có chọn cách ghép để thu được các mặt bàn có hình dạng khác nhau. Chỉ cần dùng hai mảnh là có thể ghép thành 3 dạng hình phẳng.

Như vậy, tuy diện tích của bản thất xảo cố định bằng 16, nhưng dạng các mặt bàn ghép được thì vô số.

## Liệu con mã có thể đi đến một điểm bất kỳ trên bàn cờ?

Quân cờ “mã” trên bàn cờ tướng nếu không ở thế bị “cản” thì có thể đi đến một điểm bất kỳ trên bàn cờ, đó là điều mà mỗi người chơi cờ tướng đều biết. Thực vậy, nếu chỉ định cho quân cờ “mã” ở một vị trí nào đó trên bàn cờ rồi chỉ định một vị trí thứ hai bất kỳ trên bàn cờ để cho con mã phải đến, thì sau một số lần thử, ai cũng có thể làm được việc đó. Vấn đề đặt ra bây giờ là: Nếu không chỉ định vị trí cụ thể trên bàn cờ thì bạn có thể dùng toán học để chứng minh điều đó không?

Có nhiều cách chứng minh vấn đề đặt ra, sau đây xin trình bày cách chứng minh đơn giản nhất. Trước hết ta hãy trích từ bàn cờ một khoảng chữ nhật gồm 3 hàng, 4 cột (hoặc 4 hàng 3 cột) như ở hình 68. Giả sử nếu con mã đang đứng ở vị trí số 1 thì các bước phải đi sẽ là 2, 3, 4..., 12 và có thể đi đến một điểm bất kỳ. Từ một điểm số hiệu nhỏ theo đường Zigzag đến các điểm số hiệu lớn; ngược lại nếu con mã dừng ở điểm số hiệu lớn, có thể nhảy ngược về các điểm có số hiệu thấp bất kỳ theo con đường ngược lại. Thực ra ở đây ta không hạn chế số nước đi của con mã nên có thể có nhiều cách đi. Từ lý luận trên đây ta có thể kết luận “trên bàn cờ tướng, nếu con mã không ở thế bị “cản” thì nó có thể đi đến vị trí bất kỳ trên bàn cờ”.



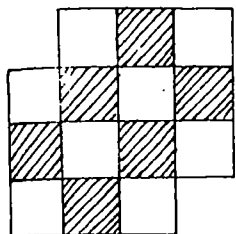
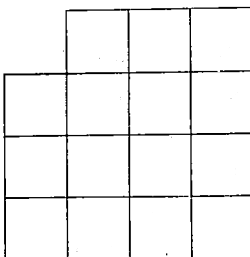
Như vậy chúng ta đã chứng minh được mệnh đề đặt ra từ đầu: Trên bàn cờ tướng, con mã có thể từ một vị trí xác định sau một số nước đi sẽ đi đến một vị trí được chỉ định bất kỳ trên bàn cờ. Cách đi chung là từ một vị trí ban đầu cho con mã đi đến vị trí gần đó, sau lại từ vị trí này đến vị trí gần tiếp. Nước đi sau tiếp nước đi trước, cuối cùng nhất định đến được vị trí chỉ định. Thực ra đó chỉ là cách chứng minh dựa vào lý luận. Trên thực tế chỉ cần mấy nước đi là có thể đến đích.

Như trên đã nói, có nhiều cách chứng minh kể cả cách chứng minh theo phương pháp tọa độ. Trên đây ta đã dùng cách: trước hết lấy  $3 \times 4$  hoặc  $4 \times 3$  ô vuông để chứng minh. Cũng có thể dùng phương pháp khác, phương pháp này ít nhiều có liên quan với phương pháp nói trên (chỉ ít là có 1 chỗ giống). Ta chọn mảng có  $3 \times 4$  (hoặc  $3 \times 4$ ) mảng nhỏ liên tiếp nhau; trong số đó mảng đầu tiên trùm điểm khởi đầu của con mã; mảng cuối phủ lên điểm định trước mà con mã phải đến. Vì con mã trong từng mảng nhỏ có thể đi từ điểm này đến điểm kia trong nội bộ mảng, rồi từ mảng thứ nhất nhảy sang mảng tiếp theo, kinh qua các mảng trung gian, con mã sẽ đi vào mảng cuối, và trong mảng cuối cùng này, con mã sẽ đi đến được điểm chọn trước.

## Trên bàn cờ có gì liên quan đến toán học?

Một mảng bàn cờ có thể dẫn đến nhiều bài toán lý thú. Bạn có tin không? Hãy thử xem.

Từ bàn cờ ta thử cắt một mảng (như hình bên phải), trong mảng có 14 ô vuông nhỏ. Bây giờ yêu cầu bạn cắt mảng này thành 7 mảnh hình chữ nhật, mỗi mảnh chữ nhật có 2 ô vuông, diện tích của mỗi mảng sẽ là  $1 \times 2$  (giả thiết diện tích mỗi ô vuông nhỏ là 1). Bạn có làm được không?



Có lẽ bạn cho là không khó lắm. Thế nhưng chỉ sau vài lần thử bạn sẽ thấy: không thể cắt được dù bằng bất cứ cách nào, mà chỉ có thể cắt thành 6 hình chữ nhật và 2 ô lẻ.

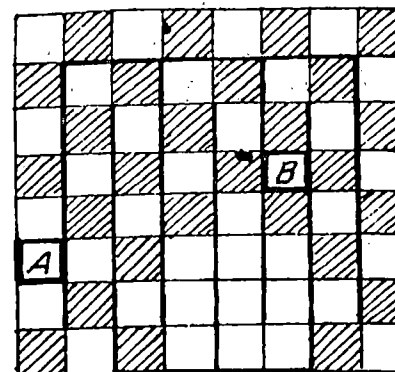
Thế chẳng phải mảng bàn cờ có 14 ô vuông sao? Tại sao lại không cắt được thành 7 hình chữ nhật, mỗi chữ nhật có 2 ô?

Chúng ta hãy theo mẫu bàn cờ quốc tế, tô các ô trên mảng thành các ô màu đen trắng xen kẽ. Bạn có thể thấy trong hình này cứ mỗi hình chữ nhật có 2 ô thì có 1 ô đen và 1 ô trắng. Nếu đếm số ô đen ô trắng bạn sẽ thấy trên hình đang xét có 8 ô trắng và 6 ô đen, bạn sẽ thấy dù cắt theo kiểu gì thì vẫn thừa 2 ô trắng nên không thể cắt thành 7 hình chữ nhật được.

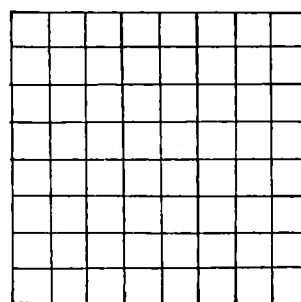
Do cách phân tích vừa nói bạn sẽ thấy: Sở dĩ không thể cắt được các hình chữ nhật như đã yêu cầu vì trong mảng bàn cờ số ô đen và ô trắng không giống nhau. Bạn có thể hỏi nếu chọn các mảng mà có số ô đen, ô trắng như nhau thì liệu có thể thực hiện được theo yêu cầu đặt ra không?

Một nhà khoa học thuộc một công ty thương nghiệp quốc tế về máy cơ khí là Comoton đã tìm thấy: từ một bàn cờ vuông có  $2n \times 2n$  ô vuông thì có thể tùy ý cắt thành các mảnh có 1 ô đen và 1 ô trắng và được  $2n^2 - 1$  hình chữ nhật  $1 \times 2$ . Chúng ta thử phân tích từ bàn cờ quốc tế có  $8 \times 8$  ô.

Cách chứng minh đại ý như sau: Giả sử ta trích 2 ô A và B trong bàn cờ. Trước hết ta kẻ trên bàn cờ các nét vẽ như hai cái bàn cào, một cái 3 răng, một cái 4 răng cài vào nhau, chia bàn cờ thành nhiều khu vực (xem hình bên phải) trông giống như một mê cung. Như vậy bạn hãy làm như cách đi vào mê cung từ khu vực A đến khu vực B. Hãy chú ý rằng theo hình vẽ các ô đen - trắng xen kẽ nhau dù ở vị trí nào thì hai ô khác nhau đều là số chẵn, và có thể cắt bàn cờ thành các hình chữ nhật  $1 \times 2$  (vì ở đây số ô đen trắng là số chẵn nên mỗi thứ có một nửa). Mặt khác chỉ cần chú ý điều chỉnh sắp xếp các hình chữ nhật theo chiều ngang dọc là thực hiện được.



Theo cách đó muốn đi từ A đến B, ta có thể đi theo 2 con đường (một đường theo phía ngoài, một đường đi phía trong) và cắt thành các hình chữ nhật có 2 ô một trong một chữ nhật (một ô đen và một ô trắng).



Sau đây cũng là bài toán có liên quan đến việc cắt ô bàn cờ.

Một mảng bàn cờ  $2n \times 2n$  ô, hãy tùy ý cắt 3 ô vuông tạo thành hình chữ L làm thế nào lấp kín được bàn cờ.

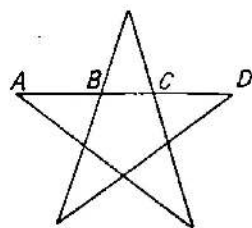
Có thể dùng phương pháp quy nạp để chứng minh bài toán. Về bàn cờ tương có khá nhiều bài toán lý thú khó có thể kể ra hết.

## Vẽ ngôi sao 5 cánh như thế nào?

Mọi người đều thích hình ngôi sao năm cánh, trên lá cờ tổ quốc có ngôi sao năm cánh.

Trên ngôi sao năm cánh có nhiều điều lý thú, đặc biệt có các tỉ số vàng (tức trung ngoại tỉ). Theo hình ta có thể chứng minh:

$$BC: AB = AB: AC = AC: AD = 0,618...$$



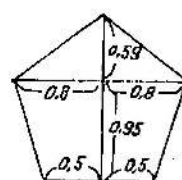
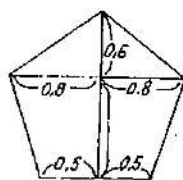
Làm thế nào vẽ được ngôi sao năm cánh? Sau đây chúng tôi xin giới thiệu các bạn mấy cách.

Trước hết xin giới thiệu hai cách vẽ tương tự nhau. Người ta có thể nhớ hai câu khẩu quyết sau đây:

- 1) Một sáu đứng ở giữa, hai tám chia hai bên.
- 2) Chín năm đội năm chín, năm tám chia hai bên.

Nhờ hai câu khẩu quyết và nhìn hai hình dưới đây, trong đó có các con số, theo đó các bạn dễ dàng vẽ được ngôi sao năm cánh.

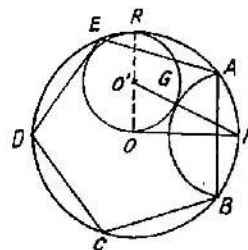
Từ khẩu quyết ta có thể vẽ được hình ngũ giác đều, đó là cơ sở để ta vẽ ngôi sao năm cánh.



1,6 đứng ở giữa      2,8 chia hai bên      9,5 đội 9,5      5,8 chia hai bên

Dưới đây xin giới thiệu cách vẽ chính xác "phương pháp compa":

- 1 - Dùng O làm tâm vẽ đường tròn bán kính OH.
- 2 - Lấy bán kính OR làm đường kính vẽ đường tròn tâm O':  $OR \perp OH$ .
3. Nối O'H và OH' cắt đường tròn tâm O' tại G. Lấy H làm tâm vẽ đường tròn có bán kính là HG. Đường tròn bán kính HG cắt đường tròn tâm O tại A và B.



4 - Độ dài của dây cung AB chính là cạnh của hình ngũ giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O. Dùng compa dễ dàng xác định các đỉnh C, D, E còn lại của hình ngũ giác đều nội tiếp này. Nối các điểm lại với nhau, ta có các cạnh AB, BC, CD, DE, EA của ngũ giác đều ABCDE.

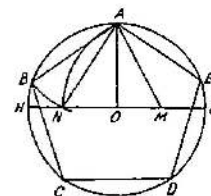
Đương nhiên từ mối quan hệ giữa các cạnh của ngũ giác đều ta có thể tìm được các cách vẽ khác.

1 - Vẽ đường tròn tâm O, sau đó vẽ OA vuông góc với đường kính HG;

2- Lấy M là trung điểm của OG;

3 - Lấy M làm tâm vẽ một cung tròn cắt OH tại N;

4 - AN chính là độ dài của cạnh hình ngũ giác đều nội tiếp trong vòng tròn tâm O. Dùng compa có thể dễ dàng vẽ các điểm B, C, D, E. Nối AB, BC, CD, DE, EA ta có được hình ngũ giác đều cần vẽ.



1)



2)

Cuối cùng chúng tôi xin giới thiệu hai phương pháp dùng phương pháp gấp giấy và cắt giấy để vẽ hình ngũ giác đều.

Cắt một băng giấy hình chữ nhật dài rồi cuộn thành một cái nút như hình vẽ

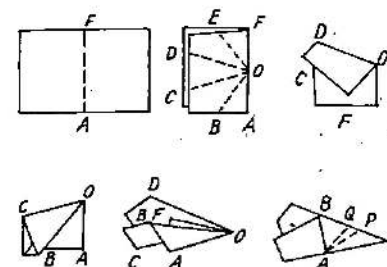
(1). Sau đó nhẹ nhàng rút hai đầu băng giấy để được một nút gấp như hình (2). Ép phẳng nút (dùng để rách giấy). Nhờ vậy ta sẽ được một hình ngũ giác đều.

Sau đây ta sẽ tìm cách cắt giấy thành hình ngũ giác đều.

Trước hết lấy một băng giấy hình chữ nhật, gấp đôi, chú ý giữ hai biên gấp trùng vào nhau. Sau đó ăn theo hình vẽ bên phải mà gấp giấy.

Lượng chừng theo OA lấy 1/3 độ dài của OA (điểm P trên hình vẽ, dùng kéo cắt một nhát theo OA. Mở băng giấy ta sẽ được ngôi sao năm cánh.

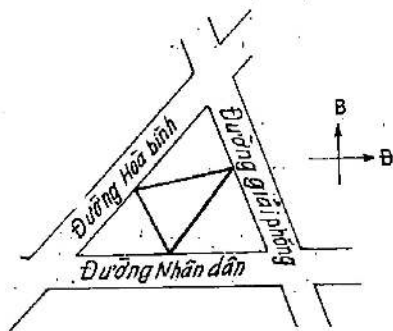
Nếu chọn điểm Q với OQ bằng 1/2 độ dài OA rồi cắt một nhát theo OA, triển khai ta sẽ có một hình ngũ giác đều.





## Làm thế nào để chăng đèn thành các hình tam giác đẹp, tiết kiệm?

Vào các ngày lễ lớn, ở các đô thị, thị trấn thường chăng đèn, kết hoa trên đường phố, thường là các dây đèn nhiều màu. Các ngọn đèn nhấp nháy cùng ánh trắng sao thu hút sự chú ý của khách tham quan, làm tăng vẻ nhộn nhịp của ngày lễ.

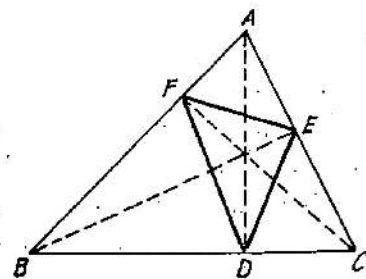


Trong những năm gần đây nền kinh tế, văn hoá phát triển, người ta đua nhau tìm các cách chăng đèn trên đường phố. Ở một thành phố chỗ nào nhiệt nhất là quảng trường. Quảng trường được bao bọc bởi ba đường phố lớn (xem hình vẽ). Người thiết kế muốn chọn và đặt tại quảng trường một dây đèn có dạng hình tam giác lớn. Dây đèn này yêu cầu không chỉ phải đẹp mà còn

phải tiết kiệm nhất. Như thế, lý tưởng nhất là phải chọn được một tam giác có chiều dài cạnh bé nhất có thể được. Tin tức loang ra, lập tức từ bộ môn chủ quản và quần chúng có nhiệt tình đã xuất hiện nhiều phương án.

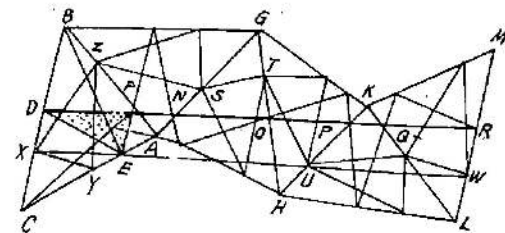
Vì phải đảm bảo số bóng đèn như bình thường nên một bài toán được đặt ra là: Làm thế nào vẽ được một tam giác nội tiếp trong một tam giác khác có chu vi ngắn nhất.

Phương pháp giải quyết vấn đề đơn giản không ngờ. Quảng trường trung tâm có dạng một tam giác ABC. Từ các đỉnh của tam giác A, B, C vẽ các đường cao cắt cạnh tam giác ABC tại các điểm D, E, F, chân của "đường cao" là tam giác DEF là hình tam giác đáp ứng được yêu cầu nói trên.



Tại sao tam giác tạo nên bởi các đường cao lại có chu vi ngắn nhất? Có nhiều cách chứng minh: bằng phương pháp đại số, phương pháp hình học đều có thể chứng minh được. Sau đây chúng ta muốn giới thiệu phương pháp chứng minh bằng cách triển khai bề mặt.

Cho tam giác ABC và DEF là tam giác tạo nên do 3 chân đường cao của tam giác ABC. Còn XYZ là một tam giác bất kỳ nội tiếp trong tam giác ABC.



Như biểu diễn ở hình bên, trước hết ta đảo ngược các tam giác ABC và tam giác do chân các đường cao của ABC tạo nên: trước hết ta chuyển cạnh AB của tam giác ABC để có tam giác ABG, lại chuyển cạnh AG

của tam giác ABG để có tam giác AHG (tương đương với cạnh BC của hình tam giác ban đầu) để có tam giác KHG, sau đó đảo tia KH của tam giác KHG đến tam giác KHL, sau đó lại đảo tia KL của tam giác KHL để có tam giác KML.

Bây giờ cạnh ML sẽ tạo với BC thành một hình bình hành. Vẽ hình bình hành DXWR, mà tam giác DER có chu vi bằng một nửa chiều dài đoạn DR. Trong hình bình hành DXWR ta có  $DR = XW$ . Còn độ dài của chu vi tam giác XYZ bằng hai lần chiều dài của đường gãy XZSTUVW.

Dễ dàng nhận thấy rằng giữa 2 điểm X và W thì đường ngắn nhất là đoạn thẳng nối hai điểm X và W nên độ dài của đường gãy XZSTUVW sẽ dài hơn độ dài của đoạn XW. Từ đó có thể thấy:

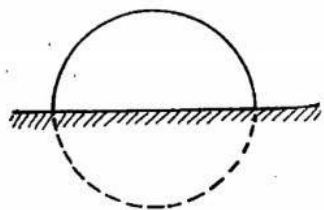
Trong một hình tam giác, bất kỳ tam giác nội tiếp nào cũng có chu vi lớn hơn chu vi của tam giác xác định do chân ba đường cao.

Phương pháp chứng minh vừa trình bày là hết sức rõ ràng và có thể nhìn thấy ngay theo phương pháp trực quan, phương pháp này do nhà toán học Đức là Hufasishon tìm ra. Ông Hà Lăng đánh giá đây là một "nét đẹp toán học" rất sinh động.

Cần nhấn mạnh là trên đây chỉ mới trình bày phương pháp chứng minh một cách vắn tắt. Phép chứng minh đầy đủ thực ra có nhiều phức tạp nhưng các chi tiết cụ thể bạn đọc có thể tự lĩnh hội được.

## Nàng Titô thông minh đã dùng cách gì để đo đất?

Theo truyền thuyết Hy Lạp, nàng Titô con gái của quốc vương Muton xứ Tuila, nàng bị gán gả cho chú của mình. Sau này ông chú (tức chồng nàng) bị em nàng là vua xứ Xapolos là Comaonli giết chết. Tilo liền mang theo vàng bạc châu báu chạy qua ở miền bờ biển phía tây châu Phi. Nàng định mua lấy đất đai của tù trưởng Yacbas.



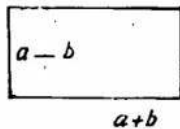
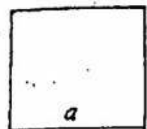
Tito rất thông minh, nàng nói nàng chỉ cần mua một mảnh đất có thể bọc trong một tấm da bò. Tù trưởng Yacbas cho rằng mảnh đất như vậy sẽ không đáng kể nên vui vẻ chấp nhận. Nàng liền giết một con bò, lột da, rồi cắt tấm da thành một sợi dây nhỏ dài rồi dùng dây đó để đo đất.

Tito thầm tính toán nếu dùng dây để vây một ô đất hình chữ nhật thì diện tích đất thu được không lớn lắm, nếu vây một ô đất hình vuông cũng không lớn; nếu vây một khu đất hình tròn thì sẽ có diện tích lớn nhất. Thế nhưng Tito vẫn chưa vừa ý và cố nghĩ xem có cách gì để đo được mảnh đất có diện tích lớn hơn nữa không?

Nàng bỗng nhiên nghĩ ra rằng tù trưởng Yacbas chẳng đã bán cho ta mảnh đất ở miền ven biển? Nếu ta đem dây quấn lấy một mảnh đất ven bờ biển có dạng một nửa hình tròn thì diện tích của mảnh đất sẽ là lớn nhất.

Thế là nàng Títô thông minh xin quay lấy mảnh đất hình nửa hình tròn ven biển. Liệu mảnh đất Títô đã đo có phải có diện tích lớn nhất không?

Trước hết ta hãy xem một hình chữ nhật và một hình vuông có cùng chu vi thì hình nào có diện tích lớn hơn?



Cho hình vuông có cạnh  $a$ , còn hình chữ nhật có cạnh là  $a + b$  và  $a - b$ , hai hình này có chu vi bằng nhau và bằng  $4a$ .

Ta tính diện tích  $S$  của các hình.

Diện tích hình vuông  $S_{\text{vuông}} = a^2$ .

Diện tích hình chữ nhật  $S_{\text{chữ nhật}} = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

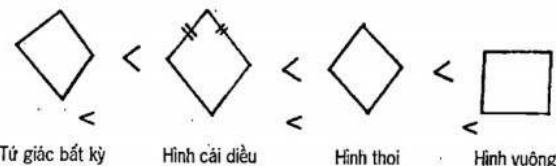
Vì  $b > 0$  nên  $S_{\text{vuông}} > S_{\text{chữ nhật}}$ . Từ đó ta có kết luận:

Với hình chữ nhật và hình vuông có cùng độ dài của đường chu vi thì hình vuông có diện tích cực đại:

Thực ra thì kết luận này có thể được mở rộng là: Với các tứ giác có cùng độ dài của chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

Để chứng minh kết luận này ta có thể làm như sau:

Tiến thêm một bước nữa ta có thể chứng minh mệnh đề sau:



Với các hình đa giác có cùng số cạnh mà có độ dài đường chu vi bằng nhau thì hình đa giác đều có diện tích lớn nhất.

Đồng thời ta lại có thể chứng minh (xem con đường chứng minh ở hình vẽ dưới đây)



Trong số các đa giác đều có cùng độ dài đường chu vi thì hình nào số cạnh nhiều hơn sẽ có diện tích lớn hơn.

Do đó:

Với một độ dài cho trước thì diện tích giới hạn trong một đường gấp khúc khép kín, đường tròn sẽ bao được một diện tích lớn nhất.

Có điều cần chú ý là ở đây nàng Títô đã lợi dụng bờ biển làm biên giới tự nhiên, nên vô hình dung đã tăng đáng kể chiều dài của sợi dây da, nàng đã dùng sợi dây để vây lấy một nửa hình tròn, và nàng đã đo được một diện tích đất lớn nhất trên nửa hình tròn này.

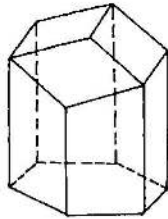
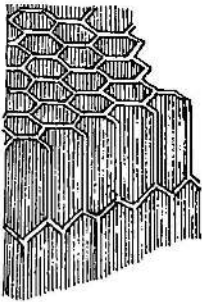
Sau này chính Títô đã xây nên thành Jathaico tại chính mảnh đất đó. Ngày nay cổ tích Jathaico vẫn còn được bảo tồn.



## Sự khéo léo của tổ ong

Tổ ong gồm nhiều ô phòng nhỏ có dạng lăng trụ lục giác đều, kích thước bằng nhau xếp cạnh nhau. Mỗi một ô đều được bao quanh bằng một lớp “tường” sáp mỏng. Các lăng trụ có tiết diện là các lục giác đều, độ dài cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau. Nhưng điều làm người ta kinh ngạc là đáy các lăng trụ không phẳng, cũng không phải dạng mặt cầu tròn mà có đầu nhọn: Ba mặt đáy được tạo thành do ba mặt thoi bằng nhau.

Tại sao tổ ong lại có cấu tạo như vậy?



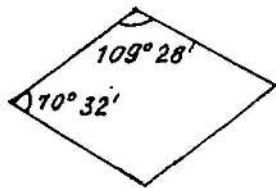
Vào thế kỷ III trước Công nguyên, tại thành phố Alexandri thuộc cổ Ai Cập, nhà thông thái Paphus đã quan sát cẩn thận cấu tạo của tổ ong và đặt ra câu hỏi liệu có phải cấu tạo của tổ ong đã cho phép sử dụng nguyên vật liệu tiết kiệm nhất.

Phải trải qua 2000 năm, vào đầu thế kỷ XVII, nhà thiên văn học nổi tiếng của Pháp là Kaiphuxin (ông cũng là nhà sinh vật học) cũng đã tiến hành các quan sát và thấy kết quả tương tự. Cùng thời gian đó một học giả khác của Pháp là Moralti qua một kết quả đo đạc cẩn thận đã tìm thấy:

Các hình thoi ở mặt đáy của tổ ong có góc tù là  $109^{\circ}28'$  và góc nhọn là  $70^{\circ}32'$ .

Tin tức đó đến tai nhà triết học Pháp là Reaumur, ông liền đặt câu hỏi: tại sao các mặt thoi không có góc hoặc là  $100^{\circ}$  hoặc  $110^{\circ}$  mà lại là  $109^{\circ}28'$ .

Liệu đó có phải là điều ngẫu nhiên trong khoa học hay có lý do nào khác? Nhà triết học suy đoán: Liệu với các góc như vậy có phải ong sẽ cấu tạo được các ô phòng với cùng một lượng nguyên liệu mà thu được dung



tích phòng lớn nhất. Nhà triết học đặt câu hỏi này cho nhà toán học nổi tiếng Thụy Sĩ là Koenig. Qua phép tính toán hết sức cẩn thận của nhà toán học, cho thấy các dự đoán của Reaumur là đúng đắn. Tuy nhiên, kết quả tính toán có sai khác với giá trị thực đo được là  $2'$ , tức các góc của mặt thoi theo tính toán là  $109^{\circ}26'$  và  $70^{\circ}34'$ .

Vào năm 1743, nhà toán học Anh là Maclaurin lại nghiên cứu lại cấu tạo của tổ ong, ông đã dùng một phương pháp mới và tính toán theo một góc độ khác; sau một quá trình tính toán ông đi đến một kết luận làm mọi người kinh ngạc.

Đó là sai lầm không thuộc vào phía ông mà là do tính toán của nhà toán học. Thế nhà toán học nổi tiếng đã sai ở chỗ nào? Nói ra thật là hết sức kỳ lạ: sai lầm là do nhà toán học đã sử dụng bảng số in sai.

Vào đầu năm 1744, trong một cuộc điều tra về tai nạn hàng hải được công bố là do hoa tiêu hàng hải đã đi lệch  $2'$ , mà việc sai  $2'$  là do bảng số bị in sai.

Qua mấy thế kỷ nghiên cứu cấu tạo tổ ong người ta cũng đã phát hiện nhiều tính năng đặc biệt của tổ ong và cũng đã tìm được nhiều ứng dụng các tính năng đó. Ngày nay cấu tạo tổ ong đã được nghiên cứu và được ứng dụng rộng rãi vào nhiều lĩnh vực khác nhau như: kiến trúc, hàng không, hàng hải, du hành vũ trụ, vô tuyến điện thoại v.v... Từ vật liệu cách âm trong kiến trúc đến việc thiết kế các ống dẫn khí trong động cơ đều tham khảo từ cấu tạo tổ ong.

## Có thể dùng phương pháp dẫn chứng để chứng minh định lý hình học không?

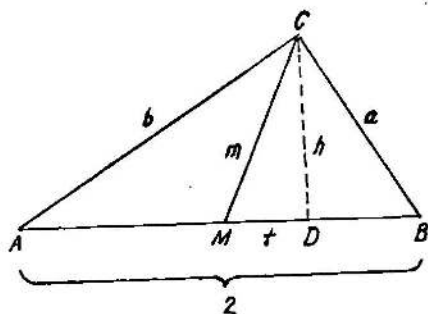
Theo truyền thống của hàng nghìn năm, để chứng minh các mệnh đề trong hình học người ta thường dùng phương pháp diễn giải, ghép nối các vấn đề lý luận với nhau; rồi từng bước, từng bước dẫn dắt đến kết luận. Chưa có ai dùng phương pháp dẫn chứng cụ thể để chứng minh của định lý hình học. Bởi vì người ta không thể nêu được vô số dẫn chứng, còn với số dẫn chứng bao nhiêu là đủ thì quả là không thể xác định được. Ví dụ nói đã dẫn ra một vụn hình tam giác để chứng thực tổng các góc trong của

một tam giác là  $180^\circ$  thì cũng không chứng minh được mệnh đề với một tam giác bất kỳ, tổng các góc trong của một tam giác bằng  $180^\circ$ . Lý do đơn giản là hình tam giác thì có vô số hình nên dù có dẫn ra một vụn, một triệu, một tỉ hình thì cũng chỉ như "hạt cát bỏ bể".

Như thế có nghĩa là thế nào?

Trước hết cần phải nói có rất nhiều phương pháp có thể biến đổi một mệnh đề hình học thành mệnh đề đại số tương đương. (Ví dụ có thể dùng phương pháp toạ độ, các định lý tam giác, phương pháp diện tích, v.v...); sau đó từ vấn đề đại số có thể biến đổi để trở thành các hằng đẳng thức đại số để kiểm nghiệm. Mà việc kiểm nghiệm hằng đẳng thức đại số ta lại có thể thực hiện bằng phương pháp dẫn chứng.

Ta có thể nêu lên một ví dụ.



Ta cần chứng minh mệnh đề: Trong một hình tam giác, tổng bình phương hai cạnh trừ một nửa bình phương cạnh thứ ba sẽ bằng 2 lần bình phương đường trung tuyến vẽ trên cạnh thứ ba.

Bước thứ nhất để chứng minh mệnh đề này theo phương pháp dẫn chứng là phải biểu diễn mệnh đề ra dạng đại số.

Ta vẽ một hình tam giác mà độ dài của cạnh thứ ba giả thiết bằng 2 và a, b là độ dài của hai cạnh kia; độ dài của đường trung tuyến vẽ trên cạnh thứ ba là m. Điều cần phải chứng minh là:

$$a^2 + b^2 - 2 = 2m^2 \quad (1)$$

Trong (1) có 3 biến số là a, b, m; ba đại lượng này được liên hệ với nhau theo mệnh đề hình học đặt ra. Từ C ta hạ đường cao CD và gọi độ dài của CD = h, độ dài từ D đến trung điểm M của cạnh AB là t, với giả thiết AB = 2, theo định lý Pitago ta có:

$$\begin{cases} m^2 = h^2 + t^2 \\ a^2 = h^2 + (1-t)^2 \\ b^2 = h^2 + (1+t)^2 \end{cases} \quad (2)$$

Vấn đề cần chứng minh là (2) sẽ được thoả mãn nếu điều kiện (1) được thoả mãn. Bước thứ hai là phải kiểm nghiệm bài toán bằng một hằng đẳng thức. Nếu thay (2) vào (1) thì ta phải thu được một đẳng thức chỉ chứa h và t. Ta chỉ cần phải chứng minh đẳng thức này là một hằng đẳng thức. Bước thứ ba là cần phải kiểm tra hằng đẳng thức giữa h và t bằng cách thay số thì sẽ quyết định số dẫn chứng cần thiết phải nêu ra. Nếu hằng đẳng thức giữa h và t đúng không hơn hai lần các cặp số đã chọn thì cần phải kiểm nghiệm với cặp số thứ ba của h và t, tổ hợp với nhau sẽ thành 9 cặp số giữa h và t cần đưa vào kiểm nghiệm. Như vậy có thể cần 9 dẫn chứng để chứng minh mệnh đề.

Ví như chọn h = 0; 1; -1, t = 0; 1; -1 ta có thể tổ hợp thành 9 cặp giá trị h và t là:

$$(h, t) = (0,0); (0,1); (0,-1) (1,0); (1,1); (1,-1) (-1,0); (-1,1) (-1,-1).$$

Thế các giá trị h, t vào (2) ta sẽ thu được các giá trị a, b, m thu được hoàn toàn thoả mãn (1). Như vậy mệnh đề được chứng minh.

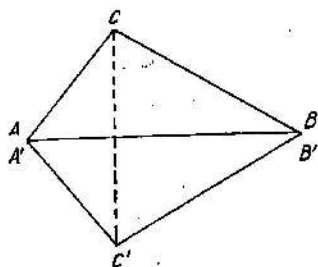
Phương pháp chứng minh bằng dẫn chứng đặt cầu nối giữa phương pháp suy luận nối tiếp và phương pháp quy nạp toán học, phá vỡ quan niệm truyền thống trong toán học chỉ chấp nhận phương pháp suy luận nối tiếp (hay còn gọi là suy diễn).

Chỉ có điều là trước mắt phương pháp dẫn chứng chỉ mới chứng minh được các mệnh đề có thể kiểm nghiệm hằng đẳng thức đại số. Nếu tiếp tục nghiên cứu sâu thêm chắc có thể mở rộng được phạm vi ứng dụng của phương pháp này.

## Các phép chứng minh hình học có thể có sai lầm không?

Dưới đây xin nêu mấy mệnh đề không thể nhưng có người nhầm lẫn đã chứng minh là có thể nghiệm. Bạn có thể vạch rõ được các sơ suất trong các chứng minh đó không?

Đề: Có hai tam giác có hai cạnh bằng nhau từng đôi một và góc đối diện một trong hai cạnh đó bằng nhau. Chứng minh rằng hai tam giác đó bằng nhau.



Giả thiết: Hai tam giác ABC và A'B'C':  
 $AB = A'B'$ ;  $AC = A'C'$

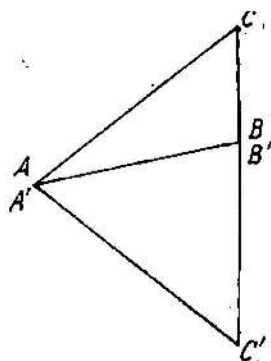
$$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$$

Chứng minh:  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Cách chứng minh có thể đặt một trong hai cạnh bằng nhau của hai tam giác trùng lên nhau, ví dụ đặt A'B' trùng lên cạnh AB, C và C' sẽ nằm ở hai bên cạnh AB, như hình 103. Vì  $AC' = AC$  mà  $\widehat{ACC'} = \widehat{AC'C}$  (hai tam giác này có đáy chung nhau. Vì theo giả thiết  $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$  nên  $\widehat{ACB} = \widehat{ACC'} = \widehat{AC'B} - \widehat{AC'C}$  (hai lượng bằng nhau trừ đi một lượng giống nhau) nên  $\widehat{BC'C} = \widehat{BCC'}$ , do đó  $BC = BC' = B'C'$ . Mà theo giả thiết:  $AC = A'C'$ ;  $AB = A'B'$  nên tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau (hai tam giác có các cạnh bằng nhau từng đôi một). Đó là điều cần chứng minh.

Như vậy theo kết quả vừa rồi ta chứng minh một mệnh đề hai tam giác có "cạnh, cạnh, góc" bằng nhau từng đôi một theo thứ tự thì sẽ bằng nhau! Nhưng chúng ta biết rằng điều đó là sai.

Vậy cách chứng minh ở đây có sai sót ở chỗ nào?



Bạn hãy xem hình vẽ khác ở bên phải thì sẽ làm rõ được chân tướng của sai lầm đã mắc phải: bạn sẽ thêm một đường phụ vào hình đã cho là đoạn CC' qua điểm B.

$$\text{Ta có } \widehat{BCC'} = \widehat{BC'C} = 0^\circ$$

Bây giờ BCC' đã không còn là hình tam giác nữa, và chúng ta sẽ không thể từ đẳng thức  $\widehat{BCC'} = \widehat{BC'C}$  để suy ra  $BC = BC' = B'C'$  nữa. Vậy điểm sai chính là ở đây.

Theo "phương pháp tổng hợp" truyền thống trong các phép chứng minh hình học, trong quá trình chứng minh người ta thường hay sử dụng các đường phụ trợ, nhờ đường phụ trợ tạo với hình đã cho thành các hình mà ta có thể áp dụng các định lý đã cho. Thế nhưng có nhiều định lý trong một số tình hình "thoái hoá" thì phép chứng minh sẽ không tuân theo chặt chẽ được nữa và sẽ mắc phải sai lầm.

Nhưng thế nào là tình hình "thoái hoá"?

Ta nói hai điểm với nhau thì có một đoạn thẳng. Nhưng nói hai điểm lại tiến đến trùng nhau thì đoạn thẳng sẽ thu về thành một điểm. Lúc đó ta nói: đoạn thẳng bị "thoái hoá" thành điểm.

Ba điểm có thể tạo nên một tam giác. Thế nhưng nếu ba điểm lại tiến đến cùng nằm trên một đường thẳng thì hình tam giác sẽ trở thành một đoạn thẳng và không còn là hình tam giác nữa.

Bây giờ ta nói: tam giác thoái hoá thành đoạn thẳng.

Trong các định lý hình học có các định lý trong tình hình thoái hoá vẫn giữ được đúng nhưng cũng có những định lý trong tình hình thoái hoá lại không còn đúng nữa. Ví như định lý "Với một tam giác cân thì hai góc kề đáy phải bằng nhau", định lý này vẫn đúng trong tình hình thoái hoá của tam giác. Bởi vì với một tam giác cân ở tình trạng thoái hoá thì chính điểm giữa cạnh đáy là đỉnh của tam giác và hai góc kề đáy của tam giác lúc này đều bằng không và đương nhiên là bằng nhau. Thế nhưng định lý đảo "Với một tam giác mà hai góc trong bằng nhau thì các cạnh đối diện phải bằng nhau", định lý này sẽ không đúng khi tam giác ở "tình huống thoái hoá". Vì vậy khi sử dụng các định lý đảo ta phải hết sức cẩn thận trong trường hợp ở "tình huống thoái hoá".

Trong trường hợp vừa nêu trên khi CC' đi qua điểm B thì chính là ở tình trạng thoái hoá. Tình trạng này tương đương với  $\widehat{ABC} + \widehat{A'B'C'} = 180^\circ$ . Nếu loại bỏ tình huống này thì phép chứng minh nói trên không hề có sai lầm. Vì vậy một cách chính xác thì bài toán phải phát biểu như sau:

Đề: Hai tam giác có cạnh bằng nhau từng đôi một và có một góc bằng nhau, còn góc đối với cạnh kia không bù nhau thì chúng bằng nhau.

Trong quá trình chứng minh các định lý hình học, thường có sử dụng cách vẽ các đường phụ trợ để ứng dụng trong quá trình chứng minh định lý. Tuy nhiên rất khó dự đoán được liệu có xuất hiện các tình huống "thoái hoá" làm cho phép chứng minh mắc sai lầm hay không. Vì vậy theo cách chứng minh truyền thống, khi chứng minh các mệnh đề phức tạp để tiến hành thật chặt chẽ, không để có kẽ hở là một việc khó. Trải qua hơn 2000 năm, đây là vấn đề mà mọi người chưa thật rõ lắm.

Các định lý mà chúng ta đã học trong các bài giảng tương đối đơn giản và đã được kiểm nghiệm lặp đi lặp lại nhiều lần nên không có các sai lầm kiểu đó. Còn chúng ta, trong quá trình chứng minh các bài toán và nếu kiểm tra cẩn thận các hình vẽ để chúng không vượt khỏi tầm kiểm soát thì cũng có thể tránh được các chỗ hổng gây sai lầm. Việc vấp phải các kết luận sai lầm trong các phép chứng minh hình học có thể là do trong quá trình chứng minh đã bỏ sót một tình huống nào đó, hoặc hình vẽ sai mà khi chứng minh lại dựa vào hình vẽ đã vẽ sai đó.



## Làm thế nào chỉ dùng “compa gỉ” lại vẽ được hình bình hành và tam giác đều

Chỉ cần dùng compa mà lại làm được cả nhiệm vụ của compa và eke. Thành tựu này do một người Đan Mạch là Moli tìm ra đầu tiên, sau đó được một người Italia là Mauroni khẳng định. Sự kiện này đã gây nhiều hứng thú cho các nhà toán học. Mọi người liền nảy ra câu hỏi. Liệu có thể thực hiện việc vẽ đó nếu chỉ dùng eke?

Sau đó người ta nhanh chóng nhận ra rằng: có thể vẽ được tuy có một ít khó khăn. Thế nhưng các nhà toán học pháp là Poncelet và nhà toán học Đức Stanley chứng minh một sự kiện: chỉ cần vẽ lên giấy một đường tròn, rồi từ các công việc vẽ hình cần phải dùng compa và eke!

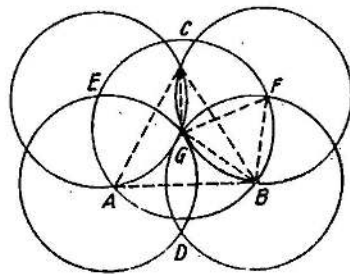
Câu chuyện hạn chế các công cụ dùng để vẽ đến đây tưởng chừng chấm dứt. Đã hạn chế đến mức đó liệu còn có khả năng hạn chế nữa không?

Một trăm năm mươi năm sau các công bố của Stanley, câu chuyện compa - eke đã ngủ yên miên nhiều năm, bỗng nhiên bừng tỉnh bằng một màn tình tế, người mở màn là một nhà hình học nổi tiếng Peidon người Mỹ. Trên một tờ báo ông này đã đưa ra hai bài toán:

Bài toán Peidon 1: Cho hai điểm A, B, với một compa giữ một bán kính cố định, hãy xác định một điểm C thế nào cho tam giác ABC là tam giác đều.

Bài toán 2: Với hai điểm A, B cho trước, liệu có thể dùng một compa giữ một bán kính cố định xác định một điểm M sao cho M là trung điểm của đoạn AB (cần chú ý rằng trên giấy chỉ có 2 điểm A, B mà không phải là đoạn thẳng AB!).

Compa được giữ với bán kính cố định được Peidon gọi là compa gỉ. Chung quanh câu chuyện vẽ bằng compa gỉ thì ngay từ



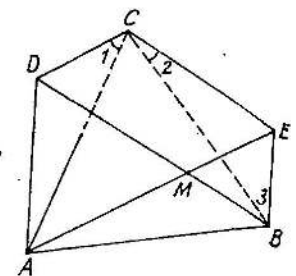
thế kỷ XVII đã có nhiều nhà toán học nghiên cứu. Do vì bài toán quá khó, nên đã qua hai ba trăm năm, cho đến ngày nay, với một bài toán tưởng chừng giản đơn thế mà vẫn còn chưa tìm được lời giải.

Qua các công bố trên báo chí trong bao nhiêu năm vẫn chưa có lời giải chính xác. Cuối cùng một số nhà toán học Trung Quốc đã giải hai bài toán một cách toàn vẹn.

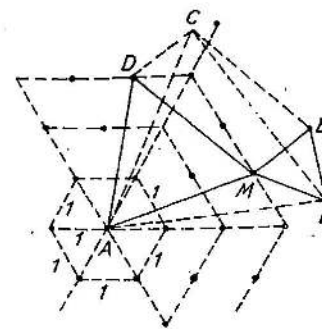
Dưới đây sẽ giả thiết là compa gỉ giữ bán kính cố định bằng 1. Giả sử nếu  $AB < 2$  thì compa gỉ này sẽ dễ dàng xác định được điểm C để cho tam giác ABC là tam giác đều. Lấy A, B làm tâm vẽ các đường tròn, chúng cắt nhau tại D và G. Lại lấy G làm tâm vẽ một đường tròn, đường tròn này cắt các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B tại các điểm E và F. Lại lấy E và F làm tâm vẽ các đường tròn, chúng sẽ cắt nhau tại C, ta dễ dàng chứng minh ABC là tam giác đều (trên đường tròn tâm F dùng định lý góc trên đường tròn ta thấy  $\widehat{GCB} = \frac{1}{2} \widehat{GFB} = 30^\circ$  vì  $\widehat{ACB} = 60^\circ$ . Đồng thời có  $AC = BC$ ).

Thế nhưng với  $AB > 2$  thì các đường tròn tâm A và tâm B sẽ không cắt nhau.

Nếu A, B cách nhau quá xa, ta xác định một điểm M ở trung gian giữa A và B. Trước hết ta vẽ các tam giác đều nhỏ BME và AMD. Lại tìm một điểm C để tứ giác MECD là một hình bình hành và thế là tam giác ABC sẽ là một tam giác đều (bạn thử chứng minh xem?).



Theo tư tưởng quá độ này ta cũng dễ hiểu được phương pháp vẽ dưới đây: trong hình vẽ dưới đây ta lấy A làm tâm dùng compa gỉ vẽ các tam giác với các cạnh bằng 1 làm thành một mạng lưới kiểu “mạng nhện”.



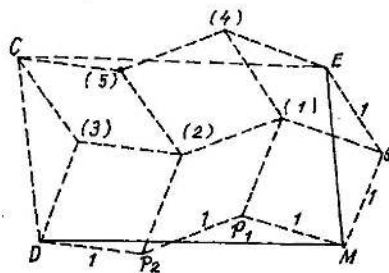
Mạng nhện này tạo thành một lục giác đều. Ta tìm trên mạng một điểm M với  $MB < 2$ . Lại tìm một điểm D để tam giác AMD là tam giác đều. (Chú ý là M và D phải ở trên cùng một tầng của hình lục giác. Bạn có thể từ điểm M mà tìm được điểm D không?). Lại bởi vì  $MB < 2$ , ta có thể dùng compa gỉ và tìm được điểm E để tam giác BME là tam giác đều.

Lại tìm một điểm C để tứ giác MECD là một hình bình hành, vậy rõ ràng là tam giác ABC là tam giác đều. Bài tính Peidon thứ nhất đã được giải.

Thế nhưng trong đó còn có vấn đề: hình bình hành MECD đã được dựng như thế nào? Có thể dùng compa gở để xác định được điểm C không?

Điều đó không khó. Nối M và D bằng các đoạn thẳng có độ dài bằng 1; cũng nối M và E bằng các đoạn thẳng có độ dài bằng 1. (Như hình 108, đương nhiên là trên thực tế sẽ không vẽ các đoạn thẳng, mà chỉ xác định các điểm cuối).

Trên hình vẽ các điểm được biểu đạt bằng các con số. Dùng compa có thể dễ dàng xác định được các đỉnh các hình thoi nhỏ. Cách vẽ hình nên theo thứ tự. Theo Q và P<sub>1</sub> vẽ (1) và P<sub>2</sub> vẽ (2), rồi từ (2) và D vẽ (3), từ E và (1) xác định (4), từ (4) và (2) xác định (5), rồi từ (5) và (3) vẽ C.



## Thế nào là “bài toán phục hiện”?

Trong toán học truyền thống có một loại bài toán thú vị có tên “sâu ăn toán”. Sở dĩ gọi là “sâu ăn toán” vì các công thức toán viết trên giấy đã bị chuột hoặc mối gặm hết một số chữ số, chỉ biết là thiếu một số chữ số, nhưng ở đó vốn có các chữ số gì. Bây giờ yêu cầu bạn hãy tìm đủ mọi

cách để làm hiện lại các chữ số vốn có, khôi phục lại đầy đủ diện mạo của công thức toán học. Vấn đề có lúc dễ có lúc khó. Biện pháp giải quyết thường là phải biết sử dụng các tính chất các chữ số, suy luận logic, mọi người đều có thể làm được.

Mấy năm gần đây người Nhật đã khai thác ở bài toán “Sâu ăn toán” nhiều khía cạnh mới. Mọi người đều biết ở Nhật máy tính hết sức phổ cập,



giá lại rẻ nên có người đã sắp xếp chọn lọc để giảng cho các học sinh nhỏ thì cũng chẳng có gì lạ. Vì vậy trong nhiều phương diện hoạt động thực tiễn người ta thấy việc dùng ký hiệu đơn giản (dấu \*) như trước đây vẫn dùng là chưa đủ mà cần phải dùng các ký hiệu khác để đại biểu cho các chữ số khác nhau.

Đương nhiên có thể lấy các chữ cái để làm ký hiệu. Nhưng chọn loại chữ nào thì tốt hơn? Đầu tiên người ta chọn một cách tùy tiện “gấp chằng hay chớ”. Sau này người ta thấy, trong đó có nhiều điều cần phải suy nghĩ cẩn thận. Nếu chọn lựa tốt thì có thể bắn một phát được hai chim, khiến nó không chỉ là một hình thức suy luận mà có thể nói thành lời, tục ngữ, đồ vật ưa thích, thực phẩm... Loại bài toán này được gọi là “bài toán phục hiện”.

Ví như với bài thơ “Tình dạ tư” (Nỗi nhớ trong đêm vắng) là bài thơ rất nổi tiếng của Lý Bạch.

*Trước giường trăng sáng tỏ*

*Ngỡ như đất trái sương*

*Ngẩng đầu nhìn trăng sáng*

*Cúi đầu nhớ cố hương.*

Người xưa có nói: “có bột thì gột nên hồ”, có người đã dựa vào bốn câu thơ trên cải biến thành hai bài toán phục hiện:

$$\begin{cases} \text{Trước giường} = \text{trăng sáng} + \text{tỏ} \\ \text{Ngỡ như} = \text{đất trái} \times \text{sương} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{Ngẩng đầu} \times \text{nhìn} = \text{trăng sáng} \\ \text{Cúi đầu} \times \text{nhớ} = \text{cố hương} \end{cases} \quad (2)$$

Bài toán đặt ra như thế này: Tại những từ giống nhau bạn hãy chọn và gán các chữ số giống nhau, tại các từ không giống nhau bạn hãy chọn gán các chữ số khác nhau (hoặc có thể giống nhau) miễn là để các phép tính đã cho được nghiệm đúng.

Loại bài toán kiểu này quả là không khó, để cho khỏi phải rườm rà chúng tôi xin nêu ngay kết quả:

$$\begin{cases} 71 = 68 + 3 \\ 90 = 45 \times 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 34 \times 2 = 68 \\ 14 \times 5 = 70 \end{cases} \quad (2)$$

Chúng tôi cũng xin nêu một ví dụ trong tiếng Anh như:

CROSS  
+ ROADS  
-----  
DANGER

HE X WAS = HERE

(Anh ta ở đây)

(Đường ngã tư nguy hiểm)

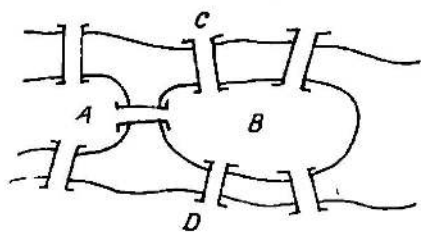
Đáp án sẽ là:

$$\begin{array}{r} 96233 \\ + 62513 \\ \hline 158746 \end{array} \quad 25 \times 103 = 2575.$$

Các bài toán loại này quả là thú vị nên cũng khá phổ biến trong nhiều thứ ngôn ngữ khác như trong các thứ tiếng Nhật, Đức, Pháp, Nga mà chúng tôi không thể dẫn hết các ví dụ ra ở đây.

## Thế nào là bài toán bảy chiếc cầu và bài toán vẽ liền một nét?

Vấn đề bảy chiếc cầu nảy sinh vào thế kỷ XVIII tại thành phố K nigberg, vào thời đó K nigberg thuộc nước Đức còn ngày nay là thành phố Kaliningrad thuộc Cộng hoà liên bang Nga. Vào thời đó ở thành phố K nigberg có một con sông, ở giữa sông có hai hòn đảo nhỏ. Các hòn đảo nối với bờ nhờ 7 chiếc cầu như ở hình (1). Trên hình vẽ A, B là hai hòn đảo, còn C, D là đôi bờ. Cư dân của thành phố K nigberg thường đến dạo chơi trên đảo. Lâu dần nảy sinh câu hỏi: liệu có thể xuất phát từ một điểm,

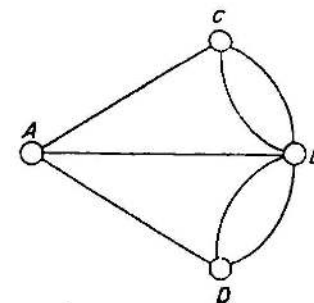


không bỏ sót cũng không đi qua cầu hai lần mà trở về chỗ cũ? Vấn đề này về sau được gọi là bài toán bảy cây cầu. Nếu lược bỏ điều kiện "lại trở về chốn cũ" mà chỉ còn hỏi: "liệu một khách du ngoạn có thể không bỏ sót mà lại có thể chỉ qua cầu một lần? thì

sẽ biến thành vấn đề vẽ liền một nét. Nếu vấn đề được giải quyết ta nói bài toán "có lời giải" nếu ngược lại ta nói vấn đề "không có lời giải".

Vào thời đó nhà toán học Thụy Sĩ là Euler đang sống tại K nigberg và bài toán bảy cây cầu đã gây ở ông nhiều hứng thú. Vào năm 1736, Euler đã công bố một luận văn giải quyết được bài toán bảy cây cầu và sáng tạo ra ngành "toán đồ" là một ngành của toán học. Luận văn này của Euler là luận văn đầu tiên về toán đồ.

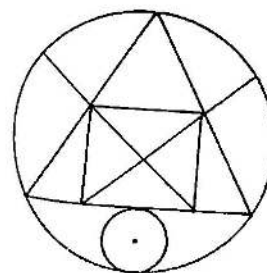
Theo phương pháp toán đồ, để dễ xem xét thảo luận thường người ta dùng phương pháp đơn giản hoá các hình vẽ. Ta biểu diễn các đảo A, B và đôi bờ C, D thành các điểm đỉnh như hình (2). Bảy cây cầu được biểu diễn bằng bảy nét liền cũng được gọi là bảy đường viền. Nếu một đỉnh mà có nối với số lẻ các đường viền, ta gọi đó là đỉnh lẻ, còn đỉnh nối với số chẵn các đường viền ta có các đỉnh chẵn. Nếu như hình vẽ ta bắt đầu từ một điểm đỉnh liên tiếp qua điểm, đường, điểm... đến liên tiếp một điểm đỉnh bất kỳ người ta nói hình này là liên thông. Euler đã chứng minh "quy tắc phân định".



Với một hình vẽ được bằng một nét liền thì hình đồ là liên thông và là những hình mà trừ điểm đầu và điểm cuối thì các điểm khác phải là điểm chẵn.

Yêu cầu để một bài toán đi vẽ liền một nét có lời giải là phải liên thông và bất kỳ điểm đỉnh nào cũng phải là điểm chẵn.

Bài toán bảy cây cầu là bài toán vẽ nét liền đi và về, vì bốn đỉnh A, B, C, D của hình (2) đều là đỉnh lẻ, nên bài toán không có lời giải. Bất kỳ một khách du lịch nào cũng không thể từ một điểm xuất phát lại quay về chốn cũ mà không bỏ sót hoặc đi qua một cây cầu nào đó hai lần. Với hình (2) không chỉ là việc yêu cầu quay về chốn cũ mà ngay việc nét liền cũng không thực hiện được mà không bỏ qua hoặc lặp lại hai lần.



Như vậy bài toán bảy cây cầu chúng tôi đã giới thiệu bài toán vẽ nét liền. Bài toán vẽ nét liền nếu đặt một cách chính xác thì phải phát biểu

như sau: Cho một hình phẳng, liệu có thể giữ cho bút không rời mặt giấy mà xuất phát từ một điểm, các đường chỉ được bút vẽ một lần mà hoàn thành được hình vẽ. Còn nếu yêu cầu sau khi vẽ xong hình thì bút phải quay về vị trí ban đầu thì đó là bài toán vẽ nét liền đi và về. Bạn hãy theo quy tắc Euler để phán đoán xem hình bên có thể là một hình: 1) vẽ liền được một nét; 2) nếu là hình vẽ được một nét thì có thể đi và về được không? Mời các bạn làm thử.

## Thế nào là bài toán bản đồ có bốn màu?

Vào năm 1852, Coxuri vừa tốt nghiệp ở trường Đại học London, khi vẽ địa đồ ông nhận thấy: với một tấm bản đồ chỉ cần dùng tối đa bốn màu là có thể tô đủ để phân biệt được các quốc gia có chung biên giới, tức là màu của các quốc gia có chung biên giới sẽ không điệp nhau.

Ông liền đặt ra cho các anh em của ông đang công tác ở trường đại học là liệu có thể chứng minh được điều đó không?

Các anh em của ông liền hỏi nhà toán học Môcan, Môcan thừa nhận là ông ta không thể phán đoán được đúng sai.



Thoạt nhìn, bài toán bốn màu khá đơn giản. Bạn chỉ cần lấy một tấm bản đồ chưa tô màu và chuẩn bị bốn loại màu. Trước hết bạn có thể tô một quốc gia nào đó, ví dụ màu đỏ, sau đó bạn tô các quốc gia lân cận bằng các màu khác và theo “nguyên tắc bốn màu” bạn sẽ thấy quốc gia có biên giới chung sẽ có màu khác nhau, không bị điệp màu. Quả là việc đó sẽ được thực hiện

khá dễ dàng. Tuy nhiên đó chỉ là sự kiểm chứng mà không phải là chứng minh toán học. Vấn đề bản đồ có bốn màu được đặt ra như một bài toán là một cách phán đoán chung mà không hề chỉ một tấm bản đồ cụ thể nào, là một khái quát cho bất kỳ bản đồ bất kỳ được vẽ trên giấy. Tấm địa đồ ở đây có thể là một địa đồ thực mà cũng có thể làm một tấm địa đồ tưởng

tượng, thậm chí kể cả những cái mà người ta chưa hề nghĩ đó là bản đồ. Cũng có người nghĩ đến các tấm bản đồ mà không đủ năm màu thì không thể tô được.

Như vậy có thể thấy bài toán bản đồ bốn màu tưởng như đơn giản, mà chứng minh thì lại rất khó. Sau này bài toán bản đồ bốn màu cùng với định lý lớn Fermat và bài toán Goldbach được xem là ba bài toán khó lớn thời cận đại.

Vào năm 1879 Kenpu tuyên bố đã chứng minh được bài toán bốn màu. Mười một năm sau bài toán học Hawood chỉ ra rằng cách chứng minh của Kenpu có chỗ không chặt chẽ, nên cách chứng minh đương nhiên không được chấp nhận. Hawood đã ứng dụng phương pháp của Kenpu và chứng minh được rằng cần có năm màu thì có thể tô được bản đồ để cho các quốc gia có biên giới chung không bị điệp màu. Bài toán này có tên là “bài toán năm màu”.

Từ đầu thế kỷ XX trở lại đây, nhiều nhà toán học đã đi theo con đường của Kenpu để nghiên cứu giải bài toán bốn màu và đã thu được nhiều thành tựu. Người ta chứng minh là để giải bài toán này ta không chỉ nghĩ đến một tấm bản đồ đã vẽ sẵn mà phải nghĩ để vẽ ra vô số tấm bản đồ. Để kiểm nghiệm số lớn bản đồ như vậy quả là một việc có khối lượng lớn quá sức người và khó thực hiện được.

Vào năm 1970 đã có phương án dùng máy tính điện tử để giải bài toán này, và người ta đã phải tính toán 11 năm liên tục mới tìm được kết luận.

Sau năm 1970 nhiều người đã cải tiến phương án giải bài toán bốn màu kết hợp với sự tăng nhanh tốc độ tính của các máy điện toán đã mở ra khả năng giải được bài toán bốn màu bằng máy tính.

Vào năm 1976, hai bài toán học Mỹ là Apeil và Hakan đã dùng ba máy điện toán khác nhau và đã dùng đến 1200 giờ tính để hoàn thành việc chứng minh định lý về bài toán bốn màu.

Bài toán bốn màu từ khi đặt ra cho đến khi phát triển thành định lý đã trải qua 120 năm làm việc liên tục của nhiều thế hệ các nhà toán học mới được hoàn thành. Cho đến ngày nay vẫn còn nhiều nhà toán học vẫn đang tìm kiếm lời giải bằng tính toán trên mặt giấy.



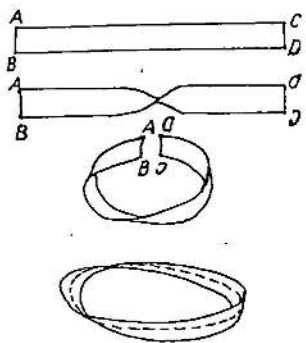
## Làm thế nào để làm được một dải Mobius?

Với một băng giấy, một dải băng vải, bạn có thể dễ dàng phân biệt được đâu là mặt trái, đâu là mặt phải.

Lấy một băng giấy hình chữ nhật dài, quay một đầu một góc  $180^\circ$  sau đó dán hai đầu lại với nhau (xem hình bên dưới). Bây giờ ta sẽ có một vòng giấy có chỗ lượn nghiêng, đó là dải Mobius.

Mobius là một nhà toán học Đức, vào năm 1853 ông đã phát hiện ra dải băng này, nên người ta đã lấy tên ông để đặt tên cho dải băng.

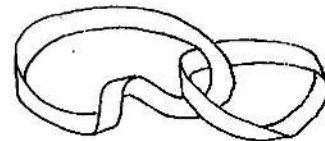
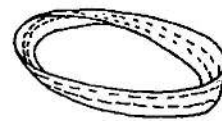
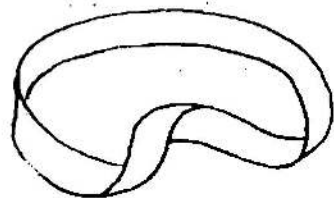
Bạn có thể làm một thí nghiệm như sau, bạn sẽ thấy mặt Mobius quả có một mặt nghiêng.



Dùng một bút chì liên tục không rời bút khỏi mặt giấy vẽ liên tục một đường bạn sẽ quay về điểm ban đầu. Như vậy có thể nói bạn không thể dùng màu sắc để phân biệt mặt trái, mặt phải. Dải băng Mobius có nhiều tính chất lý thú: nếu như bạn theo nét vẽ bút chì ở chính giữa dải băng mà cắt thì sẽ không được hai vòng giấy mà lại được một dải băng giấy với hai chỗ lượn. (Cắt theo đường đứt trên hình vẽ).

Nếu bạn lại chia dải băng làm ba phần bằng hai đường đứt (hình bên trái) rồi cắt hai nhát theo hai đường đó thì bạn sẽ được không phải ba vòng giấy mà lại được hai vòng giấy lồng vào nhau, một vòng Mobius có độ dài gấp đôi, có hai chỗ lượn, một vòng là một dải Mobius bình thường, độ rộng của mỗi băng sẽ bằng  $1/3$  độ rộng của băng ban đầu.

Vào 40 năm trước đây hai nhà toán học Mỹ đã nghiên cứu dải băng Mobius và đưa ra câu hỏi: Dùng băng giấy với quy cách như thế nào (chiều dài, chiều rộng) thì tạo được dải băng Mobius?



Thực chất câu hỏi này là với băng giấy có độ rộng nhất định thì cần có chiều dài tối thiểu tối đa là bao nhiêu để tạo được dải băng Mobius.

Nếu giả sử cho băng giấy có chiều rộng là 1 thì độ dài của băng giấy ít nhất phải trong khoảng  $\frac{\pi}{2}$  và  $\sqrt{3}$ .

Nói cách khác: nếu băng giấy có chiều rộng bằng 1 thì độ dài nhỏ nhất không bé hơn  $\sqrt{3}$  thì có thể làm được dải băng Mobius, còn độ dài nhỏ nhất có thể được thì đến nay vẫn chưa có câu trả lời.

Điều lý thú là dải băng Mobius hoàn toàn do các nhà toán học nghĩ ra, nhưng đã thâm nhập vào lĩnh vực hoá học hữu cơ.

Một số nhà hoá học Mỹ trường đại học Colorado nước Mỹ là Wolba, Litraxi và Holdelik đã tổng hợp được các phân tử có dạng dải băng Mobius.

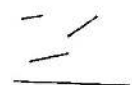
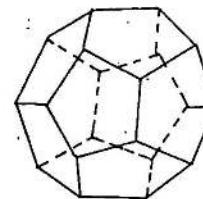
## Bài toán Hamilton

### “chu du vòng quanh thế giới” có ý nghĩa gì?

Vào năm 1859, nhà toán học Anh là Hamilton đã công bố một bài toán khá lý thú làm nhiều người đã phải bỏ nhiều công sức để giải nó. Bài toán như sau:

Một khách du lịch muốn đi thăm 20 thành phố trên thế giới, mỗi thành phố đều có 3 đường đi nối với thành phố bên cạnh. Khách muốn đi thăm tất cả các thành phố đã chọn, lại muốn với mỗi thành phố chỉ ghé qua một lần. Yêu cầu đặt ra là chọn điểm xuất phát như thế nào để sau khi đi thăm 20 thành phố ông ta lại quay về được điểm xuất phát.

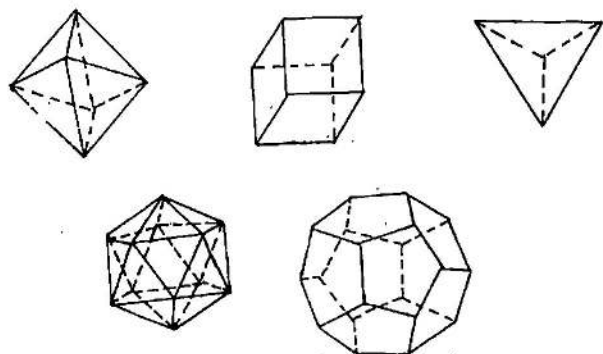
Vậy phải sắp xếp chuyến du lịch như thế nào?





Ta sẽ đúc kết bài toán bằng cách vẽ một khối lập thể như hình trên, trong hình có 20 đỉnh điểm, mỗi đỉnh đại diện cho đường đi giữa các thành phố (mỗi đỉnh có 3 đường). Vấn đề của chúng ta là theo hình vẽ xác định được một đường gấp khúc khép kín có thể chạy qua được hết các đỉnh.

Chúng ta tưởng tượng như khối lập thể được làm bằng dây cao su nối lại với nhau, nhờ vậy ta có thể triển khai khối lập thể thành hình phẳng (xem hình dưới), và chúng ta dễ dàng tìm thấy con đường phải chọn (đường nét đậm hình dưới). Đương nhiên đó chỉ là một giải pháp, còn có thể có nhiều cách giải khác.



Bài toán này ban đầu chỉ là một trò chơi, một bài toán vui, đến thế kỷ XX đã phát triển thành nội dung chủ yếu của một ngành toán học là "đồ luận", mà phương pháp giải lại thuộc một ngành toán học khác, "tôpô học".

Nhà toán học Thụy Sĩ Euler khi nghiên cứu thể tích các khối đa diện lồi cũng đã xem các khối lập thể như được làm bằng dây cao su, biến một khối thành hình phẳng để nghiên cứu. Euler đã phát hiện, bất kỳ khối đa diện lồi có hình thể thế nào nếu gọi số điểm đỉnh là  $v$ , số cạnh là  $e$ , số mặt là  $t$ , chúng đều có chung một tính chất là:

$$v - e + t = 2.$$

Bạn hãy xem: Một khối lục diện đều có 8 đỉnh, 12 cạnh, 6 mặt thì  $v - e + t = 8 - 12 + 6 = 2$ .

Euler chỉ sử dụng công thức mà không chứng minh: Chỉ có 5 loại khối đa diện đều (là những hình khối có các mặt đều là những đa giác đều) là: tứ diện đều, lục giác đều, hình 12 mặt và 24 mặt đều.

## Phải chăng hình học phi Euclide hoàn toàn không giống với hình học Euclide?

Môn hình học mà chúng ta học ở bậc học phổ thông bắt nguồn từ một sách toán của nhà toán học Hy Lạp cổ đại Euclide, Euclide đã tổng kết thành hệ thống lý luận trong tác phẩm "Nguồn gốc", nên môn hình học này được gọi là hình học Euclide.

Các định lý của hình học Euclide đều xuất phát từ tiên đề cơ bản, sau đó suy diễn dần dần mà ra. Có định lý cơ bản là:

Định lý về góc trong: Trong một tam giác tổng các góc trong bằng  $180^\circ$ .

Muốn chứng minh định lý lại phải dùng các tri thức về đường thẳng có một đường và chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Nếu không thừa nhận tiên đề về đường thẳng song song thì không thể chứng minh định lý về góc trong của tam giác và sẽ không phải là hình học Euclide.

Có thể nói tiên đề về đường thẳng song song là đặc điểm của hình học Euclide. Cũng có thể nói tổng các góc trong của tam giác bằng  $180^\circ$  là đặc trưng của hình học Euclide. Không thừa nhận tiên đề song song và cho rằng tổng các góc trong của một tam giác không bằng  $180^\circ$  thì sẽ là hình học phi Euclide.

Trước đây người ta cho rằng chỉ có một loại hình học, đó là hình học Euclide. Từ việc nghiên cứu tiên đề song song người ta đã phát hiện hình học phi Euclide, đó là loại hình học không thừa nhận tiên đề đường thẳng song song. Ban đầu người ta không thể hiểu tại sao lại có được hình học phi Euclide đã sớm tồn tại và không có gì kỳ lạ. Hình học về mặt cầu chính là hình học phi Euclide. Trong hình học Euclide đoạn thẳng là đường ngắn nhất nối giữa hai điểm, còn trên mặt cầu thì đường ngắn nhất nối hai điểm là cung của đường tròn lớn qua hai điểm. Như vậy chẳng như trên hình học mặt cầu, đoạn thẳng không phải là dây cung của đường

tròn lớn sao? Thế nhưng trên mặt cầu thì hai đường thẳng không phải cắt nhau tại 1 điểm mà là tại 2 điểm, qua 3 điểm mới xác định được một đoạn thẳng; và lại trên mặt cầu không có đường song song. Trên mặt cầu, tổng các góc trong của tam giác lớn hơn  $180^\circ$ . Do đó hình học mặt cầu rất khác hình học Euclide.

Một loại hình học phi Euclide khác là hình học Lobasepski. Trong hình học Lobasepski chỉ có một tiên đề không giống với hình học Euclide, đó là tiên đề về đường song song: Trong hình học Lobasepski tiên đề về đường song song được phát biểu như sau:

“Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng ít nhất có thể vẽ hai đường thẳng không cắt đường thẳng đó”.

Từ tiên đề về đường song song có thể thấy trong hình học Lobasepski, tổng các góc trong của tam giác nhỏ hơn  $180^\circ$ . Thế nhưng trong hình học Lobasepski hai đoạn thẳng chỉ cắt nhau ở một điểm, hai điểm xác định một đường thẳng, điều này hoàn toàn giống với hình học Euclide.

Có nhiều định lý cả trong hình học Euclide, hình học Lobasepski, hình học mặt cầu đều giống nhau. Ví dụ: “Trong một tam giác cân thì hai góc kề đáy phải bằng nhau”, “Trong một tam giác mà có hai đường phân giác bằng nhau thì tam giác ấy cân”, cũng như các quy tắc để xác định sự bằng nhau của các hình tam giác thì ở cả ba loại hình học đều như nhau.

Ngoài ra sự khác biệt của ba loại hình học trong một phạm vi nhỏ rất khó phát hiện. Ở đây nói phạm vi nhỏ không phải nói trong phạm vi mấy mét, mấy kilomet mà với cự ly hàng vạn kilomet. Vì vậy, trong kiến trúc, cơ khí, đo đạc... và nhiều lĩnh vực kỹ thuật khác, không thấy có sự khác biệt của ba loại hình học. Vì hình học Euclide đơn giản nhất nên bình thường người ta hay sử dụng hình học Euclide.

Thế nhưng trong nghiên cứu về vũ trụ và một số phạm vi nghiên cứu vật lý thì dùng hình học phi Euclide lại tiện lợi hơn. Nên hình học không phải là vô dụng.

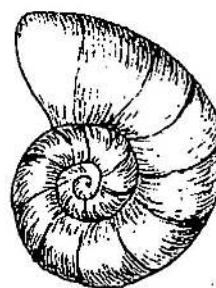
Sự khác nhau giữa hình học Euclide và phi Euclide là cách nhìn khác nhau, phương pháp sử dụng khác nhau. Chúng ta đang sống chỉ trong một loại không gian thế nhưng không phải chỉ có một phương pháp nhìn vấn đề duy nhất. Cũng giống như khi đo nhiệt độ ta có thể dùng hai loại nhiệt kế là nhiệt kế bách phân và nhiệt kế Faranhist.

## Đường xoắn ốc có liên quan gì với con ốc?

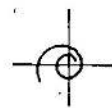
Khi học hình học chúng ta đã biết đường tròn, đường tròn là một loại đường cong. Càng học chúng ta càng biết nhiều loại đường cong như đường elip, đường parabol, đường hyperbol...

Ở đây chúng ta sẽ bàn đến một loại đường cong đặc thù là đường xoắn. Đó là nội dung chủ yếu của hình học vi phân.

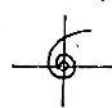
“Đường xoắn” đó là danh từ có nguồn gốc từ chỗ chữ Hy Lạp “dpetia” có nghĩa là xoáy cuộn giấy như tay vòi của cây họ đậu quấn vào cành cây mà leo lên như cây hoa bìm bìm và một số loại thực vật khác. Mặt khác vỏ của nhiều loại ốc như ốc sên, ốc bươu đều có dạng xoắn cuộn, do đó mà có tên “đường xoắn ốc”.



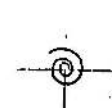
Xoắn Archimède



Xoắn logarit



Xoắn hyperbol

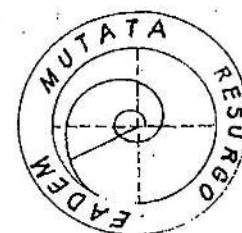


Xoắn parabol

Có nhiều loại đường xoắn ốc như: xoắn ốc Archimède, xoắn logarit, xoắn hyperbol, xoắn parabol, v.v...

Đường xoắn ốc có nhiều tính chất kỳ diệu, ví dụ đường xoắn logarit (do nhà toán học Pháp Descartes tìm ra vào năm 1638) thì cho dù bạn có phóng to hoặc thu nhỏ xoắn logarit thì hình dạng của xoắn không hề thay đổi, cũng như người ta không thể phóng to hoặc thu nhỏ một góc vậy.

Cho nên cũng không lấy làm lạ rằng nhà toán học Thụy Sĩ Danoli thích thú với đường xoắn logarit, đến nỗi ông đã cho làm trên mộ ông một tấm bia có



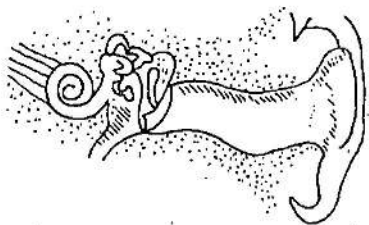
đề dòng chữ (xem hình bên phải) *Eadem mutata resurgo*, có nghĩa là “Ta sẽ lấy lại nguyên hình dạng cũ”.

Điều đó ngoài ý u uất của nhà toán học còn thể hiện ý thức của nhà toán học về mối liên quan giữa đường xoắn ốc với sự sống.

Nếu bạn quan sát kỹ mạng nhện bạn sẽ thấy chỗ kỳ diệu của hiện tượng cuộn xoắn.

Đến như sừng của nhiều loại động vật (ví dụ sừng trâu) phần nhiều có dạng của đường xoắn logarit. Tai trong của người và nhiều loại động vật xoắn ốc mà có thể dễ đoán mô tả xoắn đó bằng một công thức toán học xoắn chặt chẽ.

Một cách tinh vi hơn, nhiều phân tử trong cơ thể sống có liên quan với đường xoắn ốc, ví dụ các phân tử protein và phân tử các axit nucleic cũng có cấu trúc hình xoắn. Ngay như phân tử axit dezoxyribonucleonic (một thành tựu quan trọng nhất của ngành sinh học phân tử của thế kỷ) DNA, đó là chuỗi xoắn kép do hai chuỗi xoắn song song nối với nhau mà trong sinh vật học người ta gọi là chuỗi xoắn kép.



Ngoài ra từ nhiều loại động thực vật, người ta còn tìm thấy nhiều điều kỳ diệu về đường xoắn ốc.

Sự sắp xếp các cuộn lá cây trên thân cây từ trên xuống cũng đi theo dạng đường xoắn ốc.

Trong nhà máy, nhiều chi tiết máy được chế tạo theo dạng đường xoắn ốc, nhiều bánh xe răng trong các máy cũng có răng là đường xoắn.

## Vì sao trong hình học phẳng “học định lý thì dễ mà làm toán lại khó”?

Có nhiều người nói, hình học phẳng và đại số học có nhiều điểm không giống nhau. Trong đại số, khi ta học được một phương pháp, một công thức nếu nắm thật chắc ta có thể giải được toán. Thế nhưng trong

hình học dù ta đã học thuộc các định lý, nhưng có nhiều bài toán không thể nào làm được. Không chỉ trong đám học sinh mà ngay với các nhà toán học cũng có kiểu nhìn nhận tương tự. Cầm một bài toán hình học trong tay thường thì người ta cũng khó mà bắt tay vào việc giải bài toán. Nguyên nhân là ở chỗ môn hình học mà chúng ta học ở cấp trung học là thuộc hệ thống hình học Euclide, môn hình học không cho ta một phương pháp tốt để giải toán.

Khi làm một bài toán hình học, chúng ta vận dụng rất nhiều tri thức, nhưng chúng thuộc loại tri thức nào? Đó là tri thức về các tam giác bằng nhau và tam giác đồng dạng. Nếu trong hình vẽ có các tam giác bằng nhau hoặc tam giác đồng dạng thì chỉ cần tìm thấy sẽ rất dễ dàng. Nếu trong hình không có các tam giác bằng nhau hoặc các tam giác đồng dạng thì phải làm gì? Ta phải nghĩ cách vẽ các đường phụ để tạo ra các cặp tam giác bằng nhau hoặc đồng dạng. Nhưng vẽ các đường phụ như thế nào? Điều đó không có khuôn phép nhất định mà cần phải xem đặc điểm của đề toán, kết hợp với linh cảm của từng người. Có nhiều điều kỳ diệu trong các đường phụ trợ, nhà toán học cần phải rèn luyện trong nhiều ngày mới có thể nhận thấy được.

Ví dụ: Cho một tam ABC có các đường phân giác  $AD = BE$ . Chứng minh  $AC = BC$ .

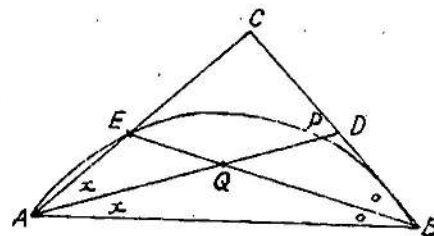
Bài toán này đã được chọn ra hơn một trăm năm trước đây.

Ban đầu các nhà toán học chưa biết làm như thế nào.

Sau đó dần dần người ta tìm ra hơn 60 cách chứng minh. Phương pháp chứng minh đơn giản nhất là phương pháp phản chứng. Giả sử  $AC \neq BC$  và giả sử  $AC > BC$  nên góc  $\hat{O} > \hat{X}$ ; ta chọn trên QD một điểm P thế nào cho  $\widehat{PBQ} = \widehat{EAQ}$  và vì vậy A, E, P, B nằm trên một đường tròn. Thế thì  $\widehat{PBA} = \hat{O} + \hat{X} > \widehat{EAB}$ , do đó  $BE < PA < AB$  mâu thuẫn với giả thiết đặt ra. Vậy  $AC = BC$ .

Chỗ tinh tế của phép chứng minh là đã vẽ cung tròn AEPB. Để nhận thấy và vẽ được cung tròn này phải trải qua thời gian 150 năm. Cần nói thêm rằng cách chứng minh này do hai nhà toán học Mỹ hợp tác tìm ra.

Đương nhiên ngoài các tam giác bằng nhau và tam giác đồng dạng, ta còn có thể dùng các tri thức khác: như tri thức về hình bình hành, về tam



giác cân, tam giác vuông, định lý về các đường trung tuyến. Thế nhưng các hình vẽ này hết sức đặc thù, không phải xuất hiện với bất kỳ bài toán nào. Cần phải sử dụng các tri thức hữu quan để chứng minh cũng như kết hợp với các đường phụ.

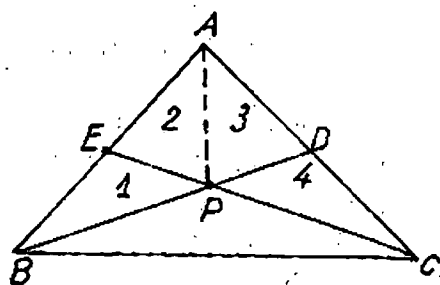
Tóm lại việc học thuộc định lý mà không làm được toán không phải lỗi ở học sinh, cũng không trách thầy giáo, chỉ trách người xưa đã không để lại các phương pháp thật tốt.

Để giải quyết vấn đề này, các nhà toán học không chỉ dựa vào linh cảm, dựa vào các cách giải thông thường mà phải qua nhiều công trình nghiên cứu mới tìm được các phương pháp đủ cơ sở và đủ tin cậy. Kết quả nghiên cứu sẽ cho biết cách phân tích các bài toán hình học, phương pháp tam giác, cách kết hợp các phương pháp khác nhau để thành hệ thống giải toán hình học có hiệu quả. Khuyết điểm chung của mỗi phương pháp kể trên là đòi hỏi người ta phải biết quá nhiều các tri thức dự bị, mà với nhiều bài toán hình học thì các phương pháp giải không phải là đơn giản và dễ thấy.

Thế liệu có thể có các phương pháp đơn giản để nhìn thấy trực tiếp để có thể dựa vào các tri thức toán học sơ cấp mà có thể nắm chắc được cách giải bài toán hình học không? Trong những năm gần đây các nhà toán học Trung Quốc đã tìm thấy rằng có thể lợi dụng các mối quan hệ về diện tích các hình để có thể thiết lập một số yêu cầu cho việc giải các bài toán hình học. Các phương pháp này đều dựa vào các tri thức toán học sơ cấp về các hệ thức tính diện tích các tam giác mà học sinh đã học ở cấp tiểu học. Dưới đây là ví dụ về việc ứng dụng các hệ thức tính diện tích để giải một bài toán hình học khá phức tạp.

Đề: Cho một tam giác ABC, E và D là trung điểm của các cạnh AB và AC. Hai đoạn thẳng BD và CE cắt nhau ở P. Chứng minh rằng  $PB = 2PD$ .

Giải: Vì D là trung điểm của cạnh AC nên diện tích của tam giác 3 và 4 bằng nhau (vì các cạnh này có cạnh đáy AD và CD bằng nhau, chiều cao



tương đương nhau). Tương tự diện tích các tam giác 1 và 2 cũng bằng nhau. Mà diện tích các tam giác ABD và AEC chính bằng một nửa diện tích tam giác ABC và tổng các diện tích các tam giác 1, 2 và 3 bằng tổng diện tích các tam giác 2, 3 và 4, vì vậy diện tích của tam giác 1 và 4 bằng nhau.

Suy ra diện tích của 4 tam giác nhỏ đều bằng nhau và diện tích tam giác ABP lớn gấp đôi diện tích tam giác APD. Mà vì hai tam giác có chiều cao vẽ trên các cạnh BP và PD bằng nhau nên chiều dài của các đáy phải lớn hơn nhau hai lần tức  $BP = 2PD$ . Đó là điều phải chứng minh.

Bạn xem những điều đã sử dụng để chứng minh bài toán trên đây, một bài toán khá phức tạp, không có gì khác hơn là các tri thức về tính diện tích các tam giác.

## Toán học có giúp ta giải quyết các trường hợp khó xử không?

Ông A muốn mua một máy ghi âm nhưng không biết nên chọn mua loại máy nào, ông liền đặt vấn đề lấy ý kiến của mọi người trong gia đình.

Một ý kiến nói: "Cần mua một máy ghi âm có hình thức đẹp để có thể bày như một đồ vật trang trí". Rõ ràng là ý kiến này dựa vào hình thức bên ngoài.

Có ý kiến nói "Có loại máy ghi âm giá 1500đ, có loại máy chỉ với giá 300đ mà với chúng ta thì loại nào cũng dùng để nghe ca nhạc cả, nên chỉ cần mua máy loại rẻ tiền". Như vậy với người này thì chỉ chú ý đến giá cả.

"Không nghe thì thôi, nghe thì phải không có tạp âm". Người này rõ ràng chú ý chất lượng âm thanh.

Một ý khác: "Đồ dùng điện tử rất dễ hỏng, mà đã hỏng thì rắc rối lắm, nên cần phải mua loại nào bền, phải thuộc loại máy nổi đồng cối đá". Máy bền phải là tiêu chuẩn hàng đầu.

Người khác lại cho rằng: "Điều quan trọng là không được mua loại máy nhập nội vì với loại máy nhập nội chỉ cần hỏng một linh kiện thì sẽ không có cái thay thế, thế là đành phải vứt bỏ cả máy. Cần phải ưu tiên xem xét đến khả năng sửa chữa".

Ông A rất hoang mang, không ngờ đến mua một hàng tiêu dùng mà lại phải xem xét quá nhiều các nhân tố như vậy. Thực ra thì trong thực tế ta rất hay gặp tình huống như vậy và nhiều người cảm thấy khó xử. Trường hợp này tốt nhất ta nên dùng phương pháp toán học: Đó là phương pháp chọn lựa theo "nguyên tắc ưu tiên".



Nếu thống kê các ý kiến đề ra cho ông A về việc mua máy ghi âm, ta gán cho mỗi nhân tố xem xét bằng một chữ cái. Tiêu chuẩn giá cả là J, chất lượng âm thanh Y, hình thức bên ngoài W, máy bền là N.

Sau đó ta làm một phép phân tích, so sánh. Cách so sánh là đánh giá tính nổi trội của một nhân tố so với một nhân tố khác, ví dụ bạn cho nhân tố A quan trọng hơn nhân tố B thì bạn viết  $A > B$ , còn nếu bạn cho nhân tố B là quan trọng hơn nhân tố A thì bạn viết  $B > A$ .

Sau thời gian phân tích ông A có kết quả sau:

Giả sử sau khi cân nhắc giữa giá cả và chất lượng âm thanh nếu ông cho chất lượng âm thanh quan trọng hơn giá cả ông viết:  $J < Y$  (hoặc  $Y > J$ ).

Khi cân nhắc giữa giá cả và hình thức bề ngoài, ông A cho giá cả quan trọng hơn, ông sẽ ghi  $J > W$ .

Khi so sánh giá cả với độ bền, ông A cho độ bền là quan trọng hơn ông ghi  $J < N$ .

Nếu ghi lại tình hình so sánh từng cặp nhân tố một, ông A sẽ có bảng so sánh sau đây:

$Y > W; Y > N; W < N$ .

Theo các bất đẳng thức ghi trên đây theo quy ước " $>$ " là yếu tố trội và sắp xếp lại, ta lại có bảng so sánh sau:

$Y > J; Y > W; Y > N$

$J > W; N > J; N > W$

Bây giờ bạn có thể thấy đúng bên trái ký hiệu  $>$ :

Nhân tố Y xuất hiện 3 lần, nhân tố N xuất hiện hai lần, nhân tố J xuất hiện một lần, nhân tố W không có lần nào.

Từ các phân tích ta thấy hiển nhiên là: chất lượng âm thanh Y là yếu tố hàng đầu, độ bền của máy là yếu tố thứ hai, giá cả là yếu tố thứ ba, cuối cùng mới xem xét đến hình thức bên ngoài. Việc sắp xếp các nhân tố theo mức độ quan trọng của từng yếu tố theo thứ tự trước sau, ta gọi đó là bảng "thứ tự ưu tiên". Nói tóm lại khi mua máy ghi âm ông A có thể có được chủ định khi đưa vào bảng thứ tự ưu tiên.



Trong xử sự thường ngày nếu gặp trường hợp khó xử do có quá nhiều nhân tố cần xem xét, trước hết phải xem xét tính quan trọng của từng nhân tố, rồi theo phương pháp chọn thứ tự ưu tiên, bạn sẽ dễ có quyết định hơn.

Trong trường hợp bạn thu nhập ý kiến của nhiều cá nhân và nhiều loại nhân tố, trước hết bạn lập bảng so sánh và sắp xếp các bất đẳng thức cho ý kiến của từng người, sau đó so sánh các bảng và chọn nhân tố có nhiều người đánh giá là trọng yếu nhất, sau đó sắp xếp theo thứ tự các nhân tố có số người ít hơn, sau đó bạn sẽ xem xét theo như đã trình bày ở trên.

## Mật mã được đặt ra như thế nào?

Nói đến mật mã người ta thường nghĩ đến một cái gì đó rất bí mật, liên tưởng đến các công tác đặc vụ, điệp báo. Thực ra thì từ xa xưa đã có mật mã, người ta thường gọi là tiếng lóng. Ngày nay, mật mã được sử dụng khá rộng rãi: Khoá mật mã, tủ mật mã để cất giữ các vật quý. Nhìn về tương lai, người ta không chỉ viết mật mã mà còn phải nghiên cứu cách dịch mật mã, ví như khám phá mật mã di truyền của sinh vật, khám phá các mật mã truyền từ không gian vũ trụ đến trái đất, thật khó mà nêu được hết các phạm vi sử dụng của mật mã.

Cách viết mật mã thật thiên hình vạn trạng, cần phải biết nhiều kiến thức cách viết như dùng hình tượng về sông, núi, hoa, chim, con người, thật có nhiều kỹ thuật viết, mỗi người có cách riêng của mình.

Trong vô vàn các kỹ xảo viết, chúng tôi xin nêu hai cách viết đơn giản nhất: một là cách "đổi chỗ", hai là cách "xếp cặp". Trước hết xin nói về cách "đổi chỗ". Ở châu Âu thời Trung Cổ có khá nhiều nhóm, nhiều tổ chức hoạt động bí mật. Trong đó phải kể đến các nhóm thợ đá vùng núi Alpes có con số đông nhất, các thành viên của nhóm phân bố khắp ở vùng Trung, Đông, Nam Âu, là nhóm có thế lực nhất. Họ đã phát minh cách viết mật mã riêng sử dụng trong bang phái để thông tin cho nhau.

Cách viết mật mã này được gọi phép "Chuyển đổi đơn trị", khi dùng phải dùng phép đối ứng một - một, nếu dùng cẩn thận thì sẽ ít gặp phải sai lầm. Viết mật mã và phiên dịch mật mã đều thực hiện hết sức thuận tiện. Vào thời kỳ mới phát sinh ra mật mã, mật mã chiếm địa vị hết sức quan trọng.

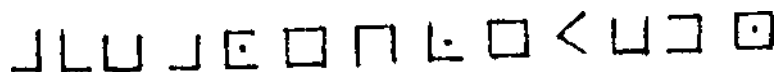
|   |   |   |  |   |   |
|---|---|---|--|---|---|
| A | E | D |  | L |   |
| F | I | H |  | K | M |
| B | G | C |  | J |   |

|   |   |   |  |   |   |
|---|---|---|--|---|---|
| N | Q | R |  | Y |   |
| S | T | U |  | X | Z |
| O | V | P |  | W |   |

Vậy thế nào là đối ứng một - một trong mật mã?

Hãy lấy ví dụ hai cách ký hiệu là bảng cửu cung và chữ thập là các ký hiệu.  
hay được dùng. Ở châu Âu các thợ đá khi đục bia mộ, bàn đá, bệ tế, bảng chỉ đường thường xuyên phải nghe tiếng đục đá nên không nghe được, thấy được rõ, họ phải dùng các ô cửu cung và chữ thập để đại biểu cho các chữ cái của tiếng Anh. Mời các bạn xem hình bên:

Trong các hình này mỗi chữ cái được gán vào một ô có vị trí xác định trong các ô của bảng. Ví dụ chữ A ở ô góc phía trên của bảng cửu cung, trên hình vẽ ký hiệu bằng ; còn chữ N. ở góc bên trái phía trên của bảng cửu cung thứ hai trên hình có dạng và để phân biệt với chữ A ta thêm một chấm • . Từ cách đó, suy ra vị trí 26 chữ cái của tiếng Anh ở trên hình. Dùng một hình vẽ để gán cho một chữ cái ta gọi đó là mật mã đối ứng một - một.



Người ngoài nhìn vào thoát giống như một loạt hình vẽ kỳ lạ vô nghĩa. Nhưng với những người thợ đá dựa vào các nét đặc thù của các hình vẽ và theo quy ước đối ứng một - một họ đọc được câu nói sau đây:

The King is dead (vua đã chết).

Nguyên do là vào lúc đó vua Anh đã chết, trong cung đình có âm mưu làm cuộc chính biến, nên giữ bí mật không phát tang. Các đồng đảng của họ biết được liền thông qua mật mã để truyền tin cho nhau. Đây là cách viết mật mã được sử dụng cho các loại văn tự tượng hình. Ta biết các loại chữ tượng hình như chữ Hán thường do các bộ thư, các bộ phận nhỏ khác của chữ ghép nhau lại mà thành. Ví dụ chữ lý gồm hai bộ phận là chữ mộc 木 và chữ tử 子 tạo thành.

Theo truyện dã sử “*Thanh triều diễn nghĩa*” có kể câu chuyện về một tú tài đã dùng phép phân tích chữ (chiết tự) đặt ra các quy ước đánh số, sắp xếp các bộ thư, các bộ phận của chữ rồi làm thành một cầu vồng để thông báo bí mật về cái chết của vua Thuận Trị. Thuận Trị là hoàng đế đầu tiên của nhà Thanh vào đất Trung Nguyên thời bấy giờ, thường có nhiều tin tức huyền truyền về các sự việc xảy ra trong hoàng cung, Ví dụ tin về

Hoàng thái hậu đi lại với nhiếp chính vương hoàng đế bị diên, các việc đó chỉ có thể dùng các phương pháp bí mật để ghi lại

Vị tú tài đã dùng cách chiết tự, phân tích các chữ thành các bộ thư, các bộ phận nhỏ, sau đó sắp xếp thành cột, quy ước cách đánh số, sau đó đọc thành 1 câu mật ngữ. Nếu sử dụng một quy tắc đã được quy ước có thể sắp xếp các bộ thư, các bộ phận chữ sẽ thành 1 câu có nội dung sau đây:

“Lăng Thuận Trị không có hài cốt, vua đã bỏ đi làm Hoà thượng.”

Nguyên do là vào thời đó trong dân gian có lưu truyền 1 câu chuyện

Vua Thuận Trị khám pháp được nguyên nhân cái chết bí mật của vị ái phi của mình nên đã xuất gia đến làm hòa thượng ở Ngũ Đài Sơn, trong cung đình phải đưa ra tin Vua Thuận Trị chết để che giấu sự thật. (Đoạn này có liên quan đến phép chiết tự và cách giải mã để được nội dung thông tin trên đây, không thể dịch sát, chỉ có thể mô tả để chuyển đổi nội dung N.D)

Theo lời của mật mã đã dịch chứng tỏ vị tú tài đã tin vào các thông tin lưu truyền trong dân gian. Còn sự thực lịch sử sự việc kể trên đúng hay sai phải chờ vào nhà sử gia thẩm định và đi đến kết luận. Việc dẫn ra câu chuyện ở đây chỉ muốn nêu lên một điều là vị tú tài quả là một chuyên gia về mật mã và câu mật mã gồm mười sáu chữ là một kiệt tác. (mười sáu chữ theo nguyên văn chữ Hán). Điều đó cũng nói lên một điều là phương pháp biên soạn mật mã quả có nhiều, mà mỗi quốc gia đều có nhiều sáng tạo theo trí tuệ của từng dân tộc.

## GIẢI TOÁN LOGIC NHƯ THẾ NÀO

Trước hết ta hãy làm một bài toán logic khá lý thú, sau đó sẽ tổng kết phương pháp giải bài toán logic.

Điền Lộ, Vương Uyên, Lâm Mao, Chu Dung, Giả Minh và Trương Tân là sáu bạn học láng giềng. Họ chia nhau học ở trường trung học số 15, trường trung học Quang Minh và trung học Tân Giang và ta chưa biết ai học ở trường nào chỉ có một số tình huống sau đây:

1 – Trường trung học Tân Giang và trung học Quang Minh tổ chức thi đấu cờ tướng, Chu Dung được ghi tên thi đấu ở một trường.

2 – Trường trung học Quang Minh tổ chức dạ hội “Ngũ Tử”, Vương Uyên, Trương Tân và Lâm Mao được mời biểu diễn tiết mục tam tấu.

3 - Lâm Mạo vốn là học sinh trường trung học 15, sau chuyển đến học cùng trường với Tường Tân và học cùng lớp với Tường Tân.

4 - Tường Tân và Giả Minh cùng học với nhau một trường.

5. Giả Minh và Vương Uyên là đại biểu của hai trường trung học khác nhau tham gia vào cuộc thi thơ ca.

6 - Điền Lộ là lớp trưởng, Chu Dung là bí thư chi đoàn. Hai người phối hợp công tác với nhau rất ăn ý.

Căn cứ vào các tình huống kể trên bạn hãy phán đoán các bạn học sinh kể trên đã học ở trường nào?



Để giải bài toán này ta phải suy luận, dựa vào sáu điều kiện đã kể trên là có thể đi đến kết luận một cách chính xác. Câu trả lời khẳng định được biểu thị bằng số "1", câu trả lời phủ định được ghi bằng số "0".

Theo điều kiện 1 ta khó phán đoán được Chu Dung đang học ở trường trung học Tân Giang hoặc trung học Quang Minh, nhưng nói lên rõ ràng là Chu Dung không phải là học sinh trường trung học số 15, ta ghi số 0 ở hàng 15.

Theo điều kiện 2, Vương Uyên, Tường Tân, Lâm Mạo không phải là học sinh trường trung học Quang Minh, ta ghi số 0 ở hàng Quang Minh.

Theo điều kiện 3 Lâm Mạo không phải là học sinh trường trung học số 15. Ta ghi số 0 ở hàng trường trung học số 15. Tường Tân, Lâm Mạo cùng có ký hiệu tương tự.

Bây giờ ta có bảng sau.

|                      | Điền Lộ | Vương Uyên | Lâm Mạo | Chu Dung | Giả Minh | Tường Tân |
|----------------------|---------|------------|---------|----------|----------|-----------|
| Trung học 15         |         |            | 0       | 0        |          | 0         |
| Trung học Tân Giang  |         |            |         |          |          |           |
| Trung học Quang Minh | 0       | 0          |         |          |          | 0         |

Từ bảng cho thấy Lâm Mạo và Tường Tân đã có hai trường ghi số 0 và nhất định hai người này phải là học sinh trường trung học Tân Giang nên ghi số (1).

Từ điều kiện số 4 cũng thấy được Giả Minh cũng học ở trường Tân Giang.

Theo điều kiện 5 Vương Uyên cũng được ghi số 0 ở trường Tân Giang. Theo các kết luận vừa nêu ta sẽ có bảng ghi dưới đây:

|                      | Điền Lộ | Vương Uyên | Lâm Mạo | Chu Dung | Giả Minh | Tường Tân |
|----------------------|---------|------------|---------|----------|----------|-----------|
| Trung học 15         |         |            | 0       | 0        |          | 0         |
| Trung học Tân Giang  |         | 0          |         |          | 1        | 1         |
| Trung học Quang Minh |         | 0          | 1<br>0  |          |          | 0         |

Từ bảng trên cho chúng ta thấy: Không chỉ biết có ba bạn cùng học trường trung học Tân Giang, đồng thời cũng nhận thấy Vương Uyên đã có hai hàng có số 0, còn ô còn lại tất phải ghi số "1" và ở trường trung học 15 ta phải ghi cho Vương Uyên số 1.

Còn ở trường Quang Minh đã có ba số "0", Giả Minh không ở cũng phải ghi số "0" ở ô này, chỉ còn lại hai ô số không đó là Điền Lộ và Chu Dung. Theo điều kiện 6, Điền Lộ và Chu Dung học cùng một lớp, tất nhiên phải ở cùng một trường nên phải ghi cho họ số "1" ở trường Trung học Quang Minh, bởi vì theo điều kiện đầu bài trong sáu người phải có người học ở trường trung học Quang Minh, với bốn người kia ghi số "0" ở trường Quang Minh, nên hai người bọn họ chỉ có thể là học sinh trường Quang Minh.

Nhờ cách suy luận trên đây mà bài toán đã được giải xong.

Bài toán logic xem ra thật là rối rắm, đầu mối thật nhiều làm cho người ta đau đầu. Thế nhưng toán học logic có cách suy luận ngắn gọn, ngày nay học sinh toán học thường phải dựa vào suy luận logic. Thế nhưng ngược lại toán học cũng làm cho logic học thành rõ ràng gọn hơn. Khi chúng ta dùng biểu đồ chỉ cần dùng có hai ký hiệu là 0 và 1 làm cho quá trình suy luận hiện ra rõ ràng, nhìn qua là biết.

Quá trình giải bài toán logic đại thể như sau:



Trước hết lập bảng.

Tiến hành phân tích các điều kiện cho trong đầu bài.

Ghi các kết luận chính xác vào bảng.

Từ bảng ghi sẽ phát hiện các mối liên quan giữa các kết luận cuối cùng.

Có phải “đôi chân nhanh như gió” lại không đuổi kịp chú rùa?

Nhà triết học cổ Hy Lạp Zenon (490 – 430 trước công nguyên) đã đưa ra bài toán “Asin đuổi theo rùa” khá lý thú như sau:

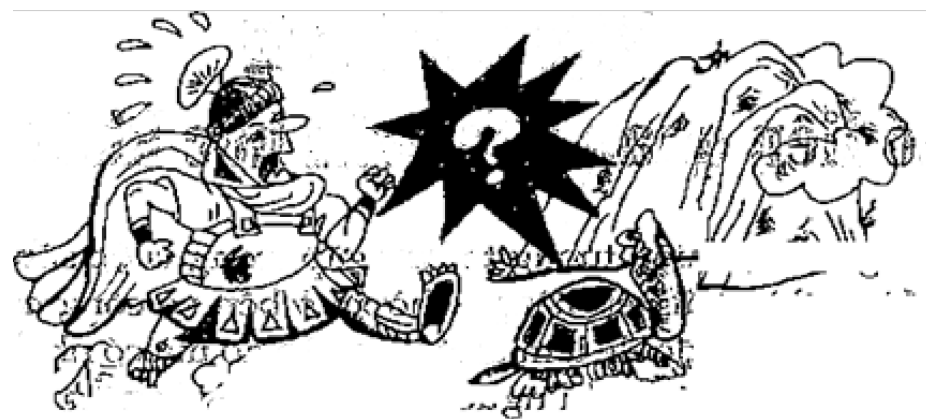
Asin là một vị thần trong thần thoại Hy Lạp, thần chạy rất nhanh và được mệnh danh là người có đôi chân chạy nhanh như gió. So với rùa thì tốc độ Asin nhanh gấp 100 lần tốc độ rùa. Nếu để rùa chạy được 100km rồi Asin mới chạy đuổi theo thì vĩnh viễn Asin sẽ không đuổi kịp được rùa. Nhà Triết học Zenon nêu lý do sau đây:

Với điều kiện đã nêu ở đầu bài thì khi Asin chạy được 100 km thì rùa chạy thêm được 1km, khi Asin chạy tiếp được  $\frac{1}{100}$  km thì rùa lại chạy tiếp được  $\frac{1}{100 \times 100}$  km nữa. ...

Và cứ như thế, khi Asin chạy tiếp được một đoạn đường nữa thì rùa lại chạy tiếp được 1/100 đoạn đường đó; như vậy có thể nói: Giữa Asin và rùa luôn luôn có một khoảng cách. Cứ như vậy thì Asin vĩnh viễn không đuổi kịp được rùa.

Đó hiển nhiên là một kiểu “ngụy biện” (kết luận trái với sự thực). Thế thì sai lầm ở đâu?

Sai lầm là ở chỗ: Nhà triết học này đã đem đoạn đường mà Asin chạy được chia nhỏ từng đoạn đến vô hạn và cứ thế cắt nhỏ mãi đến vô số hạn các đoạn đường và cứ thế lý luận nêu có đoạn đường vô hạn thì thời gian cũng sẽ dài vô hạn. Sự thực thì số đoạn đường tuy gọi là vô hạn nhưng thực tế là hữu hạn, và đó cái gọi là thời gian vô hạn cũng sẽ là hữu hạn.



Ta hãy phân tích theo quan điểm thời gian:

Giả sử trong 1 giờ Asin chạy được 100km, nên chạy trong đoạn đường đầu Asin chỉ cần chạy đúng 1 giờ.

Để chạy đoạn đường thứ hai (1km), Asin chỉ cần thời gian là  $\frac{1}{100}$  giờ,

Để chạy đoạn thứ 3:  $(\frac{1}{100})$  km Asin chỉ cần có  $(\frac{1}{100})^2$  giờ

Để chạy đoạn đường thứ n:  $(\frac{1}{100^{n-2}})$  km Asin chỉ cần có  $(\frac{1}{100^{n-2}})$  giờ

Như vậy Asin muốn đuổi kịp rùa thì phải cần thời gian tổng cộng là :

$$1 + \left(\frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{100^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100^{n-2}}\right) + \dots = 1 \left(\frac{1}{99}\right) \text{ giờ}$$

(Ứng dụng công thức tính tổng hữu hạn của cấp số nhân vô hạn).

Như vậy chỉ cần 1 giờ và 1/100 giờ là Asin sẽ đuổi kịp rùa. Tức là chỉ 1 giờ + với gần 36 giây)

Qua đó chúng ta có thể đến kết luận dù hơi cường điệu một chút. !

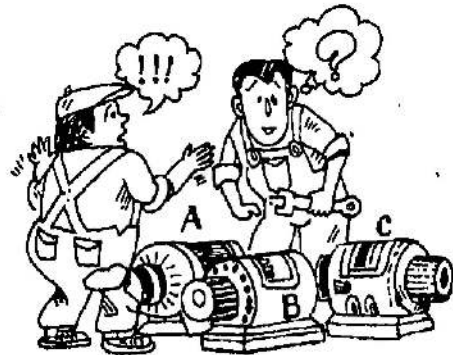
-- Tổng của vô hạn các số không nhất thiết phải là số lớn. !

## Việc xếp hàng có liên quan đến toán học không?

Xếp hàng là một hiện tượng ta hay gặp trong cuộc sống hàng ngày: khi người đông thì phải xếp hàng. Chờ xe ở bến xe công cộng: phải xếp hàng, đến một nơi nào đó để làm một việc nào đó mà có nhiều người đang chờ: phải xếp hàng. Không chỉ người cần phải xếp hàng mà cả sự việc, đồ vật cũng có vấn đề xếp hàng. Bạn có nhiều việc đang cần phải giải quyết, bạn phải chọn việc giải quyết trước, sau. Trong nhà máy, có nhiều linh kiện, chi tiết máy móc cần phải gia công, bạn cần phải chọn các linh kiện, cái gia công trước, cái gia công sau, các linh kiện máy cũng phải xếp hàng. Trong giao thông, xe lửa vào ga; máy bay vào đường hàng, tàu thuyền ghé bến cũng phải xếp hàng.

Vậy trong việc xếp hàng có gì liên quan đến toán học không? Có. Ngành toán học chuyên nghiên cứu vấn đề xếp hàng có tên gọi là "Lý luận về xếp hàng".

Có một lần tại một nhà máy công nhân phụ trách kiểm tra, duy tu phát hiện có ba cỗ máy đồng thời xảy ra sự cố. Sau khi kiểm tra người ta thấy muốn sửa chữa các máy cho thật tốt ta cần số giờ cho mỗi máy nghỉ theo thứ tự 1 giờ, 2 giờ, 3 giờ. Hỏi phải sửa chữa các máy theo thứ tự nào thì lợi nhất?



Ta giả thiết chia các máy thành A, B, C, để sửa chữa chúng cần 1h, 2h, 3h.

Có nhiều cách sắp xếp các máy để sửa chữa ví dụ có các cách A - B - C, A - C - B, B - A - C, B - C - A... Hãy tính toán một chút bạn sẽ thấy: Phương án sửa chữa khác nhau (theo thứ tự khác nhau) thì thời gian để

máy dừng sẽ khác nhau. Ví dụ theo phương án A - B - C và C - B - A thì thời gian dừng máy của cả ba máy sẽ là (chú ý: cần sửa chữa một máy nào đó thì các máy cần phải sửa chữa phải dừng máy từng ấy thời gian):

| Thứ tự sửa chữa         |                    | A-B-C |   |   | C-B-A |   |   |
|-------------------------|--------------------|-------|---|---|-------|---|---|
| Thời gian sửa chữa      |                    |       |   |   |       |   |   |
| A                       | Thời gian chờ      | 1     |   |   | 3     | 2 | 1 |
|                         | Thời gian sửa chữa | 1     |   |   |       |   |   |
| B                       | Thời gian chờ      |       | 2 |   | 3     | 2 |   |
|                         | Thời gian sửa chữa |       | 2 |   |       |   |   |
| C                       | Thời gian chờ      |       |   | 3 | 3     |   |   |
|                         | Thời gian sửa chữa |       |   | 3 |       |   |   |
| Tổng thời gian dừng máy |                    | 12    |   |   | 14    |   |   |

Qua tính toán cho thấy sửa chữa theo phương án A - B - C là tốt nhất. Nói một cách khác: Nên sửa chữa theo phương châm dễ trước, khó sau:

Hãy xem ví dụ khác.

Có năm linh kiện đánh số theo thứ tự (1) - (5) cần phải gia công các chi tiết trên hai cỗ máy cái A và B, trước hết gia công trên cỗ máy A sau đó đến B. Thời gian cần thiết để gia công các chi tiết cho trong bảng sau:

| Linh kiện |  | (1) (2) |   | (3) (4) |   | (5) |
|-----------|--|---------|---|---------|---|-----|
| Thời gian |  |         |   |         |   |     |
| Cỗ máy    |  |         |   |         |   |     |
| A         |  | 3       | 7 | 4       | 5 | 7   |
| B         |  | 6       | 2 | 7       | 3 | 4   |

Để tận dụng khả năng của công nhân, ta cần giảm thời gian chờ đợi của máy B thì phải gia công các chi tiết theo thứ tự nào?

Bạn có thể theo phương pháp xếp hàng như đã trình bày ở trên, sau khi tính toán bạn sẽ thấy gia công các chi tiết theo thứ tự sau đây là lợi nhất (1) → (3) → (5) → (4) → (2).

Ta lại xem xét cách xếp hàng của hai người.

Ở bệnh viện nọ cứ mỗi phút bình quân có hai bệnh nhân vào viện, mà trong bệnh viện, để khám bệnh cho mỗi bệnh nhân cần 4 phút. Mỗi bệnh nhân đến bệnh viện phải tốn 40 phút (kể cả thời gian xếp hàng chờ được khám). Giả sử nếu các bác sỹ nâng cao năng suất, mỗi lần khám giảm được một phút, như vậy mỗi bệnh nhân mỗi lần khám bệnh chỉ cần trên dưới 15 phút.

Như vậy xem ra việc nâng cao năng suất với việc giảm thời gian xếp hàng có liên quan chặt chẽ với nhau.

Theo các bài toán xếp hàng trên đây, trong sinh hoạt hằng ngày ta có thể căn cứ theo kinh nghiệm mà có thể phân biệt tốt xấu, chỉ có điều chưa biết biến thành bài toán xếp hàng thôi. Thực ra trong việc xếp hàng còn có nhiều vấn đề toán học lý thú và có nhiều ý nghĩa thực tế.

## Thế nào là nghịch luận?

Có một số ý tưởng nói, mới nghe tưởng như phải lẽ, nhưng suy luận dần dần dẫn đến tự mâu thuẫn, làm người ta cảm thấy là xằng bậy. Bạn cho rằng điều đó là sai, nhưng lại không chỉ ra được nó sai ở đâu. Còn bảo là đúng thì trái với lẽ thường, lẽ tự nhiên. Các nói đó được gọi là ngụy biện.

Ví như nói "có mấy hạt cát thêm vào sẽ thành một đồng cát". Câu này mới nghe qua thì có vẻ không hợp lý. Nhưng nếu thêm từng hạt cát, nhiều hạt cát sẽ đến lúc thành một đồng cát. Kết quả có phải là đến lúc thêm một hạt cát đó sẽ gây ra sự đột biến chăng? Điều đó thực sự khó trả lời. Bởi vì ta không biết được có bao nhiêu hạt cát sẽ gọi là một đồng cát, vì tiêu chuẩn, quy ước mỗi khác.

Có khá nhiều loại ví dụ tương tự. VD: "Một người mà thiếu một sợi tóc sẽ thành người trọc đầu", "Thêm một chiếc lông gà thì có thể đè bẹp được một lực sĩ to lớn" ; "Một giây trước đó anh ta vẫn còn là một thiếu niên, một giây sau đó anh ta đã trở thành một thanh niên rồi". Sở dĩ phát sinh ra loại suy luận này là do ta dựa vào một số khái niệm không rõ ràng. :

("Một đồng cát", "Thiếu niên", "thanh niên", "trọc đầu", ..v...v. Loại ngụy biện này là ngụy biện ngữ nghĩa, theo ngữ cảnh khác nhau.

Một ngụy biện khác được gọi là ngụy biện Logic. Kiểu ngụy biện nổi tiếng được gọi là ngụy biện Lý Phát Sư.

Ở một thôn nọ có anh chàng tên là Lý Phát Sư, anh ta rêu rao, anh ta chỉ cho phép những ai trong thôn không cạo râu mới được làm việc cạo râu. Thế anh ta có được phép mình tự cạo râu của mình được hay không? Nếu anh ta tự mình cạo lấy râu của mình thì đã trở thành người đã cạo râu, và như vậy sẽ không được tự cạo râu cho chính mình. Nếu anh ta không cho phép tự cạo râu mình thì lại trở thành người được tự cạo lấy râu mặt của mình! Như bạn thấy đấy, ở đây không hề có từ ngữ nào không rõ ràng, mà đã dẫn đến tự mâu thuẫn logic, đó gọi là "nghịch luận logic".

Lại có một câu chuyện khác về nghịch luận được lưu truyền rộng rãi gọi là "Tôi đang nói dối". Có một người phát biểu : "Tôi nói dối". Anh ta nói không đúng chăng? Nếu là đúng thì rõ ràng việc anh ta tự nhận mình "nói dối" là câu nói thật, - thế thì đúng ở chỗ nào?

Nếu là không đúng thì lời anh ta nhận mình "nói dối" là không đúng, hợp sự thật, - như vậy chẳng phải là quá đúng sao ? Như vậy câu trả lời đúng cũng không được mà sai cũng không được! Do đối tượng được nói đến nêu trên là không rõ ràng, cụ thể.

Lại có câu chuyện khác khá lý thú: "nhà tiên tri ngụy biện".

Một người viết trên giấy một câu mới 2 nhà tiên tri để đoán đúng - không đúng. Hai nhà tiên tri liền viết lấy lời dự đoán của riêng mình. Ở một người trên tay anh ta có viết chữ "đúng", còn người kia có viết chữ "không đúng" - thế liệu hai người có ai đoán đúng không? Kết quả là không thể!. Trên tờ giấy có viết câu: Trên tay ông viết không đúng. Người viết trên tay chữ: "không đúng" đã không đoán trúng bởi câu nói này vào thời điểm đó là đúng, còn người viết trên tay chữ: "đúng" cũng không (trúng) đúng nốt, bởi vì nội dung câu nói không viết như vậy.

Một câu truyện ngụy biện khác có tên gọi "Ngày nào thì". Thầy giáo thông báo cho học sinh tuần sau thi, nhưng thi vào ngày nào thì chưa biết. Vậy, ngày nào sẽ thi nhỉ? Các học sinh thi nhau đoán, không phải là thứ bảy đâu, bởi vì tại sao lại không thi vào năm ngày trước mà lại chờ đến ngày thứ bảy, thế là loại bỏ ngày thứ 7. Thế thì thứ 6 chăng? Các bạn học lại phán đoán không có khả năng. Bởi vì, nếu không phải là thứ 2, thứ 3, thứ 4, thứ 5, thứ 7 thì tại sao lại nghĩ sẽ thi vào ngày thứ sáu.

sáu. Nên không thể là ngày thứ sáu được. Học sinh cứ thế suy luận hết ngày này sang ngày khác song cũng không thể đoán được ngày thi là ngày nào. Nhưng thầy giáo cho thi vào ngày thứ tư ngoài dự đoán của mọi người. Quả là không có ai đoán vào ngày đó cả!

Sự thực là, không có ai lại đoán được thầy giáo cho thi vào ngày nào? Các học sinh đã suy luận sai ở đâu chẳng?

Đặc điểm của nguy biện là đưa một mệnh đề mâu thuẫn. Nếu chấp nhận mệnh đề là đúng thì theo suy luận sẽ dẫn đến chỗ phủ định mệnh đề đặt ra, còn nếu phủ định mệnh đề thì đi đến kết luận khẳng định.

Có khi việc “nguy biện” là do vào lúc đó trình độ văn hoá, tri thức của mọi người chưa đủ cao, có một số hiện tượng người ta chưa biết cách lý giải nên người ta cho đó là nguy biện. Ví dụ: Khi người ta phát hiện ra “Trái đất tròn”, nếu căn cứ theo cách nói bấy giờ thì họ sẽ suy ra “người sống ở phía kia của Trái đất sẽ chống ngược đầu trở lại”, thời bấy giờ người ta cho việc nói “Trái đất tròn” là nguy biện. Chỉ cần phân biệt thế nào là “trên”, “dưới”. Chỉ cần biết “dưới” là hướng theo tâm Trái đất thì sẽ không có gì kỳ lạ cả. Một ví dụ khác, vào thời cổ đại thì một hình vuông có cạnh bằng 1 thì đường chéo bằng  $\sqrt{2}$  không phải là số nguyên, cũng không phải là phân số mà là thuộc một loại “số” mới. Một số người cho đó là nguy biện. Nhưng nếu người ta biết rằng  $\sqrt{2}$  không phải là số hữu tỉ, nhưng lại có một loại số khác là số vô tỉ thì bấy giờ lại không có gì là nghịch luận cả.

Chúng ta cũng đã nêu lên bài toán “đôi chân chạy nhanh như gió không đuổi kịp chú rùa” là một nghịch luận nhưng ta đã dùng phương pháp toán học để giải quyết mâu thuẫn.

Các nhà toán học luôn hy vọng là trong lý luận toán học không dẫn đến tự mâu thuẫn. Nếu trong toán học lại xuất hiện một trường hợp nghịch luận nào đó thì mọi người phải ra sức tìm nguyên nhân, tìm cách khắc phục. Trong quá trình phát triển lý luận tập hợp đã từng xuất hiện “nghịch luận Latô”. Khi nghiên cứu nghịch luận này đã làm lý luận cơ sở của toán học phát triển rất mạnh mẽ. Ngoài ra còn có nhiều cách suy luận của một số nghịch đã gợi ý cho các nhà toán học tìm các định lý quan trọng. Trong những năm gần đây có nhiều kiểu, nhiều dạng nghịch luận liên tục xuất hiện, việc nghiên cứu chúng đã giúp cho toán học phát triển.

## Xử lý thế nào với lời nói thật, lời nói dối?

Tại một nơi kia, có một hòn núi đẹp như tranh vẽ, dưới chân núi có một ngã ba. Một trong ba ngã là đường thiên lý dẫn du khách đến đỉnh núi có nhiều phong cảnh đẹp, ngã khác sẽ dẫn bạn đến ngõ cụt, đi sẽ mất công.

Tại ngã ba không hề có bảng chỉ đường, chỉ có hai anh em sinh đôi đang chơi ở đó. Đôi anh em ruột này là anh em sinh đôi hết sức giống nhau về diện mạo, nhưng tính tình lại rất khác nhau: một người luôn nói thật, còn người kia luôn nói dối.



Du khách đến ngã ba này không thể không hỏi đường ở hai anh em song sinh này. Nhưng hỏi thẳng họ thì sẽ vô ích vì khó phân biệt được lời nói nào là thật, lời nào là giả, vì vậy du khách đành phải dừng lại mà không dám đi tiếp.

Giả sử bạn là du khách thông minh, bạn xem cần phải hỏi đường như thế nào để đi tiếp mà không bị lầm đường.

Nhiều người phải bó tay về vấn đề này và không tìm được biện pháp. Nhưng có một cậu bé tìm ra được kế hay.

Cậu ta nói với người cùng cha cùng đi: "Điều đó không khó. Con đã tìm ra rồi. Con sẽ đến hỏi đôi anh em song sinh này, hỏi người nào cũng được. Con chỉ hỏi một câu thôi: "Này bạn, tớ muốn lên núi, bạn hãy bảo tớ biết con đường mà người anh em của bạn chỉ cho tớ lên núi đi ! "

Khi nghe câu trả lời của anh ta, theo con đường anh ta không chỉ ta đi theo, nhất định sẽ đúng đường.

Người cha nói: "Nếu hỏi đúng người nói thật trong đôi anh em song sinh, cậu ta sẽ nghĩ: ta sẽ chỉ con đường mà người anh em nói dối với ta sẽ chỉ cho họ, đó chính là con đường cụt. Nếu như con không đi theo thì tốt. Nhưng liệu, có biết" đó là lời nói dối với ta sẽ chỉ cho họ, đó chính là con đường cụt. Nếu con không đi theo thì tốt. Nhưng liệu có biết đó là lời nói của người nói thật sao ? Không biết cũng không sao. Vì nếu con hỏi đúng người nói dối, anh ta lại nghĩ : "Người anh em của ta sẽ chỉ họ con đường phải đi, không được, ta phải nói dối thôi, chỉ cho anh ta con đường cụt."

Bởi vì bất luận người trả lời là nói thật hay nói dối đều chỉ có thể chỉ con đường cụt. Ta sẽ không đi theo con đường họ mách vì con đường khác, (ngược lại) mới là con đường phải đi . Thôi chúng ta đi thôi!

Người cha nói: " Con nói đúng, người cha vỗ tay tán thưởng, và hai cha con tiếp tục cuộc hành trình.

## Bắt thăm TRƯỚC có lợi hay bắt thăm SAU có lợi ?

Có một vé xem phim mà cả 3 bạn nhỏ đều muốn đi xem phim, không ai chịu nhường cho ai, nên cách tốt nhất là bốc thăm : ai bắt trúng, người ấy được đi. Các bạn nhỏ liền mời một người làm chứng, người làm chứng bí mật viết thăm, trong ba lá, chỉ có 1 lá thăm trúng còn hai lá thăm kia đương nhiên là không trúng. Nhìn bề ngoài các lá thăm hoàn toàn giống nhau.

Đến đây lại nảy ra cái khó khác : bốc thăm tất nhiên có người sẽ bốc trước, người bốc sau, thế thì chọn ai bốc trước, ai sẽ bốc sau?

Bé Triệu thì tin là "nhanh tay sẽ được" vì vậy cậu ta muốn "ra tay trước để chiếm ưu thế", bốc trước sẽ có lợi và chắc dễ được hơn.

Bé Tuấn thì tin ngược lại. Mấy năm trước, cậu đã từng theo cha sang Nhật. Từ xưa người Nhật tin rằng: "Lá thăm cuối cùng sẽ mang lại tốt lành." cậu bé nghĩ chẳng phải khi đi xem kinh kịch, "màn cuối" là điểm quan trọng nhất sao! Nghĩ như vậy cậu bé Tuấn tự nguyện xin bốc thăm cuối cùng. Thực tế cậu bé chẳng cần phải bốc thăm, người khác đã bốc các lá thăm trước, thì lá cuối cùng còn lại là của cậu bé rồi!

Bé Trang thì chủ trương như "Khương Thái Công đi câu, buông câu chờ thời", nên không tranh cãi gì.

Do vậy, đối với 3 bé thì bốc thăm trước hay sau không thành vấn đề, vì mỗi người đều được thỏa nguyện.

Bây giờ ta hãy cùng phân tích để xem ai sẽ chiếm ưu thế, ai sẽ ở thế kém hơn?

Rõ ràng với người bốc thăm đầu tiên, cơ hội trúng thăm là  $1/3$ , người ta nói xác suất để bốc trúng là  $1/3$ ; ta sẽ xem xét tình huống của người bốc thăm thứ hai.

Giả sử bốc thăm đầu:

-- Bốc được lá thăm số 1, sẽ còn lại lá thăm 2 và 3.

-- Bốc được lá thăm số 2, sẽ còn lại lá thăm 1 và 3.

-- Bốc được lá thăm số 3, sẽ còn lại lá thăm 1 và 2.

Cả sáu tình huống đã nêu trên là có khả năng như nhau. Trong đa số trường hợp, thuận lợi để người thứ hai bắt thăm trúng là  $2/6 = 1/3$  (tương đương).

Cùng với cách phân tích như vừa rồi, ta thử làm với người bốc thăm thứ ba. Ở đây các tình huống xảy ra cũng không nhiều lắm, ta có thể liệt kê các tình huống như sau:

-- Người thứ nhất bốc được lá thăm số 1, người thứ hai với lá thăm 2, vậy còn lại là thăm 3.

-- Người thứ nhất bốc được lá thăm số 2, người thứ hai với lá thăm 1, vậy còn lại là thăm 3.

-- Người thứ nhất bốc được lá thăm số 1, người thứ hai với lá thăm 3, vậy còn lại là thăm 2.





Người thứ 1 bốc lá thăm 2, người thứ hai bốc lá thăm 3, còn lại lá thăm số 1.

Người thứ 1 bốc lá thăm 3, người thứ hai bốc lá thăm 1, còn lại lá thăm số 2.

Người thứ 1 bốc lá thăm 3, người thứ hai bốc lá thăm 2, còn lại lá thăm 1.

Trong 6 tình huống vừa nêu thì số tình huống thuận lợi cho người thứ ba là 2 nên xác suất để người thứ ba bắt trúng cũng vẫn là  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

Từ đó ta có thể đi đến kết luận: bắt thăm trước hay bắt thăm sau thực tế như nhau.

Lý thuyết về sắp xếp, tổ hợp và xác suất rất có ích cho đời sống và hoạt động sản xuất, các bạn chớ có xem thường.

## Việc ném đồng tiền, chọn bóng có tuân theo quy luật gì không?

Mấy năm gần đây ở nhiều thành phố, có nhiều người tụ tập ở lề đường phố, gần các cơ quan bày trò chọn bóng, tháo nút, đoán thẻ... đó là những trò cờ bạc. Trò này thu hút những người muốn cầu vận may, mười người chơi phải đến chín người thua, chỉ có chủ bày trò là được nhiều tiền.

Trong trò cờ bạc này vẫn có tiềm ẩn quy luật toán học. Ta thử bắt đầu từ trò đơn giản "xóc đĩa" để phân tích.

Vào thế kỷ XVII ở nước Pháp có con bạc tên là Meile, anh ta thường cùng bạn bè ném xúc xắc ăn tiền. Có một lần Meile cùng một người bạn ném xúc xắc, mỗi người góp 32 đồng tiền vàng để đặt cược, họ quy ước với nhau: nếu Meile ném được ba lần mặt 6 trước thì toàn bộ tiền đặt cược thuộc Meile, còn nếu người bạn lại ném được 3 lần mặt 4 thì toàn bộ số tiền cược thuộc về người bạn.

Cuộc chơi tiến hành, Meile ném được hai lần 6 mặt còn đối phương chỉ được một lần mặt 4. Đột nhiên Meile nhận được tin nhà vua ra lệnh anh ta phải lập tức đến cùng nhà vua tiếp khách. Trò cờ bạc bị gián đoạn nửa chừng. Bây giờ nảy ra vấn đề là phải chia tiền cược như thế nào?

Meile nói: "Giả sử còn một lần mà đối phương lại gieo được điểm 4, ta cũng đã được  $\frac{1}{2}$  của 32 đồng tiền, nếu chúng ta lại tiếp tục luân phiên nhau gieo xúc xắc thì ta còn có nửa hy vọng để nhận 16 đồng tiền còn lại. Như vậy ta phải được  $\frac{3}{4}$  số tiền cược. Người kia không nghe và cho rằng Meile chỉ được  $\frac{2}{3}$  toàn bộ số tiền cược.

Hai người tranh luận với nhau không thôi, nhưng không ai nói rõ được phải chia như thế nào thì mới công bằng. Cuối cùng Meile phải đến hỏi ý kiến nhà toán học Pascal.

Dùng tưởng rằng nhà toán học dễ dàng giải quyết vấn đề được ngay. Ông phải suy nghĩ đến 2 năm mới bắt đầu được đầu mối giải quyết, nên ông liền viết quyển sách với nhan đề "Bàn về các bài toán trong cờ bạc". Sau này vấn đề này phát triển thành một ngành của toán học "lý thuyết xác suất".

Các tri thức xác suất thường được phân tích thông qua sự kiện "gieo đồng tiền".

Bạn thử theo dõi kết cục việc gieo đồng tiền trên bàn xem sau khi tiền rơi thì mặt có quốc huy hay mặt có chữ số lật lên phía trên (ta gọi là mặt ngựa, mặt sấp tương ứng). Nói chung ta không thể đoán chắc được kết cục của sự kiện này. Bởi vì đồng tiền có thể ở trạng thái ngửa hoặc sấp. Trong toán học người ta dùng thuật ngữ sự kiện ngẫu nhiên để chỉ sự kiện này.

Cần chú ý là nếu số lần gieo tiền càng nhiều thì có thể phát hiện được tính quy luật của loại sự kiện ngẫu nhiên này. Ví dụ bạn gieo đồng tiền đến 200 lần thì có thể thấy đồng tiền lật sấp 103 lần, cơ hội xuất hiện là  $\frac{103}{200}$  gần bằng  $\frac{1}{2}$ . Nếu bạn càng tăng số lần gieo tiền thì bạn sẽ thấy: khả năng xuất hiện mặt sấp hoặc mặt ngựa là một nửa nọ, một nửa kia là  $\frac{50}{100}$ . Trong toán học người ta dùng thuật ngữ xác suất để chỉ khả năng đó.

Ta có thể dùng tri thức lý thuyết xác suất để phân tích vấn đề chọn quả cầu.

Trên các đầu đường, người chủ trò chọn bóng tay cầm túi vải, trong túi có 6 quả cầu màu đen và 6 quả cầu màu trắng. Điều kiện chơi là bạn bỏ





ra 2đ thì được chọn 6 quả cầu. Nếu 6 quả cầu bạn chọn được hoặc toàn màu trắng hoặc toàn màu đen, bạn sẽ được 50đ. Bỏ 2đ mà được 50đ quả là hấp dẫn được người chơi.

Còn nếu chọn được 5 quả trắng, 1 quả đen hoặc 5 quả cầu đen và một quả cầu trắng thì bạn chỉ được thưởng 2đ; còn nếu được 2 đen và 4 trắng hoặc 2 trắng và 4 đen bạn chỉ được thưởng hai hào, còn nếu được 3 trắng và 3 đen thì chẳng được thưởng xu nào mà lại mất toi cả 2đ. Thế thì xác suất để chọn được toàn quả cầu trắng hoặc toàn quả cầu đen sẽ là bao nhiêu?

Nếu chọn được toàn quả cầu đen thì toàn bộ số quả cầu đen đã được chọn hết nên không còn khả năng nào chọn được tiếp quả cầu đen nữa, nên khả năng lấy quả cầu đen chỉ một lần, khả năng lấy quả cầu trắng đúng chỉ có một lần.

Nếu lấy năm (5) đen một trắng thì không giống như vậy. Vì khả năng lấy 1 quả cầu trắng từ 6 quả cầu trắng thì mỗi quả cầu đều có khả năng được chọn một lần, nên việc chọn được 1 quả cầu trắng có khả năng được chọn 6 lần, mà từ 6 quả cầu đen việc chọn được 5 quả cầu đen cũng có 6 cách tổ hợp khác nhau. Vì vậy việc chọn được 5 quả cầu đen và 1 quả cầu trắng sẽ là  $6 \times 6 = 36$  lần (loại). Cũng với lý do tương tự việc chọn được 5 quả cầu trắng và 1 quả cầu đen cũng có 36 cách tổ hợp khác nhau và như vậy cũng có 36 khả năng thực hiện.

Việc kết hợp số quả cầu theo phương thức 4 đen 2 trắng hoặc 4 trắng 2 đen thì số các phương thức tổ hợp sẽ càng nhiều, cả thảy có 225 loại.

Còn việc chọn được 3 trắng và 3 đen thì đến 400 loại.

Tổng số các trường hợp chọn 6 quả cầu theo các phương thức sẽ là:

$$2 \times (1 + 36 + 255) + 400 = 924 \text{ lần.}$$

Như vậy: Việc chọn được 6 quả cầu hoặc toàn màu trắng hoặc toàn màu đen sẽ có xác suất:  $2 / 924 = 0,002$ .

Chọn được 1 đen, 5 trắng hoặc 1 trắng, 5 đen sẽ có xác suất:  $72/924 = 0,078$

Chọn được 2 đen, 4 trắng hoặc 1 trắng, 5 đen sẽ có xác suất:  $450/924 = 0,487$

Chọn được 3 đen, 3 trắng sẽ có xác suất:  $400 / 924 = 0,433$

Như vậy bằng tính toán đã rõ là cứ 1000 lần chọn mà để nhận được số tiền thắng cuộc 50đ thì chỉ có 2 lần được cuộc; để nhận được tiền thắng cuộc 2đ thì chỉ có 78 lần; còn cơ hội nhận được 2 hào thì nhiều hơn đến 487 lần; còn không nhận được tiền thưởng và mất trắng 2đ là 433 lần.

Như vậy nếu bạn bỏ ra 2000đ thì cuối cùng thu lại được khoảng:

$$50 \times 2 + 2 \times 78 + 0,2 \times 487 = 353,4 \text{ đ.}$$

Như vậy bạn thu lại được khoảng 353,4đ tiền thưởng đổi lại bạn đã mất ít nhất 1650đ.

Việc chọn quả cầu đã như vậy, việc đoán thẻ, chơi số quay cũng chỉ như vậy thôi. Nói tóm lại, trong bất kỳ trường hợp nào bạn chớ có nhẹ dạ chớ có "chơi thử thôi" mà bị lừa đấy.

## Xác suất có ích lợi gì?

Trên thế giới có nhiều sự việc chúng ta có thể dự đoán chính xác. Ví dụ người ta có thể đoán chính xác lúc nào thì có nhật thực, nguyệt thực, lúc nào có thể xuất hiện sao chổi... Các sự kiện đó đều có thể tính toán và công bố trước. Tuy nhiên có nhiều sự kiện khác bị chi phối bởi tính ngẫu nhiên mà người ta khó dự liệu được.

Trong một thành phố, hàng năm có số trẻ con sinh ra và người già chết đi. Nhưng chúng ta thật khó mà xác định trong một tuần lễ nào đó chính xác có bao nhiêu em bé được sinh ra, có bao nhiêu người chết đi.

Những sự việc khó biết được chính xác như vậy kể ra thì rất nhiều.

Nhân viên các cửa hàng không thể dự đoán ngày hôm nay có bao nhiêu khách hàng, đài khí tượng khó dự báo được trong năm sẽ có bao nhiêu ngày mưa. Người xạ thủ dẫu giỏi đến mấy cũng không nói chắc được phát súng của mình có đúng điểm đen không, cụ già trồng dưa giàu kinh nghiệm cũng không dám chắc ruộng dưa của mình năm nay thu được bao nhiêu kilô dưa...



Dù không thể nói chính xác nhưng nếu ước lượng được đại thể cũng đã là tốt. Có nhiều sự việc khó nói được chính xác nhưng xem đi, xét lại dường như lại có quy luật, đó là quy luật xác suất hoặc quy luật thống kê. Ví dụ trong sự kiện gieo đồng tiền; gieo một lần thì việc đồng tiền lật ngửa hoặc lật sấp thì quả là khó nói. Nhưng nếu gieo đồng tiền nhiều lần thì đại thể số lần xuất hiện mặt ngửa, mặt sấp gần bằng một nửa, đó là điều khẳng định. Loại quy luật liên quan đến một số lớn ta gọi đó là hiện tượng xác suất.

Các sản phẩm được các nhà máy sản xuất ra phải qua kiểm tra chất lượng. Nhưng việc kiểm tra chất lượng từng sản phẩm thì quá tốn kém và có khi không thực hiện được. Ví dụ với loại đồ hộp, muốn kiểm tra thì phải mở hộp hoặc khoét một lỗ nhỏ, thế thì khi kiểm tra xong lại có thể bán được sản phẩm không? Được, ta thử kiểm tra theo kiểu chọn mẫu. Trong 100 hòm ta chọn ngẫu nhiên 10 bình phát hiện 2 bình không hợp quy cách. Vậy có nên xuất xưởng lô hàng này không?

Nếu không cho xuất xưởng thì huỷ toàn bộ lô hàng chẳng? Hay là lại chọn 10 bình khác kiểm tra lại. Liệu có phải việc có hai bình không hợp cách là do việc chọn mẫu sai không? Để giải quyết các vấn đề này cần có tri thức về xác suất.

Trong thành phố cần có điện thoại công cộng. Bưu điện cần bao nhiêu tuyến đường dây, bao nhiêu công nhân phục vụ cho các tuyến? Nếu ít sẽ không đủ dùng, các cuộc nói chuyện sẽ không thông. Nhiều quá, sẽ tốn kém tiền bạc, gây lãng phí. Muốn đảm bảo việc phục vụ được tốt mà lại không gây lãng phí, ta cần nhờ đến tri thức xác suất.

Trong trận chiến, việc bố trí binh lực của kẻ địch, ý đồ chiến lược, phương án tác chiến đều được bảo mật nghiêm ngặt. Cần phải tiến hành trinh sát nhiều mặt, phân tích tình hình nhiều lần, cũng không thể cho là hoàn toàn chuẩn xác. Khi đặt phương án tác chiến người cầm quân không thể không tính đến các yếu tố ngẫu nhiên. Ví dụ khi tấn công địch cần chia mấy mũi, bắt đầu vào thời điểm nào, việc phân bổ hỏa lực phải thế nào cho hiệu quả cũng cần phải biết các tri thức xác suất.

Như vậy phạm vi sử dụng tri thức xác suất quả là rộng rãi: việc theo dõi kiểm soát chất lượng sản phẩm, dự báo thời tiết, tính toán sử dụng nông phẩm, dự báo thị trường... không thể không dùng tri thức xác suất. Khi gặp các sự việc không chuẩn xác, tại những sự việc mà tính ngẫu nhiên phát sinh tác dụng ta cần có sự giúp đỡ của tri thức về xác suất.

## Các phương trình ẩn số bậc ba, bậc bốn có cần công thức chứa căn thức không?

Chúng ta đều biết khi giải phương trình bậc hai một ẩn số  $ax^2 + bx + c = 0$  ta dùng công thức  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  có chứa các hệ số của phương trình ở trong căn thức.

Công thức này do Al. Hoaroximo người vùng Trung Đông tìm ra vào thế kỷ IX.

Phương trình bậc ba  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  có cần công thức chứa căn thức không? Có. Công thức này do Cardan người Italia công bố trong sách *Về các phương pháp lớn trong đại số* và người ta thường gọi là công thức Cardan. Nhưng sự thực thì người tìm ra công thức này không phải là Cardan mà là Tartaglia. Tartaglia cũng là người Italia sinh năm 1500.

Vào năm 12 tuổi, ông bị quân xâm lược Pháp chém bị thương ở đầu và ở đầu gối, từ đó nói năng ngọng nghịu, mọi người liền đặt cho ông một biệt danh là Tartaglia (theo tiếng Italia có nghĩa là nuốt cả lời) còn tên thực của ông thì ít người gọi. Ông tự học mà thành tài, thành một nhà toán học. Ông tuyên bố đã tìm được phương pháp giải phương trình bậc ba. Có người nghe nói tỏ ý không tin, liền tìm ông để đua tài, mỗi người đua cho đối phương 30 đề để giải. Kết quả Tartaglia đã giải hết 30 phương trình, còn người kia thì vẫn chưa được giải một bài.



Tartaglia đã toàn thắng nhưng tuyệt nhiên không chịu nói gì về việc giải phương trình bậc ba. Bấy giờ nhà toán học Cardan đứng ra yêu cầu Tartaglia nói cho ông biết cách giải phương trình bậc ba, nhưng bị Tartaglia cự tuyệt. Sau này Cardan đã phải hứa tiến cử Tartaglia với pháo binh Tây Ban Nha, và thề sẽ vĩnh viễn không tiết lộ bí mật phương pháp giải phương trình bậc ba. Lúc bấy giờ Tartaglia mới phổ biến cho Cardan phương pháp giải phương trình bậc ba một ẩn số. Sáu năm sau, Cardan đã không giữ lời hứa với Tartaglia, đã cho công bố phương pháp giải phương trình bậc ba một ẩn số trong quyển sách *Về các phương pháp lớn trong đại số*, phương pháp giải có cải tiến. Người đời sau gọi phương pháp này là “công thức Cardan”. Tên tuổi của Tartaglia hoàn toàn bị quên lãng, cũng như người ta đã quên cả tên thật của ông.

Việc dùng công thức chứa căn thức để giải phương trình bậc bốn  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  do một học sinh là Firolie tìm ra.

Về việc giải phương trình bậc ba, bậc bốn dùng căn thức vì có bước cần đến khái niệm số phức nên ở đây không giới thiệu.

Sau khi tìm được cách giải phương trình bậc ba, bậc bốn có dùng căn thức, người ta nỗ lực tìm kiếm các cách giải phương trình bậc năm một ẩn số có dùng căn thức. Ba trăm năm đã qua nhưng chưa có ai thành công, kể cả không ít các nhà toán học lớn cho đến nhiều người khác.

Trong lúc mọi người đương tìm cách giải một cách vô vọng thì có người xem xét từ hướng ngược lại, với các phương trình có bậc từ năm trở lên không giải được bằng công thức căn thức? Về điều này đã được nhà toán học trẻ là Abel chứng minh vào năm 1824. Ông đã chứng minh là:

Với  $n \geq 5$  thì phương trình một ẩn số không có công thức giải (tức không có công thức căn thức).

Tuy nhiên việc nghiên cứu này chưa kết thúc, bởi vì người ta thấy với  $n > 5$  thì có một số giá trị  $n$  nào đó ta có thể giải được phương trình với căn thức (ví dụ  $x^n - 1 = 0$ ), lại còn vấn đề với giá trị nào của  $n$  thì phương trình bậc  $n$  ( $n \geq 5$ ) có thể giải bằng công thức căn thức.

Cách đây không lâu một vấn đề của toán học nửa đầu thế kỷ XIX được một nhà toán học trẻ nước Pháp là Carowali đã chứng minh bằng một phương pháp hoàn toàn mới, do đó đã sinh ra một ngành toán học mới: môn toán “số luận”.

## Thế nào là “độ tin cậy” của toán học?

Ngày 28 - 1 - 1986, tàu vũ trụ của Mỹ Challenger khi bay được hơn một phút thì nổ tung, làm một chiếc máy bay với giá 1,2 tỉ đô la bị thiêu trụi, toàn bộ 7 nhà du hành bị tử nạn.

Thế trong chuyến bay này của tàu vũ trụ đã có gì sai sót?

Qua điều tra đã chứng minh được rằng đó là do động cơ tên lửa phụ ở đuôi có bộ phận điều chỉnh bị kẹt nên bị vô hiệu mà dẫn đến tai hoạ.

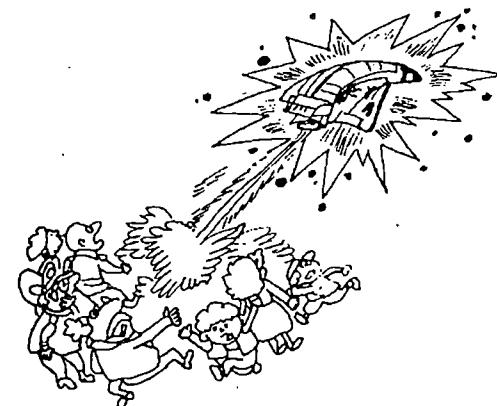
Như vậy chỉ vì một cái vòng đệm không tin cậy mà đã gây ra một bi kịch lớn. Từ đó có thể thấy chất lượng của một chi tiết, tức độ tin cậy của một chi tiết có ảnh hưởng to lớn đến một cỗ máy lớn hoặc một hệ thống như thế nào!

Trong du hành vũ, ở trạm điện trung tâm tuyệt đối không có trục trặc hoặc xảy ra sự cố, tin cậy an toàn là một việc lớn.

Do đó đã nảy sinh một môn lý luận toán học mới, chuyên môn nghiên cứu khả năng làm việc bình thường của một thiết bị nào đó trong một thời gian nhất định nào đó là lớn hay nhỏ. Đó chính là ngành “toán học về độ tin cậy”.

Từ những năm 50 của thế kỷ XX người ta mới tiến hành nghiên cứu các tính toán định lượng. Người ta thấy rằng: một chi tiết vô hiệu, không chỉ làm chi tiết bị phá huỷ mà làm cho cả thiết bị có chi tiết đó, hoặc cả hệ thống bị hư hại. Cho nên, đối với độ tin cậy của các chi tiết cần phải được tính toán chính xác và cẩn thận.

Ví dụ một máy thu hình không làm việc bình thường, ta nói máy đã hỏng rồi! Nhưng với một chuyên gia họ sẽ nói: “Máy không hỏng đâu, chỉ cần thay một chi tiết là máy lại làm việc bình thường”. Như vậy chỉ với một chi tiết nhỏ bị hỏng là làm hỏng cả một máy thu hình. Một máy bay



có một hai trăm hành khách đang bay thì một con mồi cũng có thể làm ảnh hưởng đến sự an toàn của máy bay. Như vậy độ tin cậy là một vấn đề hết sức trọng yếu.

Một chiếc xe đạp hoặc một cái máy may đều có thể do gần một trăm chi tiết cấu tạo nên (tức với cấp 102), thế thì tính an toàn của các chi tiết theo bình thường, ít nhất phải đến 99% (0,99) trở lên, nghĩa là trong 100 chi tiết thì không được có quá một chi tiết không hợp cách. Nếu không thế mà dùng chi tiết này lắp vào xe đạp hoặc máy may thì toàn bộ xe đạp hoặc máy may không hợp cách. Vì vậy với máy may hay xe đạp thì không cho phép có quá một chi tiết không hợp quy cách. Đương nhiên là đối với xe đạp hoặc máy may thì điều đó có thể không ảnh hưởng ngay đến sự làm việc bình thường hoặc nếu có ảnh hưởng thì chỉ cần thay thế chi tiết đó là xong. Nhưng với máy bay đang bay trên trời thì sai sót đó nhiều khi không cứu vãn được, nên không cho phép xảy ra tình trạng đó.

Trên máy bay vũ trụ có đến hàng trăm vạn chi tiết (cấp 106). Để máy bay bay bình thường yêu cầu mỗi chi tiết của máy bay (ít nhất là những chi tiết ở các bộ phận quan trọng) phải ở tình trạng tuyệt đối tin cậy. Nếu không sẽ không thể tưởng tượng được điều gì sẽ xảy ra.

Với các máy bay vũ trụ thì yêu cầu độ tin cậy phải đến 99,9999%, tức các linh kiện, chi tiết phải đạt độ tin cậy 0,9999999999 trở lên, nói một cách vắn tắt cứ 1 tỉ chi tiết phải không quá một chi tiết không đủ tin cậy.

Đương nhiên là độ tin cậy còn bao hàm nhiều nhân tố khác, độ tin cậy của chi tiết là một hạng mục.

Qua tính toán người ta chứng minh được rằng, với loại máy bay vũ trụ nếu các chi tiết đạt độ tin cậy 0,999999 thì khi máy bay bay lên trên không chỉ đạt độ tin cậy 37%. Hiển nhiên đó là con số còn xa với đòi hỏi của người ta. Đó chính là vấn đề trọng yếu mà toán học tin cậy nghiên cứu.

## Thế nào là “dự đoán”?

Trước hết ta hãy xem dự đoán được hình thành như thế nào?

Ta biết 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... là những số nguyên tố. Thế giữa các số nguyên tố có mối quan hệ gì với nhau không? Có người đầu tiên phát hiện:  $3 + 2 = 5$ ,  $5 + 2 = 7$ ,  $11 + 2 = 13$ ,  $17 + 2 = 19$ . Từ đó ta có thể thấy đặc điểm: 3

và 5; 5 và 7, 11 và 13; 17 và 19 làm thành một cặp số nguyên, trong từng cặp số hai số nguyên khác nhau 2 đơn vị. Có thể nói đó là cặp các số song sinh hay gọi là nguyên tố song sinh.

Trên đây là 4 cặp số nguyên tố song sinh, thế liệu có bao nhiêu cặp số nguyên tố song sinh? Tìm tòi thêm nữa ta thấy các cặp 29 và 31, 41 và 43; 59 và 61, v.v... Như vậy các cặp số nguyên tố song sinh không phải là ít. Do đó các nhà toán học dự đoán: có phải số các cặp số nguyên tố song sinh là vô hạn không?

Từ đó có thể thấy các dự đoán được hình thành trước hết từ việc quan sát các ví dụ thực tế, từ các dự đoán này có thể đi đến các mệnh đề. Các mệnh đề này có thể là chính xác hay không chính xác nên ta dùng thuật ngữ “dự đoán” để chỉ các mệnh đề đó là hoàn toàn thích hợp.

Từ dự đoán có thể đi đến hai kết cục: Mệnh đề được chứng minh là chính xác ta sẽ có định lý; nếu mệnh đề bị phủ định thì dự đoán bị bác bỏ.

Chứng minh để khẳng định hoặc phủ định một dự đoán thường rất khó. Trên đây chúng ta vừa trình bày về các số nguyên tố song sinh, đó là dự đoán đã được hình thành từ xa xưa. Cho đến nay, qua nghiên cứu, người ta chỉ mới tìm thấy: số các cặp số nguyên tố song sinh ngày càng nhiều, ví dụ số 10016957 và 10016959 làm thành một cặp số nguyên tố song sinh. Cho đến năm 1979 người ta biết được cặp số nguyên tố song sinh lớn nhất là  $1159124985 \times 2^{2304} - 1$  và số  $1159124985 \times 2^{2304} + 1$ . Còn dự đoán về cặp số nguyên tố song sinh vẫn còn chưa được chứng minh.

Phủ định dự đoán là một việc làm ngược lại. Vào năm 1640, Fermat dự đoán hình như  $F_n = 2^{2^n} + 1$  là một số nguyên tố với  $n$  bất kỳ. Ví như:  $F_0 = 3$ ;  $F_1 = 5$ ;  $F_2 = 17$ ;  $F_3 = 257$ ;  $F_4 = 65537$ . Nhưng hơn 90 năm sau, Euler tìm thấy  $F_5 = 4294967297$  không phải là số nguyên tố mà là một hợp số và bằng  $641 \times 6700417$ . Như vậy dự đoán của Fermat là sai, một chứng minh ngược đã bác bỏ dự đoán Fermat.

Các nhà toán học rất thận trọng khi đưa ra dự đoán. Một dự đoán được chứng minh hay bị bác bỏ là một sự kiện lớn.



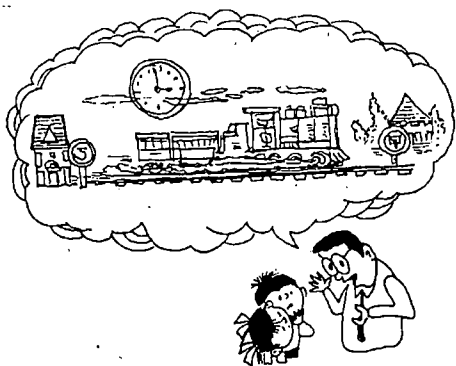
Khi một dự đoán được đưa ra sẽ lôi cuốn mọi người nghiên cứu nó. Trong quá trình nghiên cứu các dự đoán, thường phát sinh cái lý luận phương pháp mới, thúc đẩy toán học phát triển. Việc phủ định một dự đoán, cũng có thể có tác dụng thúc đẩy toán học tiến bộ. Các dự đoán đều là những vấn đề khó; trong toán học còn có đến hai ba chục dự đoán.

Còn có nhiều vấn đề quá khó, khó đến mức người ta chưa biết đưa ra dự đoán như thế nào. Ví dụ khi đã biết một số nguyên tố lớn nhất rồi thì số nguyên tố lớn tiếp sau sẽ ra sao? Về câu hỏi này đến ngay một mô phỏng đại khái cũng không thể lường tượng được, như vậy là không thể đưa ra được dự đoán.

## Thế nào là mô hình toán học?

Nói một cách đơn giản đó là việc biến vấn đề thực tế thành một vấn đề toán học, vấn đề toán học này được gọi là mô hình toán học của vấn đề thực tế.

Bạn đã làm nhiều các đề tài ứng dụng chưa? Mỗi một đề tài thực tế đều có thể có mô hình toán học tương ứng.



Thông thường thì mô hình đơn giản hơn vật thực rất nhiều. Ví dụ so với máy bay thực thì mô hình máy bay đơn giản hơn. Mô hình cơ thể người còn đơn giản hơn con người thật. Mô hình toán của một vấn đề thực tế sẽ đơn giản hơn vấn đề thực tế.

Có loại vấn đề thực tế gọi là vấn đề hành trình. Trong một vấn đề hành trình người ta nói: “Trong một giờ xe lửa chạy được bao nhiêu kilomet”. “Mỗi giờ bạn đi được bao nhiêu kilomet”. Sự thực thì xe lửa chạy có lúc nhanh, có lúc chậm. Lúc khởi động thì chạy chậm, xuống dốc chạy nhanh, lên dốc chạy chậm, khi xe hãm phanh thì tốc độ chậm dần, đến lúc dừng hẳn.

Tốc độ người đi, nhanh chậm không phải lúc nào cũng giống nhau. Đi trên đường có lúc dừng chân mấy phút để uống nước, có lúc đi toilet, khi đi bị nóng toát mồ hôi thì dừng lại cởi bớt áo. Trong thực tế thì tình hình quả là phức tạp. Khi nói mỗi giờ đi được X kilomet là so với tình hình thực tế đã đơn giản hoá đi nhiều lắm, biến tốc độ đi có lúc chậm nhanh thành “tốc độ ảo”. Nếu không đơn giản hoá đi thì sẽ rất khó giải quyết được vấn đề, thậm chí không giải được.

Có nhiều công việc thực tế, ví dụ khi làm một cái hộp bằng thép ta có thể tính toán cần phải dùng bao nhiêu mét vuông thép tấm. Khi tính toán ta thường không tính thép ở chỗ giáp mí, đó cũng là một cách đơn giản hoá vấn đề.

Cũng là mô hình máy bay nhưng từ thô đến tinh đã khác nhau rất nhiều. Mô hình máy bay đơn giản nhất thì chỉ để nhìn xem chứ không cho bay được. Mô hình máy bay bay được có loại dùng lực căng của dây cao su làm động lực thì so với máy bay thực còn cả một khoảng cách rất xa. Có loại mô hình máy bay dùng động cơ đốt trong làm động lực thì đã gần với máy bay thực nhiều hơn rồi. Với mô hình toán học cũng có tình trạng tương tự: cùng với một vấn đề thực tế có thể có mô hình toán học thô, mô hình toán học tinh tế.

Ví dụ để đánh giá sự thay đổi về nhân khẩu ở một thành phố trong vòng 20 năm, ta có nhiều phương pháp thiết lập mô hình toán học.

Cách làm đơn giản nhất là điều tra số nhân khẩu của thành phố nọ trong mấy năm qua, nếu năm sau so với năm trước nhiều hơn, ta sẽ rút ra tỉ lệ số tăng bình quân, rồi theo tỉ lệ đó tính toán ra tình hình cho những năm về sau. Đó là một mô hình toán học. Mô hình này quả là còn thô. Đối với một thành phố mới, một thành phố cửa biển, một thành phố ở vùng sâu, mấy năm trước đã có nhiều nhân khẩu mới nhập, hơn nữa nếu có số thanh niên nam nữ đông đảo thì nhất định không nên dùng mô hình vừa trình bày ở trên. Ví dụ trong mấy năm trước nhân khẩu từ 1 vạn tăng đến 8 vạn. Nếu từ số liệu này tính ra tỉ lệ tăng hằng năm để rồi tính nhân khẩu của thành phố sau 20 năm mà dựa vào tỉ lệ đó thì có thể số nhân khẩu của thành phố tương lai sẽ đến hàng chục triệu, như vậy quả là kỳ dị.

Nếu muốn lập mô hình tinh tế hơn hợp với tình hình thực tế hơn, ta cần phải xem xét nhiều yếu tố: Tìm nguyên nhân sự tăng nhân khẩu của thành phố trong những năm trước? Các nguyên nhân này sẽ thay đổi như thế nào trong tương lai? Từ nay về sau số nhân khẩu nhập vào sẽ chịu sự

không chế nào? Đến năm nào thì không còn số lớn người nhập cư vào thành phố? Từ nay về sau tỷ lệ tăng dân do sinh đẻ sẽ là bao nhiêu? (Điều đó liên quan đến tỉ lệ nam - nữ, độ tuổi, kế hoạch sinh đẻ), tỉ lệ tử vong?

Thế có phải việc xem xét càng tỉ mỉ thì mô hình sẽ càng tốt không? Điều đó cũng không nhất thiết. Việc xem xét càng tỉ mỉ đương nhiên sẽ càng tiếp cận được với tình hình thực, điều đó đương nhiên là rất tốt. Tuy nhiên điều đó cũng làm mô hình toán phức tạp hơn lên, làm cho việc tính toán gặp nhiều khó khăn, thậm chí không thể tính nổi, hoặc là việc tính toán đòi hỏi quá nhiều thời gian, dẫn đến lãng phí, không thể chấp nhận được. Mô hình toán học tốt là phải phù hợp thực tế mà không tạo thành khó khăn về mặt toán học. Việc cân nhắc thế nào thì quả là khó. Làm thế nào để từ vấn đề thực tế khái quát và đề ra được mô hình toán thích hợp, đó không phải là một khoa học sao?

## “Toán học mơ hồ” có mơ hồ không?

Nói đến toán học mơ hồ có thể có nhiều người khó thông. Thế toán học không phải là khoa học chính xác sao? Người ta có thể tính số  $p$  ( $\pi$ ) đến hàng trăm, hàng ngàn thậm chí hàng triệu số lẻ sau dấu phẩy, thế tại sao lại có toán học mơ hồ?

Đúng, toán học là khoa học chính xác. Đó chính là sự khác nhau giữa toán học và một số khoa học khác như sinh vật học chẳng hạn. Thế nhưng cũng không thể nói hễ đã là toán học thì phải chính xác. Khi sử dụng máy tính điện tử thì chắc không ai lại nghi ngờ tính chính xác của máy tính điện tử. Nhưng nếu ta lại bắt máy tính phân biệt người nước ta và người nước ngoài thì e rằng máy tính sẽ không làm được. Nguyên nhân là do máy tính điện tử quá chính xác, chính xác đến mức trở thành chót cứng.

Sự thực là trong cuộc sống hàng ngày của chúng ta có nhiều khái niệm quả là mơ hồ. Có nhiều khi sử dụng các khái niệm mơ hồ để phán đoán các sự việc mơ hồ thì rất phù hợp mà sử dụng các con số chính xác thì lại không được việc. Chẳng hạn người nhà bảo bạn đi đón một người thân nhưng bạn chưa hề biết mặt người đó. Người nhà chỉ miêu tả người đó bằng những con số chính xác. Ví dụ: người đó 23 tuổi ba tháng, cao 1m72, nặng 70kg, vai rộng 45cm... liệu bạn có nhận ra được người đó

không? Chắc rằng sau khi hành khách ở ga đã đi hết, bạn cũng không thể đón nhận được người thân.

Nhưng nếu người nhà lại bảo cho bạn một số điểm mơ hồ như anh ta tuổi rất trẻ, không cao lắm, khổ người to lớn, hơi béo. Nếu thêm ít đặc điểm tai lớn, mũi cao, thì chắc rằng bạn sẽ nhận ra người thân ngay.

Như vậy, tuổi trẻ là một khái niệm mơ hồ. Nếu hỏi rằng người ở độ tuổi 20 có phải là trẻ tuổi không? Trả lời đúng, ta ghi số 1; còn với người tuổi 50 có phải là trẻ không? Trả lời không, ta ghi số 0. Còn với người 36 tuổi thì không thể xem là trẻ nên khó có thể trả lời đúng hoặc không đúng và không thể biểu thị bằng số 0 hoặc 1. Nếu dùng máy tính điện tử hoặc chỉ có thể là 1 (đúng) hoặc là 0 (không đúng) xem ra khá dứt khoát. Nhưng khi gặp trường hợp tuổi 36 không xem là trẻ thì quá lá khó. Trả lời là đúng thì cũng không phải, mà trả lời là không đúng thì cũng không ổn.

Vì vậy người ta đã nghĩ ra một biện pháp cải tiến là đặt ra quy ước: những người dưới 20 tuổi hoàn toàn đủ tư cách để đánh giá là trẻ tuổi, với người 20 - 25 tuổi đánh giá tư cách trẻ tuổi bằng 0,9; những người 30 - 36 tuổi tư cách trẻ tuổi được đánh giá bằng 0,8; còn với người độ tuổi 50 tư cách trẻ tuổi được đánh giá bằng 0.

Nói một cách đơn giản, có thể dùng các số từ 0 - 1 để biểu diễn các trạng thái về tư cách trẻ tuổi. Toán học mơ hồ đã sử dụng khái niệm mơ hồ là trạng thái tư cách, dùng con số để biểu đạt trạng thái mơ hồ. Như vậy toán học mơ hồ đương nhiên sẽ nghiên cứu các sự việc, các vật mơ hồ, nhưng bản thân toán học mơ hồ lại không mơ hồ chút nào. Như thế có thể nói: lấy mơ hồ đối lại cái không mơ hồ chút nào.

Toán học mơ hồ có nhiều ứng dụng trong thực tế. Lĩnh vực ứng dụng quan trọng nhất của toán học mơ hồ là với máy tính điện tử. Khi máy tính điện tử dùng lý luận toán học mơ hồ thì sẽ làm máy tính điện tử thông minh hơn, mở rộng phương pháp phát triển của năng lực trí tuệ.

Nói tóm lại, toán học mơ hồ không hề mơ hồ, mà rất có nghĩa trong thực tế, vì vậy toán học mơ hồ trở thành một ngành toán học quan trọng trong toán học hiện đại.





## Số nguyên tố lớn nhất là bao nhiêu?

Số nguyên tố là những số lớn hơn 1, ngoài số 1 và chính nó, số nguyên tố không chia hết cho bất kỳ một số nguyên nào khác nữa. Như vậy các số 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 đều là các số nguyên tố.

Thế số nguyên tố lớn nhất là bao nhiêu, không ai có thể trả lời được câu hỏi đó. Ngay từ 3000 năm trước công nguyên, Euclide đã chứng minh số các nguyên tố là vô hạn. Cách chứng minh đại thể như sau:

Nếu như số các số nguyên tố là hữu hạn, thì toàn bộ các số nguyên tố sẽ là 2, 3, 5, 11... p, ta sẽ xem xét tích của các số nguyên tố cộng thêm 1 là số A:

$$A = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times p + 1 \quad (1)$$

Vậy chỉ có thể hoặc là A chia hết cho các số nguyên tố hoặc bản thân nó là một số nguyên tố. Từ (1) ta có thể thấy A không phải là bội số của bất kỳ số nào trong các số 2, 3, 5, 7... p. Vì A không chia hết cho bất kỳ số nguyên tố nào từ 2, 3...5... p, nên rõ ràng là A là một số lớn hơn p không có nhân tử nên bản thân A phải là một số nguyên tố, cũng có nghĩa là còn có một số nguyên tố lớn hơn p. Như vậy từ 2 đến p có một số hữu hạn số nguyên tố còn tồn tại một số nguyên tố khác lớn hơn p. Nói cách khác số các số nguyên tố là vô hạn.

Các số nguyên tố có một vị trí cực kỳ quan trọng trong các số tự nhiên, vì vậy người ta ra sức nghiên cứu quy luật phân bố các số nguyên tố trong hệ thống các số tự nhiên, tìm kiếm số nguyên tố có giá trị lớn nhất đương nhiên đó cũng chỉ là số nguyên tố lớn nhất hiện tại mà thôi.

Ngày nay người ta biết giữa số 1 và 100 có 25 số nguyên tố từ 1 đến 1000 có 168 số nguyên tố; từ 1000 đến 2000 có 135 số nguyên tố; từ 3000 đến 4000 có 120 số nguyên tố, từ 4000 đến 5000 có 119 số nguyên tố, như vậy số càng lớn thì càng ít số nguyên tố xuất hiện.

Hiển nhiên, số nguyên tố lớn nhất không tồn tại. Do đó, người ta tập trung sức tìm một công thức mà nhờ đó có thể biểu diễn được một số nguyên tố để nhờ đó có thể tìm được một số nguyên tố lớn hơn. Hiện tại cứ mỗi khi phát hiện được một số nguyên tố lớn đều được xem là kỷ lục mới.

Vào năm 1640, nhà toán học lớn Fermat đã đề ra một dự đoán: số  $2^{2^n} + 1$  là một số nguyên tố. Nhưng 100 năm sau, Euler đã chứng minh với  $n = 5$  thì  $2^{2^5} + 1$  không phải là một số nguyên tố. Ngày nay người ta đã tìm được mấy chục giá trị của n mà số Fermat không phải là số nguyên tố. Như vậy dự đoán của Fermat là sai lầm.

Vào năm 1644, Meilin đã đưa ra một công thức về số nguyên tố là  $2^p - 1$  (p là một số nguyên tố). Số nguyên tố này được gọi là số nguyên tố Meilin. Bản thân Meilin đã tính được 8 số nguyên tố, còn những người khác tìm được 20 số nguyên tố khác. Đến nay người ta tìm được số nguyên tố lớn nhất là  $2^{86243} - 1$ , nếu biểu diễn hết toàn bộ chữ số thì dài đến 25962 vị trí.



Vào năm 1986, người ta còn tìm được số nguyên tố lớn nhất là  $2^{216091} - 1$ .

Chữ số này có đến 65050 vị trí. Dùng phương pháp đại số đã học ở bậc trung học ta có thể tìm được 4 chữ số ở vị trí cuối cùng là 8447.

Sau đây chúng tôi sẽ trình bày cách tính toán 4 chữ số ở vị trí cuối cùng của con số  $2^{216091} - 1$ .

Để tính toán 4 vị trí cuối cùng của  $2^{216091} - 1$  ta phải dùng số  $210 = 1024 = 1025 - 1$ .

$$\text{Trước hết phải khảo sát: } 2^{216090} = (2^{10})^{21609} =$$

$$(1024)^{21609} = (1025 - 1)^{21609} = 1025^{21609} - 21609 \times 1025^{21608} + \dots - \frac{1}{2} 21609 \times$$

$$21608 \times 1025^2 + 21609 \times 1025 - 1.$$

$$= 1025^2 (1025^{21607} - 21609 \times 1025^{21606} + \dots - 21609 \times 10804) + 22149224.$$

Vì  $2^{216090}$  và 22149224 đều chia hết cho 8, vì vậy chúng phải là bội số của 8, giả thiết là 8k, thì:

$$2^{216090} = 1025^2 \times 8k + 22149224$$

$$2^{216090} - 1 = 2 \times 2^{216090} - 1 = 1025^2 \times 16k + 44298448 - 1.$$

$$= (1681k + 44298)10^4 + 8447.$$

Vì vậy 4 chữ số cuối cùng của  $2^{216091} - 1$  là 8, 4, 4, 7.

Phương pháp tính không phải là duy nhất, có thể có phương pháp tính tốt hơn ta có thể tính được nhiều vị trí hơn. Sau này khi tìm được các

số nguyên tố mới lớn hơn bạn có thể tự mình tính toán lấy. Bạn đọc nào nôn nóng xin hãy tập tính như mô tả dưới đây:

Vào năm 1979, Helinelin và Silovansik tìm thấy số nguyên tố lớn nhất thời bấy giờ là  $2^{44497} - 1$ , người ta đã tìm thấy số này có 13395 vị trí, 4 chữ số cuối cùng là 8, 6, 7, 1. Các bạn có thể dùng phương vừa trình bày để tính thử xem.

## Số 0 có phải là số vô cùng nhỏ không?

Người ta thường nói 1 là 1 mà 2 là 2, không thể có chuyện 1 biến thành 2, 2 cũng không biến được thành 1. Khi học ở trung học, chắc các bạn đã qua các loại số tự nhiên, số hữu tỉ, số thực, cho dù chúng lớn hay nhỏ, cho dù chúng xuất hiện dưới diện mạo như thế nào đều là một số xác định, cũng có thể nói chúng là bất biến, trong toán học người ta gọi chúng là các số thường.



Số vô cùng nhỏ không phải là số thường, nó là một số thay đổi, cũng có thể nói nó là một số luôn thay đổi, biến hoá. Ví dụ chúng ta thường xem "số 0,00000001 là số phi thường nhỏ" và số vô cùng nhỏ là hai việc khác nhau. Nói một

cách thô thiển thì vô cùng nhỏ là một đại lượng biến hoá (đấy là một quá trình tiến đến chỗ cùng cực) không ngừng biến đổi đến chỗ cực nhỏ, càng biến đổi càng dần đến số không 0.

Ta hãy xét dãy số sau đây:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Với dãy số này khi  $n$  thay đổi lớn dần (người ta gọi là quá trình tiến đến chỗ cùng cực hay còn gọi là tiến đến giới hạn) thì  $\frac{1}{n}$  sẽ càng ngày càng nhỏ và tiến dần đến số 0, ta ký hiệu 0 là giới hạn của  $\{X_n\}$  (khi  $n$  liên tục lớn dần). Người ta viết  $\{X_n\} \rightarrow 0$  (" $\rightarrow$ " đọc là tiến đến hay chặt chẽ hơn ta viết  $\lim X_n = 0$ ).

Vậy 0 là giới hạn của cái mà trong toán học ta gọi là vô cùng nhỏ.

Đương nhiên số 0 bản thân nó là vô cùng nhỏ, nhưng vô cùng nhỏ không nhất định chỉ là số 0 (dãy số ở trên nói lên điều này).

Nhưng 0 là số xác định, đối với một số  $a$  ta có thể dùng số 0 để tiến hành các phép tính:

$$a \pm 0 = a \quad a \cdot 0 = 0 \quad 0 : a = 0$$

Nhưng số "0" không thể là số chia (hoặc số 0 không thể là mẫu số trong một phân số).

Vô cùng nhỏ không phải là số không, người ta có thể thực hiện phép chia cho số vô cùng nhỏ, hay có thể nói số vô cùng nhỏ có thể đóng vai trò mẫu số trong phân số. Ví dụ  $\alpha$  là số vô cùng nhỏ và  $\beta$  là một số khác (có thể là số bình thường khác) thì  $\alpha / \beta$  không phải là không có nghĩa (trừ trường hợp  $\alpha = 0$ ), thế nhưng với các số  $\beta$  có thể có chỗ khác:  $\beta / \alpha$  có thể là một số bình thường, có thể là số vô cùng nhỏ, nhưng cũng có thể là số vô cùng lớn, thậm chí lớn đến mức không thể lớn hơn được nữa (lớn vô hạn).

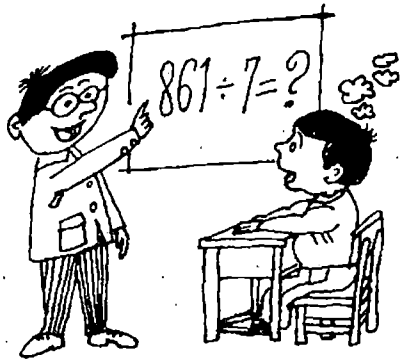
Ngoài ra giữa các số vô cùng nhỏ cũng có phân biệt. Với hai lượng vô cùng nhỏ  $\alpha, \beta$  thì:

$$\frac{\alpha}{\beta} \begin{cases} 0 & \text{người ta nói } \alpha \text{ có bậc vô cùng nhỏ hơn } \beta \\ k & \text{(số thường) thì } \alpha \text{ và } \beta \text{ cùng bậc vô cùng nhỏ} \\ \infty & \text{(lớn vô cùng) thì } \beta \text{ có bậc vô cùng nhỏ cao hơn } \alpha \end{cases}$$

Cho nên khi nói số vô cùng nhỏ thì về giá trị của chúng có thể khác nhau có khả năng lớn hơn hoặc nhỏ hơn. Từ tất cả các điều vừa trình bày ở trên, rõ ràng vô cùng nhỏ và số không là hai việc khác nhau.

## Các biện pháp để xét một số có thể chia hết cho các số 7, 11, 13, 17... hay không?

Để phán đoán một số có chia hết cho 7 hay không ta có thể dùng phương pháp cắt đuôi. Để phán đoán liệu có một số nào đó có thể chia hết cho các số nguyên tố lớn hơn 7 ta cũng có thể dùng phương pháp cắt đuôi. Phương pháp cắt đuôi là một chìa khóa có thể mở được nhiều loại khoá.



Khi dùng quen, bạn có thể dễ dàng phán đoán tính chia hết cho các số nguyên tố.

Chúng ta thử làm một số ví dụ tập sử dụng phương pháp cắt đuôi.

Ví dụ 1: Hãy xem xét số 861 có chia hết cho 7 hay không?

Giải: Chữ số cuối của số 861 là 1. Chúng ta gọi chữ số cuối của một số là "đuôi". Ta cắt bỏ chữ số cuối (cắt đuôi)

lúc bấy giờ số 861 từ chỗ có 3 chữ số còn

hai chữ số là số 86; Ta hãy trừ  $1 \times 2$  vào số 86 ta có số 84. Đây là lần cắt đuôi thứ nhất. Bây giờ cắt chữ số 4 của số 84 ta còn lại 8; lấy số 8 trừ đi  $4 \times 2$  sẽ bằng 0. Lần cắt đuôi thứ hai ta thu được số không 0, như vậy số 861 chia hết cho 7.

Bây giờ ta phân tích các diễn biến của quá trình cắt đuôi: cắt bỏ đuôi "1" làm giảm ở vị trí hàng chục chữ số 2, tức là đã giảm từ số đó số 21, 21 là bội số của 7. Lần thứ hai ta cắt đuôi 4 (40), rồi lại giảm đi ở vị trí đầu 8 (800) tức là giảm 840 vào số ban đầu, mà  $840 = 40 \times 21$  tức cũng là bội số của 7. Lần cắt đuôi thứ hai ta cũng đã giảm đi một số là bội số của 7 vào số ban đầu mà không còn số dư, nên tự nhiên dễ thấy là số 861 chia hết cho 7.

Ví dụ: 2 - Hãy xét xem số 2702 chia hết cho 7 không?

Bây giờ ta biểu đạt quá trình cắt đuôi bằng các hệ thức:

$270 \mid 2 \dots \dots$  tức cắt bỏ đuôi 2

$\begin{array}{r} - 4 \\ \hline \end{array} \dots \dots$  Giảm đi  $2 \times 2 = 4$  (40)

$26 \mid 6 \dots \dots$  Lại cắt bỏ đuôi 6 (60)

$\begin{array}{r} - 12 \\ \hline \end{array} \dots \dots$  Lại giảm đi  $6 \times 2: 12$  (1200)

$14 \dots \dots$  là bội số của 7 ( $7 \times 2$ ).

Vậy số 2702 qua hai lần cắt đuôi đã bị chia thành 3 số:

$2702 = 1400 + 1260 + 42.$

$= 200 \times 7 + 17 \times 7 + 6 \times 7.$

$= 386 \times 7.$

Như vậy chúng ta đã chứng minh cả ba số hạng ở đẳng thức đều chia hết cho 7.

Qua phân tích trên đây ta đã rõ phương pháp cắt đuôi cũng như thấy rõ được quá trình biểu diễn của biện pháp cắt đuôi. Bây giờ ta thử mở

rộng ứng dụng biện pháp này cho các số nguyên tố khác. Theo biện pháp vừa trình bày thì bước thứ nhất tìm cho mỗi số nguyên tố một bội số nhỏ nhất có đuôi là 1, khi đã xác định được bội số ấy rồi, ta giảm đi đuôi phía trước một số bằng bội số của đuôi đã cắt, từ đó có thể phán đoán tính chia hết cho số nguyên tố đó.

Ví dụ 3: Cần phán đoán số 6256 chia hết cho 17 hay không? Theo các phân tích  $17 \times 3 = 51$  thì sau khi cắt đuôi thì vị trí của đuôi phía trước ta phải giảm đi một số là bội số của 5.

$625 \mid 6 \dots \dots$  cắt bỏ đuôi 6

$\begin{array}{r} - 30 \\ \hline \end{array} \dots \dots$  Giảm đi 6 lần 5:  $5 \times 6 = 30$

$59 \mid 5 \dots \dots$  Cắt bỏ đuôi lần hai là 5

$\begin{array}{r} - 25 \\ \hline \end{array} \dots \dots$  Giảm đi 5 lần 5:  $5 \times 5 = 25$

$34 \dots \dots$  34 là bội số của 17 ( $34 = 17 \times 2$ ).

Kết luận: Số 6256 chia hết cho 17.

Ta lại tập làm một lần nữa với số 19.

Ví dụ 4: Hãy xét xem số 130568 có chia hết cho 19 hay không?

Chú ý là  $19 \times 9 = 171$  nên sau khi cắt đuôi phải trừ vào vị trí phía trước một số là bội số của 17.

$13056 \mid 8 \dots \dots$  Cắt bỏ đuôi 8

$\begin{array}{r} - 136 \\ \hline \end{array} \dots \dots$  Trừ đi 8 lần 17:  $8 \times 17 = 136.$

$129 \mid 2 \dots \dots$  Cắt bỏ đuôi lần thứ hai 2- 34

$\begin{array}{r} - 34 \\ \hline \end{array} \dots \dots$  Trừ đi 2 lần 17:  $2 \times 17 = 34.$

$95 \dots \dots$  95 là bội số của 19: ( $95 = 19 \times 5$ )

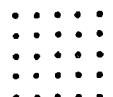
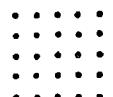
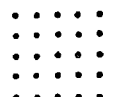
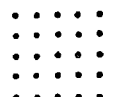
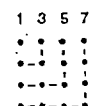
Như vậy số 13056 chia hết cho 19.

## Tổng các số lẻ liên tiếp có phải là một số chính phương không?

Trong toán học chúng ta thường gặp một số bằng bình phương của một số khác. Ví dụ  $32 = 9$ ,  $52 = 25$ ,  $102 = 100$ . Từ các số chính phương này làm người ta liên tưởng đến hình vuông, ở đây có sự liên quan giữa "số" và "hình" và có mối liên hệ chặt chẽ. Ví dụ có thể dùng 25 điểm để tạo nên hình vuông.

Hình này rõ ràng được biểu diễn bằng  $52 = 25$ .

Chúng ta hãy xem sự liên hệ giữa số và hình của một số các chính phương khác.

|                                                                                   |                            |                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|  | $1 = 1^2$                  |  |
|  | $1 + 3 = 2^2$              |  |
|  | $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$      |  |
|  | $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ |  |
|                                                                                   | ....                       |                                                                                   |

Qua việc quan sát mối liên quan giữa số và hình ta có thể đi đến kết luận: tổng các số lẻ kể từ số 1 trở đi bằng một số chính phương, tức là  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

Kết luận này có đúng không? Trước khi chưa chứng minh được hệ thức đó ta chưa thể nói kết luận đó là đúng.

Ta phải dùng phương pháp quy nạp để chứng minh. Nội dung của phép chứng minh là xuất phát từ một dãy số cụ thể, bằng phương pháp suy luận toán học phải chứng minh là kết luận (định lý) không chỉ đúng cho trường hợp dãy số cụ thể mà có thể đúng cho mọi trường hợp chung. Từ một số ít dãy số cụ thể, tức là qua kinh nghiệm, toán học không thừa nhận các kết luận dựa vào kinh nghiệm mà không qua chứng minh. Ví dụ ở trên núi có một vạn hố trồng cây, bạn cần kiểm tra xem có phải mỗi hố đều có trồng cây hay không, giả sử bạn đã kiểm tra 8880 hố đều đã thấy có cây mọc, bạn cũng không thể kết luận là "cả một vạn hố đều đã trồng cây". Bởi vì có thể có hố 8881, 8882 còn chưa trồng cây. Bạn không thể bảo đảm là không có hố nào chưa trồng cây.

Trong toán học cũng vậy, mọi kết luận nào đó gọi là đã được kiểm chứng mười lần, một trăm lần thậm chí rất nhiều lần được kiểm chứng, cũng không thể nói là kết luận đó đã chính xác. Chỉ khi đã qua chứng minh thì mới có thể xem kết luận đó chính xác.

Bây giờ ta chứng minh rằng:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

Bước thứ nhất ta chứng minh với  $n = 1$  đẳng thức được nghiệm đúng. Khi  $n = 1$  thì vế trái bằng 1, vế phải bằng  $1^2 = 1$ . Vậy với  $n = 1$  thì đẳng thức nghiệm đúng.

Bước thứ hai, trước hết cho  $n = k$ ,  $k$  là một số bất kỳ nếu đẳng thức được nghiệm đúng, ta còn phải chứng minh  $n = k + 1$  đẳng thức cũng phải được nghiệm đúng.

Đây là bước quan trọng, thực hiện được bước này mới bảo đảm rằng: Không phải chỉ khi chọn một số  $k$  bất kỳ kết luận được nghiệm đúng mà sau  $k$  còn có số  $k + 1$  kết luận cũng được nghiệm đúng, khi đó mới bảo đảm là đẳng thức chính xác.

Với  $n = k$  thì  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ .

Cần chú ý rằng  $2k - 1$  là số lẻ thì số đứng sau nó là  $2k + 1$ . Chúng ta thêm vào hai vế của đẳng thức số lẻ  $2k + 1$ .

$$1 + 2 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1.$$

$$\text{Mà ở vế phải thì } k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

$$\text{Nên } 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Khi đã qua bước chứng minh này ta mới bảo đảm với các số tự nhiên  $n$  thì:

Đó cũng có nghĩa rằng bắt đầu từ số 1, tổng các số lẻ liên tiếp sẽ bằng một số chính phương.

## "Con số vàng" có thật quý như vàng không?

Cách nói "con số vàng" là do nhà danh hoạ, nhà khoa học Italia Da Vinci phát biểu đầu tiên. Nhà thiên văn học Đức là Kepler cũng nói: "Số trung bình nhân và định lý Pythagoras là viên ngọc trong hình học có thể so với vàng bạc châu báu".

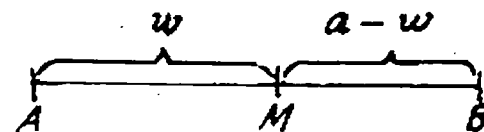
Chia một đoạn thẳng thành hai phần: một đoạn dài một đoạn ngắn theo tỉ lệ thức, đó chính là sự phân chia vàng:

Giả sử  $AB = a$ , theo yêu

cầu của cách chia thì nếu  $AM =$

$\omega$  thì  $MM = a - \omega$ , ta phải có:

$$\frac{a}{\omega} = \frac{\omega}{a - \omega}$$



Ta có thể dùng compa để chia đoạn thẳng  $AB$  theo điều kiện đó. Cách làm như sau:

1) Từ  $B$  vẽ  $BC \perp AB$  với  $BC = a/2$ .

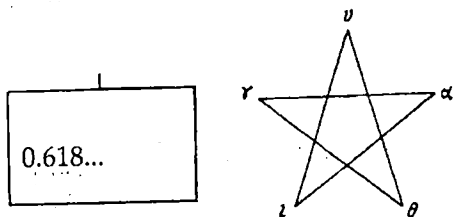
- 2) Nối AC; lấy C làm tâm và CB làm bán kính vẽ cung tròn cắt AC tại D.  
3) Lấy A làm tâm và AD làm bán kính vẽ cung tròn cắt AB tại M, M chính là điểm phải tìm.

Giả thiết  $AB = 1$  ta sẽ có  $AM = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618... 0,618$  được gọi là con

số vàng, còn điểm M được gọi là “điểm chia vàng”.

Các bậc thầy về nghệ thuật cổ Ai Cập, cổ La Mã đã ý thức được tỉ lệ “đẹp” người ta cho rằng nếu vẽ hình chữ nhật nếu chọn chiều dài là 1 và chiều rộng bằng 0,618 ta sẽ có một hình chữ nhật đẹp, trong kim tự tháp cổ Ai Cập có bao hàm tỉ lệ này.

Theo trường phái Pythagoras cổ Hy Lạp thì khắp nơi đều có bao hàm tỉ lệ này của ngôi sao 5 cánh và họ lấy ngôi sao 5 cánh làm huy hiệu của hội.



(Trong hình vẽ là ngôi sao năm cánh huy hiệu của trường phái Pythagoras theo thứ tự đó có nghĩa là mạnh khỏe).

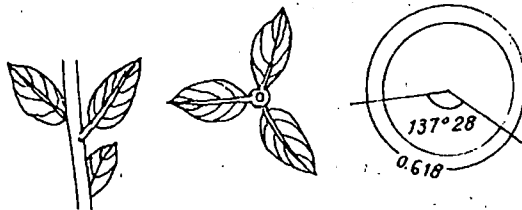
Phân chia theo tỉ lệ vàng là quy tắc thống trị nghệ thuật kiến trúc, điêu khắc ở Tây Âu cho dù là

ở các miếu tế thần ở Athen thời cổ hay ở tháp Eiffel tại thành phố Paris ngày nay, không kể là ở các thành bao cổ La Mã hoặc các lăng của công nương ở Ấn Độ..., khắp nơi đều chứa đựng “tỉ lệ vàng”.

Nhiều tác phẩm nghệ thuật nổi tiếng đã thể hiện tỉ lệ vàng, nhiều bức họa nổi tiếng chính là những tác phẩm xử lý theo tỉ lệ vàng.

Có điều lý thú là: ở cơ thể người, để là một cơ thể đẹp thì vòng bụng và chiều cao phải được phân bố theo tỉ lệ vàng.

Khi Kepler nghiên cứu thực vật, nghiên cứu vấn đề “lá mọc trên thân cây” đã kinh ngạc nhận thấy:



Việc sắp xếp cây mọc trên thân cây cũng tuân thủ tỉ lệ vàng. Có người nghiên cứu 3 lá mọc quanh một thân cây, các lá gần nhau cũng tạo với nhau một góc  $137^{\circ}28'$ .

Qua tính toán cho thấy: chính góc này chia đường tròn theo tỉ lệ 1 : 0,618. Mà chính với góc độ này thì độ thông gió, sự tiếp nhận ánh sáng mặt trời của lá là tốt nhất.

Vào thế kỷ trước, một nhà tâm lý học Đức đã làm một phép trắc nghiệm, ông cho bày 20 loại hình chữ nhật khác nhau và yêu cầu người xem chọn lựa hình đẹp nhất. Kết quả chứng minh: Đa số người đã chọn các hình theo tỉ lệ 1: 0,618 hoặc các hình chữ nhật có tỉ lệ gần như vậy. Tuy nhiên sau này có người nói: thực ra thì số người thích tỉ lệ vàng không phải là đại đa số mà chỉ là  $\frac{1}{3}$  cho dù thực là như vậy thì tỉ lệ vàng vẫn là tỉ lệ được người ta coi trọng.

Ngày nay trong một ngành toán học ứng dụng là khoa học “chọn lọc ưu tiên” người ta lại tìm thấy một phạm vi ứng dụng khác của con số vàng. Nói vắn tắt “chọn lọc ưu tiên” là làm thế nào để được nhanh, nhiều, tốt, rẻ hoặc là tìm phương thức tốt nhất, là phương pháp giải quyết vấn đề thật tối ưu. Phương pháp tuyển chọn tối ưu có nhiều ứng dụng rộng rãi.

“Phân chia theo tỉ lệ vàng” là phương pháp quan trọng trong phép tuyển chọn tối ưu. Do vậy có thể nói con số vàng đúng là quý như vàng.

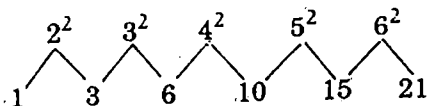
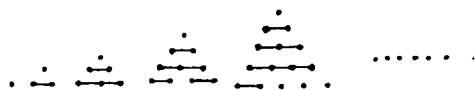
## Tam giác số có đặc điểm gì?

Vào 2500 năm trước tại cổ Hy Lạp Pythagoras tổ chức ra một hội bí mật tiến hành các hoạt động chính trị, nghiên cứu khoa học, tạo nên một trường phái học thuật.

Các thành viên của trường phái này cho rằng điểm trong hình học là có “vị trí” còn số trong toán học, “không có vị trí”. Do đó nếu chú ý kết hợp thuật toán học và hình học, kết hợp số với hình ta sẽ có các hình số:

Các điểm này sẽ tạo nên các hình tam giác, đồng thời lại biểu thị cho các số. Các hình tam giác liên hoàn 1, 3, 6, 10, 15... đó là các “tam giác số”.

Con số ở hàng trên cho thấy mỗi chữ số là nối liền hai hình tam giác cạnh nhau là một số chính phương.



Nếu xét cách hình thành của mỗi tam giác số ta sẽ thấy:

$$1 = 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Thế ra là mỗi số ở tam giác số là tổng các số tự nhiên liên tiếp. Để tìm thấy n hình tam giác ta cần phải tính tổng của n số tự nhiên. Sau khi quy nạp ta sẽ có được một công thức thật tiện lợi:  $1 + 2 + \dots + n - 1 + n = \frac{1}{2} \times n(n + 1)$

Như vậy, nếu cần cộng các số từ 1 đến 100 ta sẽ có:

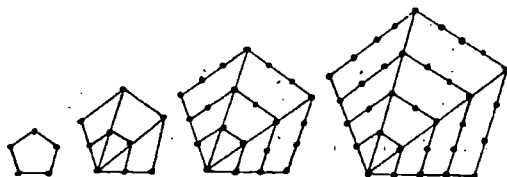
$$1 + 2 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \times (100 - 1) \times 100 = 5050.$$

Về hình số học thì sau khi hình tam giác có hình tứ giác, ngũ giác rồi lục giác, hình số tứ giác còn gọi là hình vuông số.

Trong sách này chúng tôi đã giới thiệu hình vuông số, trong đó liên quan tổng các số lẻ bắt đầu từ 1 là một số chính phương:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Còn hình ngũ giác số sẽ như sau:



Hình ngũ giác số có đặc điểm:

$$1 = 1$$

$$5 = 1 + 4$$

$$12 = 1 + 4 + 7$$

$$22 = 1 + 4 + 7 + 10$$

Hình ngũ giác thứ n là:  $\frac{3n^2 - n}{2}$

## Thế nào là số tự bảo toàn?

Ngựa thì có đuôi ngựa, bò thì có đuôi bò, đến ngay con số là một vật vô hình cũng có "đuôi số", không những thế đuôi số lại nhiều đặc tính khá kỳ lạ. Đuôi số là số tự bảo toàn có tính bất biến. Trước hết ta bắt đầu từ một số bất biến của số 5 và số 6. Bạn xem bình phương của hai số này có đuôi là 5 và 6. Nhiều người xem đó là chuyện bình thường nên nhìn mà không thấy, hoặc là nhầm mắt cho qua. Vì vậy chúng tôi xin lưu ý độc giả. Bất kỳ hai số nào nhân với nhau mà cho tích số có đuôi 5 và 6 thì các thừa số phải có đuôi là 5 hoặc 6.

$$6 \boxed{5} \times 4 \boxed{5} = 292 \boxed{5}$$

$$3 \boxed{6} \times 4 \boxed{6} = 165 \boxed{6}$$



Ví dụ:  $65 \times 45 = 2925$ ;  $36 \times 46 = 1656$ .

Điều đó đúng vạn lần như một. Như vậy số 5 và 6 luôn lộ chiếc "đuôi hồ ly" của mình. Thực ra thì số 0 và số 1 cũng có đặc tính đó.

Rõ ràng là:  $0 \times 0 = 0$ ;  $1 \times 1 = 1$ .

Nhưng các số 0, 1, 5, 6 là những số đơn giản, nên thực ra cũng không có gì đặc biệt lắm. Vì vậy người ta mở rộng nghiên cứu đến hai chữ số và đã tìm thấy các số có hai chữ số có tính chất tự bảo toàn.

Trong hệ đo lường cũ của Trung Quốc một cân không phải có 10 lạng mà là 16 lạng. Ngày nay dù người ta không còn chính thức sử dụng hệ đo lường này nhưng khi cân vàng, cân thuốc trong đông y, cân đá quý, người ta vẫn đo theo cân, lạng. Khi sử dụng hệ đo lường này các tay nhà nghề



thường thuộc lòng các câu khẩu quyết, trong đó không ít trường hợp lộ ra cái đuôi “hai mươi lăm”. Ví dụ như câu “hai một hai lăm” chỉ hai lạng loại cân có một lạng là 0,125.

Nếu ai chú ý sẽ thấy 25 là một con số tự bảo toàn. Bạn thử tính xem:

$$25 \times 25 = 615;$$

$$3125 \times 5625 = 17578125.$$

Như vậy con số 25 là bất biến, con số 25 trong đuôi của các thừa số đã hiện hình trong tích số. Ngoài con số 25 còn có con số 76. Bạn đọc có thể tự mình kiểm tra.

Đến đây lại có người đặt câu hỏi: thế liệu với số có 3 chữ số thì sao? Có, mà lại có một đôi đẹp là 625 và 376. Xin hãy đặc biệt chú ý đó chính là sự kéo dài của 2 số 25 và 76, đó là điều hết sức có ý nghĩa.

Thế thì các số tự bảo toàn không có chỗ kết thúc?

Đúng, chúng là vô cùng vô tận. Mấy năm trước đây, ở Canada người ta đã tìm thấy 500 số. Đương nhiên tiếp tục tính toán nữa thì chắc sẽ không có mấy ý nghĩa nữa.

Còn có một sự việc hết sức kỳ thú, hai số tự bảo toàn xuất hiện thành đôi một. Bạn xem đây:

$$5 + 6 = 11.$$

$$25 + 76 = 101$$

$$625 + 376 = 1001$$

Toà tháp số tự nhiên quý giá này nếu tiếp tục xây dựng ta sẽ có một “toà tháp bảy tầng”...

Trên đây ta nói về các số trong hệ đếm thập phân. Thực ra trong các hệ đếm khác cũng có hiện tượng số bảo toàn.

## Thế nào là số hoàn toàn?

Số 6 và 4 ước số là 1, 2, 3, 6. Trừ chính số 6 ra ta có:

$$1 + 2 + 3 = 6. \text{ Con số có đặc điểm như vậy là số hoàn toàn.}$$

Số 28 có các nhân tử là 1, 2, 4, 7, 14, 28. Trừ bản thân số 28 ta có:  $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ . Số 28 cũng là số hoàn toàn.

Như vậy ta thấy với một số tự nhiên có nhiều nhân tử, trừ bản thân chính số đó; mà tổng các nhân tử bằng chính số đó, người ta gọi đó là số hoàn toàn.

Vào năm 600 năm trước công nguyên Pythagoras đã tìm thấy số hoàn toàn. Ông phát hiện số 3 số hoàn toàn là 6, 28, 496.

Khi tìm được 3 số hoàn toàn, nhà toán học hi vọng mong tìm ra quy luật để tìm thấy được nhiều số hoàn toàn. Từ ba số hoàn toàn người ta thấy chúng có đặc điểm sau:

$$6 = 2 \times 3 = 2 \times (2^2 - 1).$$

$$28 = 2^2 \times 7 = 2^2 (2^3 - 1).$$

$$496 = 2^4 \times 31 = 2^4 (2^5 - 1).$$

Từ đó nảy sinh dự đoán là có thể biểu diễn số hoàn toàn bằng biểu thức  $2^{n-1} (2^n - 1)$ .

Trong đó  $2^n - 1$  là một số nguyên tố.

Về quy luật này Euclide thời cổ Hy Lạp đã từng nghiên cứu. Đến thế kỷ XVII, Meilin đã tiến hành tính toán nhiều số hoàn toàn, sau này người ta gọi  $2^n - 1$  (lại ký hiệu là  $2p - 1$ ) là số Meilin và ký hiệu  $M_n$ .

Ban đầu người ta xét  $p$  là số nguyên tố như 2, 3, 5, 7... thì số Meilin là số nguyên tố:

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3.$$

$$M_3 = 2^3 - 1 = 7.$$

$$M^5 = 2^5 - 1 = 31.$$

$$M_7 = 2^7 - 1 = 127.$$

Ta có  $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$   $M_{11}$  không phải là số nguyên tố.

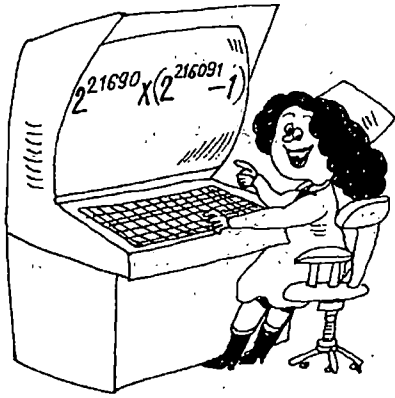
Đến thế kỷ XVIII người ta tìm được 8 số Meilin với  $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$ .

Đến thế kỷ XIX người ta lại phát hiện thêm 4 số Meilin nữa với  $p = 61, 89, 107, 127$ . Trong 4 số này thì số lớn nhất  $M_{127}$  có đến 39 chữ số. Nếu viết ra sẽ là:

$$1701411834609692231731687303715884105727$$

Với số hoàn toàn lớn như vậy mà tính bằng giấy bút thì e không xuể lại còn phải làm các phép tính chia để chứng minh đó là số nguyên tố! Vì tính toán khó khăn như vậy nên số Meilin được phát hiện không nhiều lắm.

Đến thế kỷ XX, bắt đầu từ năm 1952, các nhà toán học đã dùng máy tính điện tử, công việc nghiên cứu phát triển nhanh chóng. Đến năm 1983,



trong thời gian 30 năm người ta đã phát hiện thêm 16 số Meilin. Từ sau năm 1983 người ta lại phát hiện được thêm hai số Meilin nữa với  $p = 132049$  và  $216091$ .

Nhờ vậy người ta đã tính ra được một số hoàn toàn mà hiện tại đó là số hoàn toàn lớn nhất là:

$2^{216090} (2^{216091} - 1)$ . Con số này có đến 13 vạn một trăm chữ số!

Đương nhiên số hoàn toàn là số chẵn.

Tự nhiên người ta lại nghĩ đến vấn đề

liệu có số hoàn toàn nào là số lẻ không? Đến đó thì mọi việc tạm dừng. Dùng máy tính điện tử tính toán nhưng chưa tìm thấy thêm một số hoàn toàn nào nữa. Với các số tự nhiên dưới 200 chữ số thì người ta khẳng định là không có số hoàn toàn là số lẻ. Nhiều nhà toán học cho rằng không thể tồn tại số hoàn toàn là số lẻ.

Như vậy qua 2500 lịch sử của bài toán khó, tìm được một số hoàn toàn là số lẻ thì là một thành tựu trọng đại.

## Thế nào là số thân hòa?

Số 220 và số 284 là đôi số thân thiện, cũng có người gọi đây là đôi số "tương thân tương ái".

Nói thế có nghĩa là gì?

Chúng ta thử xem đặc điểm của đôi số này:

Số 284 có 6 ước số: 1, 2, 4, 71, 142, 284.

Nói cách khác số 284 chỉ chia hết cho 6 số này. Trừ bản thân số 284 ta cộng các nhân tử khác sẽ có  $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$ .

Như vậy tổng các ước số của số 284 (trừ bản thân số 284) thì bằng 220. Ta lại thấy tổng tất cả các ước số của số 220 (trừ số 220) thì:

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ .

Thế là tổng các ước số của 220 (trừ số 220) bằng 284. Như vậy quả là mối quan hệ thân thiết. Phạm với các cặp số mà tổng ước số của số này



bằng chính số kia và ngược lại các tổng ước số của số kia bằng chính số này thì đôi số được gọi là đôi "số thân thiện".

Đôi số thân thiện nêu trên được phát hiện từ thế kỷ thứ IX, thế mà sau hơn 800 năm người ta vẫn chưa phát hiện được đôi

số thứ hai. Đến khi Fermat tìm thấy đôi số thân thiện thứ hai mới chấm dứt tình trạng chỉ có một đôi số thân thiện duy nhất trong lịch sử.

Đôi số thân thiện thứ hai là 17296 và 18416. Bạn sẽ thấy tổng các ước số (trừ bản thân số đó là):

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 1151 + 2302 + 4604 + 9208 = 17296.$$

Còn tổng các ước số của 17296 bằng 18416.

Việc tính toán để tìm các đôi số thân thiện tuy là đơn giản nhưng khá nhọc nhằn. Việc tính toán này sẽ tiện lợi nếu kết hợp với máy tính điện tử. Nhờ máy tính điện tử kiểm tra với các số từ 1000.000 trở xuống người ta tìm thấy 13 đôi số thân thiện.

Dưới đây xin nêu lên 13 đôi số thân hòa cũng như viết các nhân tử của từng số ta có:

$$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$284 = 2^2 \cdot 71$$

$$1184 = 2^5 \cdot 37$$

$$1210 = 3 \cdot 5 \cdot 11^2$$

$$2620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 131$$

$$2924 = 2^2 \cdot 17 \cdot 43$$

$$5020 = 2^3 \cdot 5 \cdot 251$$

$$5564 = 2^2 \cdot 13 \cdot 107$$

$$6232 = 2^3 \cdot 19 \cdot 41$$

$$6368 = 2^6 \cdot 199$$

$$10744 = 2^3 \cdot 17 \cdot 79$$

$$19865 = 2^2 \cdot 23 \cdot 59$$

$$12285 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$$

$$14595 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139$$

$$17296 = 2^4 \cdot 23 \cdot 47$$

$$18416 = 2^4 \cdot 1151$$

$$63020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 137$$

$$76084 = 2^2 \cdot 23 \cdot 827$$

$$66928 = 2^4 \cdot 47 \cdot 89$$

$$66992 = 2^4 \cdot 53 \cdot 70$$

$$67095 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$$

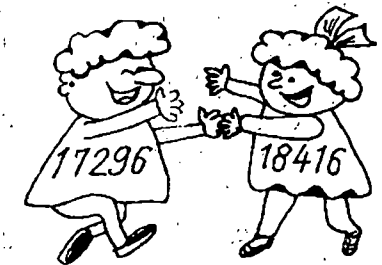
$$71145 = 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31$$

$$69915 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$$

$$87633 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$$

$$69750 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 29$$

$$88730 = 2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 467$$



## Có phải chữ số cũng “thoát y vũ”?

Chữ số có biết thoát y vũ không?

Trong múa nhảy thường có tiết mục múa thoát y vũ, trong quá trình múa người múa cởi bỏ mấy lớp áo ngoài. Những người biểu diễn thời trang cũng thường bỏ lớp áo ngoài để lộ lớp quần áo muống biểu diễn ở bên trong.



Chúng ta nói về chữ số “thoát y vũ” là nói về tổ hợp các số có nhiều chữ số, khi tước bỏ từng vị trí thì sẽ biến hoá ra sao?

Mời các bạn hãy xem các tổ hợp ba số dưới đây, mỗi số có sáu chữ số. Chia các tổ hợp thành hai nhóm, tổng của các số trong từng nhóm bằng nhau.

Tức ví như:

$$123789 + 561945 + 642864 = 242868 + 323787 + 761943$$

Tính chất vừa nêu không có gì lạ, có nhiều tổ hợp số cũng có tính chất đó. Nhưng nếu chú ý thì sẽ thấy các tổng bình phương các số của một nhóm bằng tổng bình phương các số trong nhóm kia.

$$123789^2 + 561945^2 + 642864^2 = 242868^2 + 323787^2 + 761943^2$$

Nếu không tin bạn thử tính thì sẽ thấy là nghiệm đúng như vậy và bạn sẽ không thể không thốt lên: “Thật là thần diệu”.

Nhưng đừng tán thưởng vội, đó chỉ mới là khúc dạo đầu. Cất bỏ dần từng lớp áo khi biểu diễn thời trang, bạn sẽ được thấy nhiều vẻ đẹp hơn nữa.

Bây giờ bạn hãy tước bỏ tất cả các chữ số ở đầu các con số, bạn sẽ thấy điều thần diệu của các con số có 5 chữ số vừa mới hình thành:

$$23789 + 61945 + 42864 = 42868 + 23787 + 61943$$

$$23789^2 + 61945^2 + 42864^2 = 42868^2 + 23787^2 + 61943^2$$

Quả là kỳ lạ. Bạn lại tước bỏ các chữ số ở đầu các con số vừa mới hình thành bạn sẽ có một bộ các số, mỗi số có 4 chữ số. Qua tính toán bạn sẽ thấy:

$$3789 + 1945 + 2864 = 2868 + 3787 + 1943$$

$$3789^2 + 1945^2 + 2864^2 = 2868^2 + 3787^2 + 1943^2$$

Bây giờ chúng ta lại tiếp tục công việc đang dở dang, lại tiếp tục bỏ các chữ số ở đầu mỗi con số, rồi tính toán, lần lượt ta sẽ có các đẳng thức kỳ diệu sau:

$$789 + 945 + 864 = 868 + 787 + 943$$

$$789^2 + 945^2 + 864^2 = 868^2 + 787^2 + 943^2$$

Cuối cùng ta có:

$$9 + 5 + 4 = 8 + 7 + 3$$

$$9^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 7^2 + 3^2$$

Bây giờ ta lại làm việc ngược lại là tước bỏ lần lượt các chữ số cuối của mỗi con số ta cũng lại sẽ có các điều kỳ diệu khác. Ví dụ:

$$12378 + 56194 + 64286 = 24286 + 32378 + 76194$$

$$12378^2 + 56194^2 + 64286^2 = 24286^2 + 32378^2 + 76194^2$$

Cuối cùng ta cũng có:

$$1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7$$

$$1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2$$

Bạn xem có kỳ lạ không?

## Bí mật của chữ số “thoát y vũ” là ở chỗ nào?

Trên đây chúng ta vừa nêu tính chất kỳ lạ của chữ số “thoát y vũ”. Thật ra thì đa phần các tính kỳ lạ trong toán học đều có quy luật của nó.

Vào năm 1988, trong tạp chí Chúng tôi yêu toán học một học sinh trung học ở tỉnh Hồ Nam là Hùng Phong Anh ngẫu nhiên tìm thấy:

$$789 + 945 + 864 = 868 + 787 + 943$$

$$789^2 + 945^2 + 864^2 = 868^2 + 787^2 + 943^2$$

Nếu bỏ đi các chữ số ở vị trí hàng trăm, hàng chục thì tổng các số mới cũng như tổng các bình phương cũng bằng nhau.

Trong đó có gì bí mật, có quy luật không? Tạp chí *Chúng tôi yêu khoa học* đã chứng minh và giải đáp.

Khi các giải pháp được đăng công khai, được nhiều người hưởng ứng. Điều đó chứng tỏ sự thú vị của các con số đã hấp dẫn các thanh thiếu niên. Các giải đáp chứng minh đã được nhà toán học nổi tiếng Dương Lạc hiệu chỉnh và cho đăng trên tạp chí *Chúng tôi yêu khoa học* số 1 - 1989. Khi tin tức truyền đi, có người nêu lên rằng, các phát hiện của học sinh trung học trong lý thuyết về số người ta gọi là "màn kịch đẳng thức" hay còn gọi là hiện tượng "ve vàng lột vỏ", đó cũng chính là điều mà trong mục trước ta gọi là chữ số "thoát y vũ".

Từ vấn đề ở mục trên ta được hai loại đẳng thức.

$$\begin{cases} 9 + 5 + 4 = 8 + 7 + 3 \\ 9^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 7^2 + 3^2 \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} 1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7 \\ 1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 \end{cases}$$

Vấn đề đặt ra bây giờ là: liệu có các loại đẳng thức và các tổ hợp số khác có tính chất như vậy không?

Từ đẳng thức (1), đặt  $a = 9$ ,  $b = 5$ ,  $c = 4$  thì 3 số ở vế phải sẽ là:

$$8 = c + 4; \quad 7 = a - 2; \quad 3 = b - 2$$

$$a + b + c = (c + 4) + (a - 2) + (b - 2).$$

Sau khi giải ta có:

$$a + b = 2c + 6.$$

Lại giải bằng phương pháp khác ta lại có hệ thức:

$$a + b = 2c + 3.$$

Như vậy chỉ cần  $a$ ,  $b$ ,  $c$  thỏa mãn điều kiện  $a + b = 2c + 6$  hoặc  $a + b = 2c + 3$  thì  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sẽ tạo được màn kịch đẳng thức như trên.

Từ các hệ thức vừa nêu trên ta có thể tìm được 4 tổ hợp số:

1.  $1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7$   
 $1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2$
2.  $2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8$   
 $2^2 + 6^2 + 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$
3.  $3 + 7 + 8 = 4 + 5 + 9$   
 $3^2 + 7^2 + 8^2 = 4^2 + 5^2 + 9^2$
4.  $1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9$   
 $1^2 + 6^2 + 8^2 = 2^2 + 4^2 + 9^2$

Bốn tổ hợp này sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn sẽ:

- (1) 1, 2, 3, 5, 6, 7,
- (2) 2, 3, 4, 6, 7, 8,
- (3) 3, 4, 5, 7, 8, 9,
- (4) 1, 2, 4, 5, 8, 9

Thế với các con số có nhiều chữ số thì sẽ ra sao?

Nếu đặt các chữ số ở các vị trí cao hơn là  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ta có:

$$\begin{aligned} (10x + 9)^2 + (10y + 5)^2 + (10z + 4)^2 &= \\ = (10z + 8)^2 + (10x + 7)^2 + (10y + 3)^2. \end{aligned}$$

Giải phương trình này ta sẽ được phương trình bất định:  $x + y = 2z$ .

Nếu quy ước các chữ số chưa biết lấy các giá trị từ 1 đến 9 và mỗi chữ số chỉ xuất hiện một lần ta sẽ có 16 tổ hợp dưới đây:

(1, 3, 2); (1, 5, 3); (1, 7, 4); (1, 9, 5); (2, 4, 3); (2, 6, 4); (2, 8, 5); (3, 5, 4); (3, 7, 5); (3, 9, 6); (4, 6, 5); (4, 8, 6); (5, 7, 6); (6, 9, 7); (6, 8, 7); (7, 9, 8).

Nếu giao hoán 2 chữ số đầu của mỗi tổ hợp trên ta lại có 16 tổ hợp khác kiểu (3, 1, 2)... (9, 7, 8).

Biết được quy luật này bạn có thể tự mình bày ra được màn kịch đẳng thức. Chúng ta sẽ thử xem như dưới đây:

Nếu các chữ số đầu chọn là 9, 5, 4 và 8, 7, 3.

Chữ số cuối chọn là 1, 5, 6 và 2, 3, 7.

thì các số ở hàng vạn, hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục sẽ được chọn như sau:

$$\begin{aligned} (1, 3, 2); (2, 4, 3); (3, 7, 5); (5, 6, 7) &\text{ sẽ tổ hợp thành các đẳng thức dưới đây:} \\ 912351^2 + 534775^2 + 423566^2 &= 823562^2 + 712353^2 + 334777^2 \end{aligned}$$

Bạn tính toán sẽ thấy đặc điểm "ve vàng lột vỏ".

Nắm được quy luật vừa trình bày, bạn có thể tự sắp xếp các tổ hợp số "thoát y vũ".

## Số 6174 có điều gì kỳ diệu?

Con số 6174 là một con số có điều khá thú vị. Chỉ cần xem lai lịch của nó ta sẽ được nó kỳ diệu ra sao?

Bạn tùy ý viết một con số có 4 chữ số, chỉ cần các chữ số trong số đó không hoàn toàn giống nhau, ví dụ số 2126. Sau đó bạn sắp xếp các chữ số

trong số đó theo thứ tự từ lớn đến bé, bạn sẽ có một con số mới là 6221;

Sau đó bạn lại sắp xếp các chữ số trong con số theo thứ tự từ bé đến lớn, bạn sẽ được một con số mới có 4 chữ số là 1226.

Lấy số lớn trừ đi số bé bạn sẽ có một con số có 4 chữ số:

$$6221 - 1226 = 4995.$$

Làm như trên đây là bạn thực hiện phép toán Capulek.

Tiếp theo nếu bạn lại thực hiện phép toán Capulek với số 4995, ta sẽ được một hiệu số. Tiếp tục thực hiện phép toán Capulek một vài lần bạn sẽ được số 6174.

Nhà toán học Mỹ Martin - Jadney đã mô tả sự kỳ diệu của con số 6174 trong sách *Ma trận bác học*. Nhà toán học Liên Xô Kasimov trong sách *Cảm nhận toán học* cũng viết là số 6174 là câu đố về chữ số.

Ta thử viết hết các phép toán Capulek của số 2126 ta sẽ có dãy các biến thiên sau đây:

$$\begin{array}{r} 6221 \quad 9954 \quad 5553 \quad 9981 \quad 8820 \quad 8532 \\ - 1226 \quad - 4599 \quad - 3555 \quad - 1899 \quad - 0288 \quad - 2358 \\ \hline 4995 \quad 5355 \quad 1998 \quad 8082 \quad 8532 \quad 6174 \end{array}$$

Nếu lại tiếp tục thực hiện phép toán Capulek ta sẽ được gì? Kết quả bạn sẽ lại nhận được số 6174. Quả là kỳ diệu.

$$6174 \rightarrow - \begin{array}{r} 7614 \\ 1467 \\ \hline 6147 \end{array}$$

Lý do là một số có 4 chữ số  $abcd$  ( $a > b > c > d$ ) nếu đổi trật tự thành  $d c b a$  dưới đây là một trong 30 số:

9990, 9801, 9711, 9621, 9521, 9531, 9441, 8991, 8802, 8712, 8622, 8532, 8442, 7992, 7803, 7713, 7923, 7533, 7443, 6993, 6804, 6714, 6624, 6534, 6444, 5994, 5805, 5715, 5625, 5535, 5445.

Mà với 30 số này nếu thực hiện phép Capulek thì sẽ thu được bảng kết quả như dưới đây (các chữ số ở trong bảng đã được sắp xếp theo thứ tự từ lớn đến nhỏ sau khi thực hiện phép toán) ví dụ:

Như vậy với 30 số nói trên thì qua kết quả thực hiện phép toán Capulek sẽ được số 6174.

Do các chữ số ở hai vị trí khác nhau (có các chữ số khác nhau) nên sau khi thực hiện một số hữu hạn các phép toán Capulek thì sẽ đi vào vòng tuần hoàn.

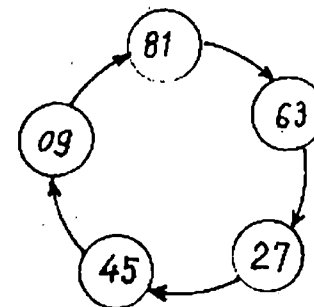
$$\begin{array}{ccccccc} 8842 & & 6444 & & 9621 & & 8622 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 7551 \rightarrow 9954 \rightarrow 5553 \rightarrow 9981 \rightarrow 8820 \rightarrow 8532 \rightarrow 8730 \rightarrow 6543 \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 9990 & & 6174 & & 6174 \\ & & 7632 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 6552 & & \uparrow & & 9972 \leftarrow 8850 \\ & & \downarrow & & & & \uparrow \\ 9531 \rightarrow 8721 \rightarrow 7443 \rightarrow 9963 \rightarrow 6642 \rightarrow 7641 \rightarrow 7753 & & 9441 \end{array}$$

Ví dụ với số 53 theo kết quả phép toán Capulek ta có:

$$\begin{array}{cccccc} 53 & 81 & 63 & 72 & 54 & 90 \\ - \frac{35}{18} \rightarrow - \frac{18}{63} \rightarrow - \frac{36}{27} \rightarrow - \frac{27}{45} \rightarrow - \frac{45}{09} \rightarrow - \frac{09}{81} \end{array}$$

Với các số có 3 chữ số thì sau một số hữu hạn các phép toán Capulek ta sẽ được kết quả là 495.

Với các số có 5 chữ số thì tính hình sẽ ra sao? Xin bạn hãy tự tính thử xem.



## Từ đâu mà có số 142857?

Có một bài toán liên quan đến 6 vị trí chữ số khá thú vị. Sáu chữ số nếu đem nhân từng chữ số với các số 2, 3, 4, 5, 6 ta sẽ được sáu chữ số đó, chỉ khác là vị trí của chúng trong số vừa tạo thành có khác đi.

Bạn có thể tính được 6 chữ số này không?

Giả thiết số có 6 chữ số đó là N. Số đứng đầu của N phải là 1. Vì nếu là 0 thì số đó chỉ còn có 5 chữ số sẽ không phù hợp đầu bài nên không phải là số 0. Nhưng lại nếu là số lớn hơn 1 thì trong các số 2N, 3N, 4N, 5N, 6N sẽ là số có 7 chữ số. Trong dãy số:

N, 2N, 3N, 4N, 5N, 6N thì số sau phải lớn hơn số trước, ít nhất chữ số đầu của các số đứng sau phải lớn hơn 1, và 6 chữ số đầu của các số N, 2N,

3N, 4N, 5N, 6N sẽ khác nhau, mà theo đề thì phải là một trong các chữ số của N. Chúng ta sẽ đi đến kết luận là: 6 chữ số của N phải không giống nhau, trong đó phải không có số chữ số 0 và phải có chữ số 1.

Trừ chữ số đầu, chữ số cuối cùng có đặc điểm riêng. Ta sẽ tiếp tục xét sau đây:

Chữ số cuối không phải là số chẵn, nếu không thì chữ số cuối của số 5N sẽ là số không, cũng không thể là số 5, nếu không thì số 2N sẽ lại có số không (0) ở cuối. Vậy chữ số cuối không thể là số chẵn cũng như không thể là số 5.

Như vậy chữ số cuối chỉ có thể là một trong 3 chữ số 3, 7, 9. Giả sử nếu chọn 3 thì  $3 \times 2 = 6$ ,  $3 \times 3 = 9$ ,  $3 \times 4 = 12$ ,  $3 \times 5 = 15$ ,  $3 \times 6 = 18$ , như vậy đuôi số không có số 1 không phù hợp với kết luận trước (6 chữ số có số 1).

Trường hợp nếu chọn số 9 thì khi nhân với 9 với 2, 3, 4, 5, 6, được số không có số 1 nên không phù hợp. Bây giờ chỉ còn số 7. Với số 7 thì  $7 \times 2 = 14$ ,  $7 \times 3 = 21$ ,  $7 \times 4 = 28$ ,  $7 \times 5 = 35$ ,  $7 \times 6 = 42$ . Nên xem ra chỉ có số 7 là phù hợp ở vị trí này. Mà sáu chữ số của số N phải do 7, 4, 1, 8, 5, 2 tạo thành chúng ta thấy là ở vị trí đầu số là số 1, ở vị trí cuối số là số 7 nên khi sắp xếp lại thì số đó sẽ là  $1xxxx7$ . Hiện tại chỉ còn chưa biết sắp xếp ra sao với bốn số 4, 8, 5, 2.

Bây giờ ta lại chú ý đến các số N, 2N, 3N, 4N, 5N, 6N đều do các số 7, 4, 1, 8, 5, 2 là 6 chữ số tạo nên. Cuối cùng, thế hai chữ số đồng một vị trí của hai số có thể bằng nhau không? Nếu như chúng bằng nhau thì dùng

số lớn trừ đi số bé thì hiệu số ấy phải có số 0 hoặc số 9. Nhưng hiệu số giữa các số N, 2N, 3N, 4N, 5N, 6N phải không có số 0 và số 9. Chúng ta lại có thêm một kết luận là các vị trí giống nhau của các số phải không bằng nhau.

Từ đó ta đi đến cách tính lý thú sau đây:

Bạn hãy xem  $N + 2N + 3N + 4N + 5N + 6N = 21N$ . Đây là cộng theo hàng ngang. Nếu sắp các số theo hàng dọc và cộng lại thì tổng các số ở vị trí thứ nhất sẽ là  $7 + 4 + 1 + 8 +$

$5 + 2 = 27$ . Ở vị trí thứ hai tổng các số cũng là 27... cho đến tổng các số ở vị trí thứ sáu cũng sẽ là 27. Như vậy tổng các số ở các vị trí tương ứng sẽ là:

$$\begin{array}{r} 27 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ \hline 2999997 \end{array}$$

Vì vậy  $21N = 2999997$  và  $N = \frac{2999997}{21} = 142857$ .

Và con số có sáu chữ số đó là: 142857.

Bây giờ ta lại trở về vấn đề con số 142857 là từ đâu mà ra?

Ta biết  $\frac{1}{7} = 0,14285701428570142857...$

Như vậy con số 142857 là một bộ phận số thập phân vô hạn tuần hoàn. Từ đó bạn có thể nghĩ:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} \times 2 = 0,285714$$

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{7} \times 3 = 0,428571$$

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{7} \times 4 = 0,571428$$

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{7} \times 5 = 0,718245$$

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{7} \times 6 = 0,857142$$

Và như vậy thì  $\frac{10}{7}, \frac{100}{7}, \frac{1000}{7}, \frac{10.000}{7}, \frac{100.000}{7}$  cũng là các số tuần hoàn do các số 1, 4, 2, 8, 5, 7 tạo nên.





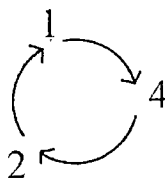
## Trong toán học có “hố đen” không?

“Hố đen” là một loại thiên thể được dự đoán trong vật lý và thiên thể học. Mật độ vật chất trong thiên thể hố đen lớn đặc biệt, khiến cho hố đen trở thành một vật thể đóng kín, khi một vật ngoại lai bị hố đen hút vào thì vĩnh viễn không thể thoát ra được nữa ngay cả đến ánh sáng có tốc độ 300.000 km/giờ, khi bị hố đen hút vào cũng không thể thoát ra được.

Thế trong toán học có hố đen không? Có. Có một loại trật tự tính toán theo một quá trình đặc thù mà khi tính đi, tính lại, khi các chữ số đã đưa vào guồng tính toán sẽ đi vào một vòng tuần hoàn, không thoát ra được. Ta có thể gọi hiện tượng này là một “hố đen” trong toán học.

Ví dụ “dự đoán Kakukay” là một ví dụ. Trước sau Đại chiến thứ hai, tại một địa phương ở Mỹ tên là Sucôlor có trò chơi chữ số, sau lan truyền đến châu Âu và thịnh hành ở đó một thời gian. Sau đó một người Nhật “Kakukay” du nhập về Nhật, và trở nên có tên “dự đoán Kakukay”. Nội dung của dự đoán như sau:

Ta thử dùng một loạt số tự nhiên tương đối bé  $11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , đến đây ta lại vào hố đen. Có người đã thử dùng máy tính điện tử thử với số từ  $7 \times 10^{11}$  trở lại, tiến hành thử nghiệm kết quả đều về 1, không có lần nào lọt ra ngoài vòng.

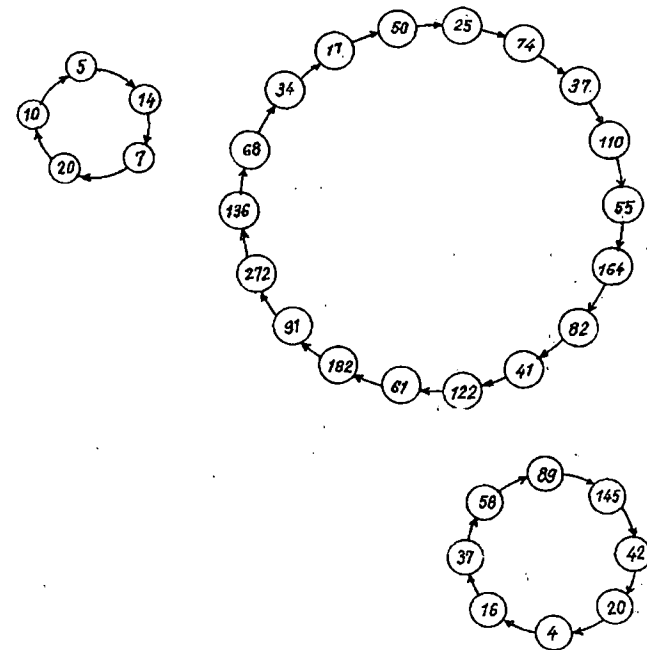


Nhưng đó chỉ là mới qua kiểm nghiệm và dự đoán chưa được chứng minh bằng phương pháp thì đó vẫn chỉ là dự đoán. Điều tưởng chừng như đơn giản mà đến nay vẫn còn chưa được chứng minh, cũng chưa có ai chứng minh ngược lại để bác bỏ.

Có người đã cải tiến phương thức tính toán để đi đến xuất hiện “hố đen”.

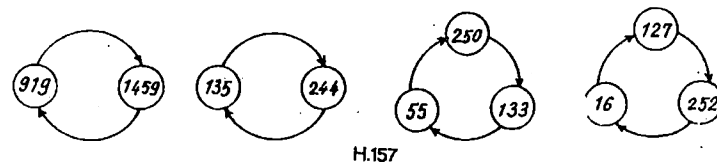
Cho một số tự nhiên bất kỳ, nếu là số chẵn thì đem chia hai, nếu là số lẻ thì nhân nó với 3 rồi trừ đi 2, cứ thế tiếp tục cuối cùng sẽ đến số 1 và sẽ đi vào một trong hai vòng tuần hoàn dưới đây:

Và đã tính thử với con số  $10^8$  vẫn thấy nghiệm đúng, nhưng vẫn chưa có chứng minh chặt chẽ.



Đối với các số chính phương, khi tiến hành tính toán vẫn tìm thấy “hố đen”. Chọn một số tự nhiên bất kỳ, lấy tổng bình phương các chữ số có trong số đó, rồi lại lấy tổng các bình phương các chữ số của số vừa mới nhận được... cứ thế tiếp tục qua một số lần hữu hạn các phép tính toán, ta sẽ có được một trong các số 1, hoặc là đi vào một trong các vòng ở hình bên phải. Với tổng các lập phương của các chữ số trong tự nhiên ta cũng có hiện tượng thú vị sau đây:

Lấy một số tự nhiên bất kỳ, tính tổng lập phương của các chữ số có trong số đó, sau đó lại lấy tổng lập phương của các chữ số trong số vừa mới nhận được..., cứ thế tiếp tục qua một số lần hữu hạn các phép tính toán, ta sẽ có được một trong các số 1, 407, 153, 370, 371 hoặc là đi vào một trong các vòng tuần hoàn sau đây:



H.157

Theo trên ta có thể thấy bốn đẳng thức rất lý thú sau đây:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3 \quad 370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3 \quad 407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

Các loại hồ đen như vậy ta gặp rất nhiều trong các dãy số. Ta hãy tùy ý chọn bốn số nguyên  $a, b, c, d$ . Sau đó ta tính hiệu số của hai số đứng cạnh nhau, tính hiệu số của số đầu và số cuối. Lấy giá trị tuyệt đối của chúng, ta có các chữ số mới..., sau lại thực hiện phép tính như trên, ..., sau một số hữu hạn lần tính toán ta sẽ được kết quả 0, 0, 0, 0. Tức  $(a, b, c, d) \rightarrow |a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a| \rightarrow \dots (0, 0, 0, 0)$  ví như ta chọn  $(93, 5, 21, 50) \rightarrow (88, 16, 29, 43) \rightarrow (72, 13, 14, 45) \rightarrow (59, 1, 31, 27) \rightarrow (58, 30, 4, 32) \rightarrow (28, 26, 28, 26) \rightarrow (2, 2, 2, 2) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$ .

Loại tính toán này có thể mở rộng đến  $2^n$  tình huống.

## Tại sao gọi dự đoán Goldbach là “1 + 1”?



Nhà toán học Đức Goldbach sống ở Nga và được bầu làm viện sĩ Viện hàn lâm khoa học. Từ năm 1729 Goldbach giữ liên lạc thường xuyên với nhà đại số Euler về những vấn đề toán học.

Ngày 7 - 6 - 1742, Goldbach đã viết thư cho Euler thông báo rằng ông mạo hiểm đưa ra một dự đoán “với bất kỳ số tự nhiên nào lớn hơn 5 cũng là tổng số của 3 nguyên tố”. Vào ngày 30 - 6 cùng năm đó, Euler đã viết thư trả lời cho Goldbach, ông cho rằng mỗi số chẵn lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố.

Ông nói tiếp: “Nhưng tôi còn chưa chứng minh được điều đó, nhưng tôi tin rằng điều đó hoàn toàn chính xác”.

Hai vấn đề này đã gây cho nhà toán học nhiều hứng thú. Nhiều người hi vọng chứng minh được hai dự đoán đó. Họ gọi đó là dự đoán Goldbach, và quy nạp thành hai vấn đề.

Mệnh đề A: Mỗi số chẵn lớn hơn 6 đều là tổng hai số lẻ nguyên tố, như  $6 = 3 + 3$ ;  $14 = 3 + 11 = 7 + 7 = 11 + 3$ ;

Mệnh đề B: Mỗi một số lẻ lớn hơn hoặc bằng 9, đều có thể biểu diễn bằng tổng 3 số lẻ nguyên tố, như  $9 = 3 + 3 + 3$ ,  $15 = 3 + 5 + 7 = 3 + 7 + 5 = \dots = 7 + 5 + 3 = 5 + 5 + 5$ .

Hiển nhiên là nếu chứng minh được mệnh đề A thì B cũng được chứng minh. Bởi vì nếu  $N$  là số lẻ lớn hơn hoặc bằng 9, thì  $N - 3$  sẽ hơn là số chẵn lớn hơn 6. Thế nhưng nếu chỉ chứng minh được mệnh đề B thì chưa chắc là A được chứng minh.

Dự đoán của Goldbach trải qua một thời gian dài vẫn chưa được chứng minh. Tại Hội nghị các nhà toán học quốc tế lần thứ 5 vào năm 1912 đã đề ra mệnh đề C đơn giản hơn:

Mệnh đề C: Tồn tại một số  $C$  để cho một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 sẽ bằng hai số nguyên tố không lớn hơn  $C$ .

Vào năm 1930, một nhà toán học Liên Xô 25 tuổi là Sineyrlman đã cho chứng minh mệnh đề C. Ông còn đưa ra điều kiện  $C$  không lớn hơn  $S$ ,  $S \leq 800.000$ . Sau này người ta gọi  $S$  là số Sineyrlman. Đó là bước đột phá đầu tiên vào dự đoán Goldbach.

Vào năm 1937, nhà toán học Liên Xô I.Vinogradov đã dùng phương pháp viên chu và phương pháp phối hợp tam giác do ông sáng tạo chứng minh rằng: Một số lẻ đủ lớn, đều có thể biểu diễn bằng tổng của ba số nguyên tố lẻ. Về cơ bản ông đã giải quyết được mệnh đề B. Cho đến nay thì đó là bước đột phá lớn nhất để giải quyết dự đoán Goldbach, và đó được gọi là định lý “ba số nguyên tố”.

Để giải quyết việc chứng minh mệnh đề A người ta đã đưa ra mệnh đề D:

Mệnh đề D: Với mỗi số chẵn đủ lớn ta có thể biểu diễn bằng các nhân tử và không vượt quá tổng các nhân tử là  $m$  và  $n$  nhân với hai số nào đó.

Mệnh đề này được ghi là “ $m + n$ ”. Ví dụ “ $3 + 4$ ” là phải chứng minh với số chẵn đủ lớn thì có thể biểu diễn bằng tổng các nhân tử là 3 nhân với một số và 4 nhân với một số khác. “ $1 + 1$ ” có nghĩa với số chẵn đủ lớn thì có thể biểu diễn bằng tổng hai số nguyên tố. Nếu chứng minh được “ $1 + 1$ ” thì trên cơ bản là chứng minh được mệnh đề A. Mệnh đề D được chứng minh như sau:

Nhà toán học Na Uy Bolan chứng minh được  $9 + 9$ . Sau này các nhà toán học Đức, Anh, Liên Xô đã chứng minh được  $7 + 7$ ,  $6 + 6$ ,  $5 + 5$  và  $4 + 4$ .

Vào năm 1848 nhà toán học Hungari Renyi đã chứng minh  $1 + C$  trong C là một số thường rất lớn, thành tựu của ông là đã khẳng định một trong hai số kia là số nguyên tố.

Nhà toán học Trung Quốc, Hoa La Canh vào những năm 30 đã chứng minh rằng "đường như có số chẵn"  $1 + 1$ . Vào năm 1956 nhà toán học Trung Quốc là Vương Nguyên chứng minh  $3 + 3$ . Vào năm đó nhà toán học Liên Xô Vinogradov cũng đã chứng minh  $3 + 3$ . Tiếp theo đó vào năm 1957 Vương Nguyên lại chứng minh được  $2 + 3$  cũng như  $a + b$  (trong đó tổng a và b không lớn hơn 5).

Vào năm 1962 nhà toán học Trung Quốc là Phan Thừa Động chứng minh được  $1 + 5$ . Cùng vào năm đó nhà toán học Liên Xô Barbain đã chứng minh  $1 + 5$ .

Vào năm 1963 Vương Nguyên, Phan Thừa Động, Barbain độc lập với nhau chứng minh được  $1 + 4$ . Vào năm 1965 A. Vinogradov cùng nhà toán học Liên Xô khác Puhexitov, nhà nhà toán học Italia Manpini đã chứng minh được  $1 + 3$ .

Vào năm 1966, nhà toán học Trung Quốc, Trần Cảnh Uyên đã chứng minh được  $1 + 2$ , nhưng do chưa phát biểu rõ ràng cách chứng minh nên không có ảnh hưởng lớn trên trường quốc tế. Sau này vào năm 1973, Trần Cảnh Uyên đã sửa chữa lại luận văn "Số chẵn lớn được biểu diễn bằng tổng một số nguyên và không quá 2 số nguyên khác" lập tức được các nhà toán học toàn thế giới nhiệt liệt hưởng ứng. Chứng minh của ông được gọi là định lý họ Trần, hết sức được tán dương.

Hiện nay người ta đang tấn công vào  $1 + 1$ .

## Thế nào là hình vuông hoàn mỹ?

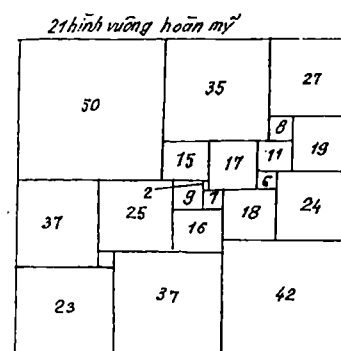
Nếu bạn cho một số hình vuông kích thước khác nhau, độ dài các cạnh không có cái nào bằng nhau, bạn có thể xếp chúng lại thành một "hình vuông lớn không"? Nếu xếp được thì hình vuông đó được gọi là "hình vuông hoàn mỹ".

Từ đó cũng có thể nói ngược lại: một hình vuông hoàn mỹ có thể chia thành nhiều hình vuông nhỏ. Điều kiện quan trọng là khi chia cắt thì các hình nhỏ phải là các hình vuông, không được có hình chữ nhật nào, cho dù thế nào thì không có hai hình vuông nhỏ nào có cạnh dài bằng nhau. Bạn có làm được điều đó không?

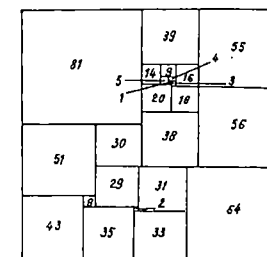
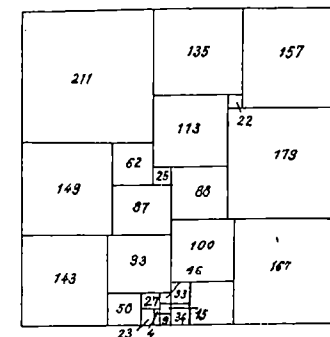
Điều đó rất khó dùng thực nghiệm để giải đáp. Vào năm 1930, nhà toán học Liên Xô Luzin từng dự đoán là không tồn tại hình vuông hoàn mỹ. Nhưng dự đoán cũng không có chứng minh. Vì vậy nhiều người vẫn tiếp tục tìm kiếm đáp án chia hình vuông. Sau này sự thực chứng minh dự đoán nói trên là không đúng và hình vuông hoàn mỹ thực sự tồn tại.

Vào năm 1939, Molan tìm thấy một hình vuông hoàn mỹ, hình này gồm 55 hình vuông to nhỏ khác nhau tạo thành, cạnh vuông dài 4205.

Người ta gọi các hình vuông nhỏ đã là chia các dải, như vậy hình vuông hoàn mỹ này có 55 dải. Mấy tháng sau, bốn sinh viên của trường đại học Lưu Kiều tìm thấy hình vuông hoàn toàn có 28 dải. Cạnh của hình vuông này dài 1015.



Điện tử cỡ lớn tạo nên một hình vuông hoàn mỹ với 21 dải. Đồng thời họ còn chứng minh là không thể tồn tại các hình vuông hoàn mỹ có số dải thấp hơn.



Vào năm 1967, Wilton lại tìm được hình vuông hoàn mỹ với 28 hình vuông nhỏ.

Nhưng từ năm 1948, Wilcos đã tìm thấy một trong một loạt hình vuông hoàn mỹ với 24 dải (xem hình trên con số chỉ độ dài của cạnh hình vuông nhỏ). Ngày nay người ta đã tìm được đến hai nghìn hình vuông hoàn mỹ với 24 dải trở lên. Cho đến năm 1978, tình hình mới có thể thay đổi. Trường đại học kỹ thuật Hà Lan Diwestiwu đã dùng máy tính

## Thế nào là hình chữ nhật hoàn mỹ?

Theo định nghĩa “hình chữ nhật hoàn mỹ” là hình chữ nhật có thể cắt thành nhiều hình vuông nhỏ, kích thước khác nhau. Nói khác đi nếu xếp các hình vuông to nhỏ khác nhau thành một hình chữ nhật thì hình chữ nhật đó là hình chữ nhật hoàn mỹ.

Dưới đây xin trình bày 9 hình vuông nhỏ để có thể xếp thành một hình chữ nhật. Đây là 6 dải của hình chữ nhật hoàn mỹ.

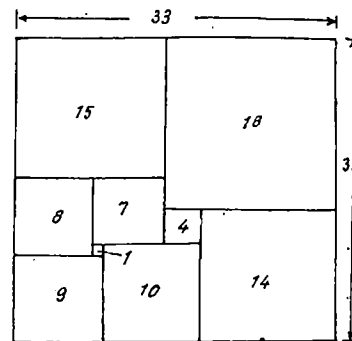
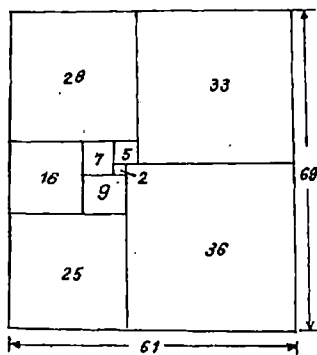
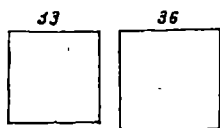
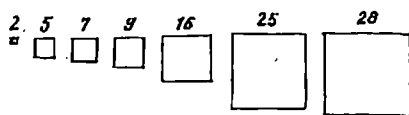
Hình chữ nhật này có cạnh là 61 và 69.

Hoàn toàn ngoài dự tính của mọi người, vấn đề thuần khoa học này có liên hệ với đường dẫn điện trong vật lý. Căn cứ theo quy tắc Kirchoff về mạch điện ta có thể viết được các phương trình về dòng điện. Có người

đã từ mạng điện tạo nên từ 9 đường dây dẫn, thông qua việc tính toán phương trình dòng điện không chỉ đã tính ra là chỉ có hai hình chữ nhật hoàn mỹ 9 dải, mà còn tính ra được các cạnh của hình vuông. Ngoài các điều đã giới thiệu ở trên, xin mời các bạn xem xét một trường hợp khác ở hình 163.

Dùng định luật Kirchoff người ta còn tính ra là chỉ có hai loại hình chữ nhật hoàn mỹ có bốn, năm, sáu, bảy, tám dải. Còn loại hình chữ nhật hoàn mỹ 10 dải thì có đến 6 loại.

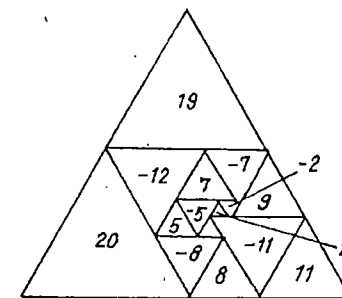
Vào năm 1969, Fidelko đã tìm thấy rằng với hình chữ nhật có kích thước  $270 \times 135$  ta có thể chia thành 23 hình vuông có cạnh là 1, 2, 4, 8, 9, 14, 15, 16, 19, 22, 24, 26, 27, 28, 42, 43, 54; 60, 63, 72, 75, 81.



Ngoài hình vuông hoàn mỹ, hình chữ nhật hoàn mỹ, người ta còn có “hình tam giác hoàn mỹ”. Một hình tam giác đều mà ta có thể chia thành được nhiều hình tam giác đều có kích thước khác nhau thì ta gọi đó là “tam giác hoàn mỹ”. Vấn đề này trông chừng có nhiều phức tạp.

Nếu mở rộng vấn đề khi chia cắt hình tam giác lớn thành các tam giác nhỏ, và chấp nhận quy cách tắt để cho số hình tam giác nhỏ cắt ra có kích thước bằng nhau mà không quá hai hình tam giác, đó là “tam giác gần hoàn mỹ”, hình vẽ 164 là một hình “tam giác gần hoàn mỹ”.

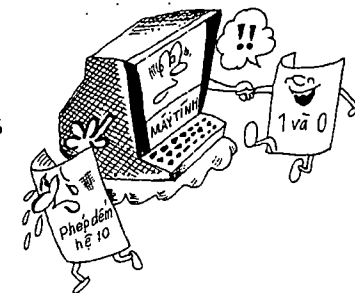
Hiển nhiên ta có thể thấy nếu lấy hướng tam giác "D" là hình tam giác thuận, còn gọi tam giác hướng "e" là tam giác ngược thì hình tam giác trên có thể đủ điều kiện để xem đó là "tam giác hoàn mỹ".



**Làm thế nào chuyển một số theo hệ đếm thập phân thành số theo hệ đếm nhị phân?**

Lúc mới sơ sinh, để ghi số người ta phải dùng ngón tay để đếm 1, 2, 3, 4... đến khi phát minh ra máy tính điện tử, người ta lại gặp phải chuyện phải ghi các số như thế nào?

Máy tính điện tử không có 10 ngón tay nên dĩ nhiên không thể dùng ngón tay để tính toán được. Nếu như ta lại máy móc mà dùng mười chữ số để tính toán thì trước hết ta phải chọn đủ 10 trạng thái để biểu thị mười chữ số. Bấy giờ máy móc sẽ trở nên hết sức phức tạp, việc thiết kế hoặc sử dụng đều rất khó khăn.



Máy tính điện tử thực hiện phép tính bằng dòng điện. Ví dụ: đường điện đóng hoặc mở, điện áp cao hay thấp, có xung điện hay không... Nếu dùng hai trạng thái để biểu thị chữ số thì quả là đơn giản tiện lợi. Vì vậy trong máy tính điện tử người ta dùng hai chữ số 1 và 0, do đó nảy ra cách đếm theo hệ cơ số hai (hay phép đếm nhị phân).

Trong phép đếm theo hệ cơ số hai chỉ dùng có hai chữ số, nên "gấp 2 thì tiến 1" tức gấp số 2 thì số 1 tiến thêm một bước và viết "10". (Ta gọi là gấp 2 tiến 1). Ta thử so sánh con số ở hai hệ đếm thập phân và nhị phân:

| Trong hệ đếm thập phân | Trong hệ đếm nhị phân |
|------------------------|-----------------------|
| $1 = 2^0$              | $1^0 = 1$             |
| $2 = 2^1$              | $10^1 = 10$           |
| $4 = 2^2$              | $10^2 = 100$          |
| $8 = 2^3$              | $10^3 = 1000$         |
| $16 = 2^4$             | $10^4 = 10000$        |

Thế thì, trong hệ đếm thập phân ta làm phép cộng năm số.

$$16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$$

$$\text{Cũng tức là: } 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 31.$$

Còn trong hệ đếm nhị phân thì phép cộng trên sẽ là:

$$10:000 + 1000 + 100 + 10 + 1 = 11111$$

Như vậy ta đã thấy con số 31 trong hệ đếm thập phân khi chuyển sang hệ nhị phân thì sẽ là 11111, đồng thời cũng biết cách tính đổi là dùng phép tính chia 2. Ta sẽ nêu một ví dụ: Ta thử đổi số 69 sang hệ đếm nhị phân. Ta dùng 2 làm số chia:

$$\begin{array}{l} 69 \\ 2 \end{array} \dots \text{ dư } 1$$

$$\begin{array}{l} 34 \\ 2 \end{array} \dots \text{ dư } 0$$

$$\begin{array}{l} 17 \\ 2 \end{array} \dots \text{ dư } 1$$

$$\begin{array}{l} 8 \\ 2 \end{array} \dots \text{ dư } 0$$

$$\begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \dots \text{ dư } 0$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \dots \text{ dư } 0$$

1... .. là số dư 1.

Bây giờ chúng ta đã biết số 69 trong hệ đếm thập phân có thể viết dưới dạng:

$$69 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1.$$

Như vậy có nghĩa là muốn đổi số 69 từ hệ đếm thập phân thành hệ nhị phân, ta phải dùng số 0 và số 1 tức sẽ là: 1000101.

Vậy "1000101" từ đâu mà có? Tức là viết số dư của phép chia 2 theo thứ tự từ dưới lên, viết thành hàng mà có:

Nhưng ta lại thấy: Các số viết theo hệ đếm nhị phân dài và phiền phức, viết và đọc đều khó. Bây giờ các nhà thiết kế lại nghĩ đến hệ đếm bát phân hay còn gọi là cách đếm "gấp 8 thì tiến một" (hay là hệ đếm cơ số 8).

Tại sao lại dùng hệ đếm cơ số 8? Vì trong hệ đếm cơ số 8 có tám chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Nếu liệt kê các số viết theo hệ đếm cơ số 2 có ba chữ số, ta có: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 cũng là 8 số. Chúng ta đem các số xếp đối ứng một - một của hai hệ đếm ta sẽ có:

Hệ đếm cơ số 8 0 1 2 3 4 5 6 7

Hệ đếm cơ số 2 000 001 010 011 100 101 110 111

Nếu đem số 73 viết theo hệ đếm cơ số 8 viết dưới dạng cơ số 2 ta sẽ có:

|     |     |
|-----|-----|
| 7   | 3   |
| ↓   | ↓   |
| 111 | 011 |

Vì vậy ta thấy số 73 trong hệ đếm cơ số 8 khi chuyển sang hệ đếm cơ số 2 sẽ là 111011. Có người hỏi như vậy số "83" sẽ được viết như thế nào ở hệ đếm cơ số 2? Cần biết rằng số lớn nhất trong hệ cơ số 8 là 7, số chữ số lớn nhất của một số có hai chữ số là 63. Vì vậy trong hệ đếm cơ số 8 không có số 83. Còn số "83" của hệ đếm cơ số 10 khi chuyển sang hệ đếm cơ số 8 sẽ là 123 ( $83 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8 + 3$ ). Như vậy khi chuyển đổi số 83 của hệ đếm cơ số 10 sang các hệ đếm cơ số 2 sẽ là:

Hệ đếm cơ số 10 83

Hệ đếm cơ số 8 123

Hệ đếm cơ số 2 1010011 (bỏ bớt số 0 đứng ở đầu).

Trong máy tính điện tử còn có hệ đếm cơ số 16. Mười sáu chữ số trong hệ đếm cơ số 16 là: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, chúng phù hợp với các số có 4 chữ số trong hệ đếm cơ số 2, và cũng dễ dàng chuyển sang hệ đếm cơ số 2. Đó cũng chính là lý do để người ta coi trọng hệ đếm này.

## Có thể dùng máy tính điện tử thay thế hoàn toàn bàn tính và tính miệng?

Với một máy tính điện tử nhỏ cầm tay, nhẹ nhàng ấn mấy cái là có thể tính được kết quả rõ ràng, dễ dàng, vì vậy làm người ta ưa dùng. Chính nhờ đó mà máy tính điện tử được người ta hoan nghênh và được sử dụng rộng rãi.



Chỗ tốt của máy tính điện tử là giảm nhẹ được lao động của não khi tính toán, nên đối với các phép tính rắc rối, phức tạp, máy tính điện tử quả là trợ thủ đắc lực. Đối với các học sinh ở bậc trung học, tiểu học thì sẽ không như vậy. Các đối tượng này đang cần ở trong giai đoạn phát triển trí lực, cần phải hàng ngày để cho trí não được luyện tập “thể thao”, suy đi nghĩ lại nhiều vấn đề, việc tính toán sẽ là cách

nhằm mục đích “rèn luyện” trí não. Việc sử dụng máy tính sẽ không lợi bằng dùng bàn tính hay tính miệng hoặc tính bằng bút trên giấy.

Vì sao vậy?

Bạn có nhìn thấy máy tính điện tử tính toán như thế nào không? Không nhìn thấy! Nó giống như một chiếc hộp đen, là một kẻ “giữ bí mật” hoàn toàn. Khi bạn bấm nút, ra lệnh cho máy thực hiện một phép tính, lập tức sẽ hiện ngay chữ số kết quả, báo cho bạn biết đáp án là bao nhiêu, mà không hề báo cho bạn biết “tính toán như thế nào”. Người sử dụng máy tính không biết được quá trình tính xảy ra như thế nào, nó không để bạn động não, bạn sẽ không học tập được gì về quá trình tính.

Máy tính điện tử thay cho học sinh làm tính sẽ làm cho học sinh không buồn động não và không còn muốn học một điều gì. Nếu như một học sinh từ lúc mới đi học, khi gặp phải một bài toán đều dùng máy tính điện tử để thực hiện thì e rằng đến khi học hết trung học, thì đến các phép tính cơ sở ở tiểu học cũng không biết làm, bởi vì não của cậu ta không hề được huấn luyện. Và như vậy học sinh này sẽ càng ngày càng lười, càng dần dần. Thật là đáng tiếc.

Còn dùng bàn tính thì lại là việc khác. Với bàn tính bạn không chỉ được xem toàn bộ quá trình tính toán mà còn yêu cầu bạn đi sâu hơn về cách tính. Ví dụ hãy tính  $6 + 7 = ?$  (tuy là bài tính đơn giản bạn hãy dùng câu khẩu quyết 7 là lên 2 bỏ 5 tiến 1 (ở trên bàn tính đã đặt sẵn số 6 là  $5 + 1$  bây giờ thêm 7 tức gẩy thêm 2 nếu gẩy thêm 5 thì  $5 + 5 = 10$  tức là phải bỏ đi 5 đơn vị và gẩy thêm một bi ở hàng chục nên gọi là tiến một). Sau đó bạn đọc số bi trên bàn tính bạn sẽ thấy ngay kết quả. Nhờ vậy, khi đã sử dụng bàn tính nhiều lần trong đầu bạn sẽ giữ được ấn tượng:  $6 = 5 + 1$ ,  $7 = 5 + 2$  sau khi cộng hai vế 5 và 2 thì  $5 + 5 = 10$  sẽ gẩy thêm một bi ở hàng chục,  $1 + 2 = 3$  và vì vậy  $6 + 7 = 13$ . Bạn thấy đấy, ở đây không chỉ đơn thuần là tính toán mà còn làm ta hiểu sâu hơn về các con số. Sử dụng bàn tính, học cách tính các bi tính không chỉ cho chúng ta cả tay, cả não đều làm việc mà còn làm cho chúng ta biết cái đặc điểm của các chữ số, chuẩn bị tốt cho việc tính nhẩm. Nhiệm vụ của học sinh là học tập, sử dụng bàn tính đúng là được học thêm kiến thức, ngoài việc rèn luyện trí óc, còn được rèn luyện việc phối hợp giữa tay và trí óc, tạo nên kỹ năng rất có ích cho việc mở mang trí lực.

Không dùng bàn tính mà tính nhẩm hoặc tính bằng bút trên giấy cũng tốt. Khi người ta đến độ tuổi nào đó, khi làm toán sẽ không còn phải dùng hình tượng cụ thể của bàn tính mà có thể tính nhẩm, tính bằng miệng, tính bằng bút. Qua việc giải toán, làm tính sẽ bồi dưỡng năng lực tính toán. Năng lực tính toán cũng là một nội dung của việc phát triển trí lực. Nhiều người thích làm các bài toán giải trí, mà năng lực giải toán thường là do học tập ở nhà trường tích lũy được mà có.

Có nhiều nhà khoa học hay dùng trí óc vốn thông minh, ngày ngày được sử dụng máy tính, có người rất thích tính bằng miệng, tính nhẩm.

Có nhà khoa học khi nhìn người “đứng trên khí cầu” biểu diễn, lập tức tính được thể tích của khí cầu, áp lực của khí cầu, đó là do kết quả họ đã tự huấn luyện trí óc mình.



Hy vọng tự biến mình thành người thông minh, họ phải học tập hằng ngày, luyện tập tính bằng miệng, tính nhẩm, thì nên khuyên học sinh nên ít dùng máy tính hoặc không dùng thì càng tốt.

## Có phải mã vạch là một loại toán học không?

Ngày nay khi xã hội đã phát triển, chữ số đã vượt khỏi phạm vi tính toán, vượt khỏi phạm vi toán học thành một loại phù hiệu, một loại phiên hiệu mang nhiều thông tin.

Dấu bưu điện do 6 chữ số tạo thành mà không biểu thị ý nghĩ gì về số, không có hàm ý gì về toán học. Số 650071 không phải là con số sáu trăm năm mươi nghìn không trăm bảy mươi một mà là để ký hiệu cho một địa phương nào đó trong nước.

Chữ số trên biển số ô tô cũng không phải đại diện cho một con số mà chỉ cho một thông tin khiến người ta thấy là biết ngay xe thuộc thành phố nào, địa phương nào, có phải xe của người nước ngoài hay không, là xe dân dụng, xe cảnh sát hay xe quân sự, và công an có thể biết được chủ của nó là ai?

Mã hiệu hoặc phiên hiệu được dùng rộng rãi trong đời sống. Sách ở thư viện đều có phiên hiệu, tra phiên hiệu thì có thể tìm được một quyển sách cần thiết trong mấy chục vạn quyển sách trong kho sách một cách nhanh chóng.

Các sản phẩm bày ở các cửa hàng cũng có ký hiệu để bày tỏ được nhà sản xuất, hình thức, ngày xuất xưởng, giá hàng...

Có nhãn hiệu chỉ là bước đầu. Dưới đây nói về vấn đề làm thế nào để nhanh chóng nhận được mã hiệu. Người ta mong làm thế nào chỉ trong nháy mắt mà có thể nhanh chóng nhận được mã hiệu.

Nhiều người nghĩ đến việc làm có thể nhận được bằng máy móc. Hiển nhiên đó là biện pháp tốt không có gì bằng. Nhưng máy tính điện tử không biết chữ, ngay cả mười chữ số 0, 1, 2, 3... máy cũng không nhận biết được. Máy chỉ nhận các chữ số mà người ta đưa vào máy mà không hiểu như thế nào là một, hai, ba... Các chữ số nghèo nàn quá là khó với máy tính.

Để máy tính nhận được các chữ số, người ta sáng tạo ra một loại chữ số mới đó là mã vạch.

Mới nhìn thì mã vạch là các vạch có độ rộng to nhỏ khác nhau. Thực ra nó là một loạt số liên tục các chữ số theo hệ đếm nhị phân. Mọi người đều biết rằng hệ đếm nhị phân chỉ có hai chữ số: 1 và 0. Số 1 và số 0 được phân biệt theo hình dạng "1" là nét vạch, 0 là một vòng tròn.



Trong mã vạch số 1 và số 0 được biểu thị bằng độ rộng của vạch, vạch rộng là số 1, vạch mảnh là số 0.

Hoặc cũng có thể dùng vạch màu đen và màu trắng để biểu thị, vạch đen là số 1, vạch trắng là số không, lại có thể dùng vạch dài làm số 1, vạch ngắn làm số 0.

Đương nhiên, cũng có những tình huống đặc thù: có nhiều vạch đen rộng là do nhiều vạch đen nhỏ kết hợp lại mà thành, giống như người ta viết chữ thảo (chữ Hán).

Mã vạch không phải dành cho người đọc các số, bởi vì độ đen trắng, rộng hẹp của các vạch khác nhau rất ít, mắt người khó nhìn thấy ngay. Nhưng đối với máy tính, thì đó không phải là một việc khó.

Máy tính điện tử có thể dựa vào bút quang điện để đọc mã vạch. Bút quang điện sẽ nhận tín hiệu ánh sáng, sự khác nhau về độ đen trắng của vạch có thể chuyển thành sự mạnh yếu của cường độ dòng. Sự khác biệt về độ rộng hẹp của các vạch có thể biến thành thời gian xuất hiện tín hiệu dài hay ngắn. Như vậy bút quang điện có thể trực tiếp hiểu được mã vạch.

Máy móc trực tiếp đọc được chữ số là điều hết sức quan trọng. Ví như khi bạn đến thư viện để mượn sách, bạn tìm đến giá sách chọn sách cần mượn giao cho thủ thư. Nhân viên thư viện dùng bút quang điện chiếu vào mã vạch ở sau sách, thực hiện các thủ tục cho mượn, toàn bộ quá trình chỉ thực hiện trong vòng mấy giây. Khi trả sách, cũng chỉ dùng bút quang

điện chiếu mấy giây, thủ thư lập tức sẽ phát hiện là bạn mượn sách có quá thời hạn không, nếu khi bạn mượn quá hạn họ sẽ thông báo đã quá hạn 3, 5 ngày... Trong thời gian để thực hiện thủ tục mượn sách, nhân viên thư viện thực hiện nhẹ nhàng, người mượn không phải chờ lâu. Mọi người đều vui mừng.

Khi việc sử dụng máy tính đã được mở rộng thì mã vạch ngày càng được sử dụng rộng rãi hơn. Bạn tự ngẫm xem bạn đã thấy mã vạch ở nơi nào chưa?

Ở bao bì thi, tem thư.

Các bao gói hàng ở siêu thị.

Sau hàng chục năm nữa bạn sẽ thấy mã vạch sẽ còn được sử dụng rộng rãi hơn.

## Học sinh trung học có nên dùng máy tính điện tử không?

Máy tính điện tử là sản phẩm của kỹ thuật điện tử hiện đại, tinh xảo, sử dụng tiện lợi, tính toán chính xác. Mỗi loại máy tính có thể tiến hành các phép tính với các số chữ số nhất định (máy tính 8 chữ số, 10 chữ số, 12 chữ số...), làm bốn phép tính cơ bản. Loại máy tính cao cấp có thể tiến hành phép tính lũy thừa, khai phương, lấy logarit (logarit thường, logarit tự nhiên), tính các hàm lượng giác. Khi đưa số vào máy, kết quả sẽ xuất hiện trên màn hình thể lỏng.

Học sinh trung học có nên dùng máy tính không?

Về vấn đề này không nên nói một cách chung chung mà phải căn cứ tình hình cụ thể mà xử lý. Có những phép tính công kênh mà phương pháp tính không quan trọng lắm: ví dụ làm các phép tính nhân, tính chia với các con số quá lớn, cần lấy số trung bình của 100 số liệu thí nghiệm, cần tính toán hoặc tra bảng để tìm  $\lg 3,141592592654$ , thì dùng máy tính sẽ tiện lợi, đỡ tốn thời gian. Cũng có những phép tính toán yêu cầu phải tính vi, tức là cần có nhiều chữ số sau dấu phẩy như tính toán các đồ vật quý (như vàng, đá quý) có giá trị lớn người ta cũng thường hay dùng máy tính.

Nhưng cũng có nhiều phép tính toán cơ bản ở bậc tiểu học, phổ thông cơ sở với các số hữu tỉ, vô tỉ thì nên tính bằng tay bởi vì thông qua công việc tính giúp ta hiểu được các tính chất của các con số, nắm chắc các kỹ xảo tính toán, điều đó đều hết sức quan trọng. Chúng ta không chỉ cần biết các kỹ xảo khi tính  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$  mà còn phải biết tính  $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt{64}$  thậm chí tính  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , v.v... đây là những phép lấy các bình phương của số, cũng như phương pháp khai căn, là những điều cần được dạy dỗ và nắm được cách thực hành. Cũng cần phải rèn luyện để sử dụng thành thạo các công thức, ví dụ như tính  $1002 - 1,99^2$ ,  $101 \times 99$  v.v...



Chúng ta đều biết: Khi tính toán bằng tay thì phải: Một là nắm chắc công thức; hai là kinh nghiệm tính (phải được tích lũy lâu dài); ba là các kỹ xảo. Người ta thường nói: quen tay hay làm. Có nhiều người do luyện tập nhiều mà nắm được kỹ xảo, đối với một số phép tính tính vi thậm chí lấy bình phương các số, khai phương so với máy tính họ còn thực hiện nhanh hơn.

Tốc độ tính toán của máy tính thì quả là nhanh thật, nhưng đối với một số bài toán, dùng máy tính không phải là ưu việt, ví dụ tính:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{998 \times 999} + \frac{1}{999 \times 1000}$$

thì nếu dùng máy tính sẽ tốn nhiều thời gian đưa số liệu vào máy, làm chúng ta mệt óc, nếu tính bằng tay ta có:

$$\text{Do } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ nên}$$

Biểu thức trên có thể viết là:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{998} - \frac{1}{999} + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000} = 0,999$$

Xem qua các bạn cũng dễ thấy ai tính nhanh hơn. Nếu tính bài toán này bằng máy tính điện tử thì sẽ khá cực nhọc, phức tạp mà điều căn bản là không biết được các đặc điểm lý thú của toán.

Vì vậy, nói vắn tắt với những phép tính cơ bản thì cần phải hết sức tận dụng cách động não, dùng cách tính tay, tính bằng miệng, tính nhẩm, tính bằng bút trên giấy để hoàn thành phép tính. Chỉ khi bắt buộc mới phải nhờ cậy đến máy tính.

Cần nói thêm là chớ có xem thường việc nhớ các con số, ví dụ bạn cần phải nhớ kỹ các công thức toán học quan trọng, ngoài ra bạn cũng cần phải nhớ một số kết quả tính toán quan trọng khác, ví dụ bạn cần nhớ bình phương của các số từ 1 - 30 cũng như một số con số quan trọng khác như:

$$\pi = 3,141592592654...$$

$$\sqrt{2} = 1,41421$$

$$\sqrt{3} = 1,732050$$

$$\lg 2 = 0,3010$$

$$\lg 3 = 0,771...$$

Nhớ được các con số đó giúp bạn tính toán thuận lợi hơn nhiều.

## Có thể dùng máy tính điện tử để chứng minh các định lý hình học không?

Để chứng minh các định lý hình học người ta phải tốn công suy nghĩ, không có một khuôn khổ nhất định nào đó để làm theo. Nó cũng như công việc của một nhà điêu khắc là phải dựa vào sự khéo léo của bàn tay, dựa vào kỹ xảo và linh cảm nghề nghiệp. So với việc giải quyết một phương trình đại số thì việc chứng minh hình học khá xa.

Việc tính toán quả là việc cực nhọc khô khan, nhưng lại có khuôn mẫu để làm theo, dễ nắm được cách thực hiện, còn chứng minh thì đòi hỏi phải linh hoạt khéo léo, phải tùy cơ ứng biến.

Vậy có thể tìm cách biến các vấn đề cần chứng minh thành các khuôn thước để tính toán được không? (Đó chính là vấn đề chứng minh một cách máy móc).

Loài người đã sớm có nguyện vọng này. Từ thế kỷ XVII, nhà toán học Pháp Descartes phát minh ra phương pháp tọa độ, lập nên môn hình học

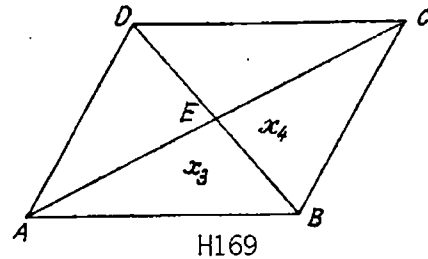
giải tích, đây là bước đột phá đầu tiên vào nguyện vọng này. Dùng phương pháp tọa độ ta có thể biến một bài toán hình học thành một bài toán đại số, thế nhưng còn có vấn đề biến bài toán chứng minh hình học thành phép tính. Lúc bấy giờ vì còn chưa có công cụ tính toán tiên tiến, nên việc biến bài toán chứng minh thành một phép tính toán là khá phiền phức. Đến những năm 50 của thế kỷ XX, khi máy tính điện tử ra đời, nhiều nhà toán học trên thế giới hết sức hứng thú với ý tưởng “cơ giới hoá phương pháp chứng minh”. Trải qua 20 năm nghiên cứu, nhưng vẫn chưa tìm được phương pháp hữu hiệu để cơ giới hoá phương pháp chứng minh.

Nhà toán học nổi tiếng Trung Quốc, giáo sư Ngô Văn Tuấn đã khám phá được những nét ưu tú của nền toán học cổ đại Trung Quốc, dày công nghiên cứu, sáng tạo cái mới, đến năm 1977 đã công bố phương pháp mới để chứng minh máy móc các định lý, hình học, phương pháp này ngày nay đã nổi tiếng khắp thế giới và được mang tên là phương pháp họ Ngô. Dùng phương pháp họ Ngô (Ngô pháp) có thể dùng máy tính điện tử cỡ nhỏ để chứng minh các định lý hình học khá phức tạp như định lý Simson, định lý Felbague, định lý Muler một cách nhanh chóng cũng như phát minh các định lý mới cao xa khác. Ngô pháp như là một cục nam châm đã hấp dẫn nhiều chuyên gia chuyên nghiên cứu vấn đề cơ giới hoá phương pháp chứng minh trên thế giới. Có nhiều chuyên gia về vật lý trên thế giới học tập Ngô pháp, nghiên cứu Ngô pháp - Nhà mỹ học Trung Quốc là tiến sĩ Chu Hoắc Thanh đã công bố một tập chuyên khảo bằng tiếng Anh, nêu lên việc ông đã dùng Ngô pháp để chứng minh 500 định lý hình học. Theo khám phá của Ngô pháp, ông đã dùng phương pháp chứng minh máy móc định lý hình học để áp dụng thành công công cụ đại số Grubas (viết tắt GB). Tóm lại với sự xuất hiện của Ngô pháp đã mở ra một phương trời mới cho việc nghiên cứu các phương pháp cơ giới hoá để chứng minh các định lý hình học, làm Trung Quốc trở thành nước đi đầu trong lĩnh vực này.

Thế thì bạn sẽ hỏi làm thế nào để chứng minh các định lý hình học bằng máy tính? Muốn biết tường tận xin mời các bạn đọc quyển sách của giáo sư Ngô Văn Tuấn: *Nguyên lý cơ bản của phương pháp chứng minh định lý hình học một cách máy móc* (Nhà xuất bản Khoa học Trung Quốc, 1984, 280 tr). Tuy nhiên có thể tóm tắt tư tưởng cơ bản của phương pháp như trình bày ở dưới đây để các bạn biết một cách vắn tắt làm thế nào để chứng minh định lý hình học một cách máy móc. Ví dụ cần chứng minh định lý: “Các góc đối trong một hình bình hành bằng nhau”.

Theo hình 169 ta đã biết các điều kiện  $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ , E là giao điểm của AC và BD. Cần phải chứng minh  $AE = EC$  cũng như  $BE = DE$ . Đường nhiên để làm được việc đó ta cần chứng minh  $AE = CE$ . Bởi vì cũng tương tự ta sẽ có  $BE = DE$ .

Bước thứ nhất để chứng minh định lý là ta phải đại số hoá bài toán hình học. Con đường để đại số hoá là dùng phương pháp toạ độ, cũng như các phương pháp dùng các định lý tam giác. Để các bạn nào chưa học qua phương pháp toạ độ cũng nắm được phương pháp, chúng tôi dùng phương pháp diện tích để đại số hoá.



Ta dùng ký hiệu  $S_{ABC}$  để chỉ đó là diện tích tam giác ABC.

Đặt  $S_{ABC} = u$ ,  $S_{ABD} = x_1$ ,  $S_{BCD} = x_2$ ,  $S_{ABE} = x_3$ ,  $S_{BCE} = x_4$ .

Theo đầu bài ta thiết lập các điều kiện liên hệ giữa các đại lượng  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  với  $u$ . Các đại lượng này có mối liên quan đại số sau đây:

- (1)  $x_1 = u$  (tức  $S_{ABD} = S_{ABC}$  do  $AB \parallel CD$ )
- (2)  $x_2 = u$  (tức  $S_{BCD} = S_{ABC}$  do  $BC \parallel AD$ )
- (3)  $x_3 + x_4 = u$  (tức  $S_{ABE} + S_{BCE} = S_{ABC}$  chứng tỏ E nằm trên AC).
- (4)  $x_1 \cdot x_4 = x_2 \cdot x_3$  (tức  $\frac{S_{ABD}}{S_{ABE}} = \frac{BD}{BE} = \frac{S_{BCD}}{S_{BCE}}$ , chứng tỏ E nằm trên BD).

Điều ta cần chứng minh là  $AE = EC$ , tức  $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABE}$  tức cũng chính là cần phải có  $x_3 = x_4$ ,  $x_3 = x_1 - x_3$ .

Như vậy từ yêu cầu chứng minh định lý hình học đi đến vấn đề từ các đẳng thức đại số (1), (2), (3), (4) ta phải chứng minh được đẳng thức  $x_3 = x_4$ .

Bước thứ hai của chứng minh máy móc là biến các giả thiết của bài toán thành các tiêu chuẩn hình thức hoặc còn gọi là "chỉnh lý trật tự". Trong các đẳng thức (2), (3), (4) có 5 biến là  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  và  $u$ . Sở dĩ nói là "chỉnh lý trật tự" là vì ta phải từ các đẳng thức làm xuất hiện một tổ hợp đẳng thức. Trong (1) có các biến  $x_1$  và  $u$ , trong (2) có thêm biến  $x_2$  theo đúng yêu cầu; trong (3) xuất hiện thêm  $x_3$  và  $x_4$  không hợp yêu cầu. Như vậy từ đẳng thức này ta cần phải bỏ bớt một biến đã tăng lên. Từ (4) ta rút ra:

$$x_4 = \frac{x_3 x_2}{x_1}$$

Sau khi thay vào (3)  $x_4$  bị khử mất. Qua biến đổi (khử mẫu số) ta có:  $x_1 x_3 + x_2 x_3 = u x_1$ . Dùng hệ thức này thay cho (3) ta có tổ hợp các đẳng thức hình thức:

- (a)  $x_1 = u$ .
- (b)  $x_2 = u$
- (c)  $x_1 x_3 + x_2 x_3 = x_1 u$ .
- (d)  $x_1 x_4 = x_2 x_3$ .

Trong tổ hợp các đẳng thức này ta thấy: Trong (a) không có  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ; trong (b) không xuất hiện  $x_3$ ,  $x_4$ , trong (a), (b), (c) không xuất hiện  $x_4$ , trong (d) xuất hiện  $x_4$ . Cách biến đổi làm tăng thêm tổ hợp đẳng thức ta gọi đó "dãy số tăng" hoặc "dãy số họ Ngô".

Bước thứ ba trong việc chứng minh máy móc được gọi là "ước lược". Trước hết từ (d) ta tìm  $x_4$  sau đó thay giá trị vừa tìm được để chứng minh  $x_3 = x_4$  (nếu trong (d) không phải chứa  $x_4$  ở bậc một nên không phải để tìm được  $x_1$ ). Thế nhưng có thể giảm hạng  $x_4$  trong hệ thức. Ví dụ: nếu (d) có dạng  $x_4^2 u + x_1 x_4 = u$ . Ta cần chứng minh  $x_4^2 u = x_1 + x_2$ ; thì sau khi ước lược ta có  $u - x_1 x_4 = x_1 + x_2$ , khử mẫu số thì từ  $x_3 = x_4$  sẽ thành  $x_1 x_3 = x_2 x_3$ .

Từ (c) giải ra  $x_3$  rồi thay vào hệ thức vừa có ta được:

$$x_1^2 u = x_1 x_2 u.$$

Từ (b) giải ra  $x_2 : x_2 = u$  thay vào ta có:

$$x_1^2 u = x_1 u^2$$

Cuối cùng từ (a) ta có  $x_1 = u$ , thay vào ta có:

$$u^3 = u^3$$

Đó là một hằng đẳng thức. Từ cách chứng minh này ta thấy  $x_3 = x_4$  tức là đã chứng minh được định lý.

Nếu bây giờ bạn lại dùng (1), (2) thay vào (4) ta sẽ được  $u x_4 = u x_3$  nên được ngay  $x_3 = x_4$  chẳng tiện hơn sao? Tại sao phải dùng biện pháp "chỉnh lý thứ tự", "ước lược", quá rắc rối. Đó là do máy tính hoạt động theo thứ tự xác định không linh hoạt được như người. Chỉ cần viết quy luật tính toán (thuật toán) chính xác thì máy mới giải đáp, chứng minh được định lý đặt ra.

Phương pháp chứng minh định lý họ Ngô đã cơ bản kết thúc công việc thủ công sơ đẳng có lịch sử mấy ngàn năm. Ngay khi đưa ra các định lý hình học sơ cấp, chỉ cần đưa vào máy tính là được chứng minh. Công việc chủ yếu của người là cho dự đoán, phát hiện để tìm ra các định lý thú vị nhất để nghiên cứu, cũng như tìm cách chứng minh đơn giản nhất.

## MỤC LỤC

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Lời nói đầu.....                                                                  | 5  |
| Người nguyên thủy ghi các con số như thế nào? .....                               | 7  |
| Có phải chữ số "0" được tìm ra muộn nhất không? .....                             | 8  |
| Có phải viết con số theo vị trí cũng là một phát minh? .....                      | 10 |
| Người cổ đại biểu diễn phân số như thế nào?.....                                  | 12 |
| Có phải phân số Ai Cập là phân số đơn giản nhất?.....                             | 13 |
| Loài Người đã sử dụng các hệ đếm nào? .....                                       | 17 |
| Ai đã chứng minh định lý tam giác sớm nhất?.....                                  | 18 |
| Số 71 được tính như thế nào? .....                                                | 20 |
| Có phải người ta đã tính số ( $\pi$ ) đến một tỉ con số sau dấu phẩy?..           | 22 |
| Nội dung bài toán khó của hình học thời cổ đại như thế nào?.....                  | 24 |
| Vì sao bài toán cầu phương lại không thực hiện được? .....                        | 26 |
| Có phải thực sự không thể chia một góc bất kỳ thành 3 góc bằng nhau?.....         | 29 |
| Vì sao cần phải nghiên cứu ma phương (hình vuông kỳ ảo)?.....                     | 31 |
| Thế nào là "phương pháp khử Gauss"? .....                                         | 33 |
| Tính toán nhanh có cần bí quyết không?.....                                       | 34 |
| Bài toán "100 con gà" và bài toán "Hoà thượng ăn bánh bao" có gì khác nhau? ..... | 36 |
| Chuyện "Chàng cầm mua thịt" có liên quan gì với toán học cổ Khiết Đan?.....       | 38 |
| Bài toán chia dầu có gì giống với quả bi-a trên bàn? .....                        | 41 |
| Ngày tết nguyên đán của 10 năm, 20 năm sau là vào ngày thứ mấy? .....             | 43 |

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| Chọn số viên đá thế nào để thắng cuộc? .....                               | 45  |
| Chia dê như vậy có hợp lý không? .....                                     | 48  |
| Bảng đoán tuổi được tính như thế nào? .....                                | 51  |
| "Vấn đề 36 sĩ quan" là gì? .....                                           | 53  |
| Vì sao từ một bức vẽ lại đặt ra một đẳng thức vô tận? .....                | 55  |
| Thế nào là bài toán "nữ sinh Akhoman"?.....                                | 57  |
| Làm thế nào để đi vào mê cung?.....                                        | 59  |
| Cần bao nhiêu năm để chuyển được 64 chiếc vòng vàng? .....                 | 61  |
| Trong một năm, một đôi thỏ đẻ được bao nhiêu đôi thỏ con?.....             | 63  |
| Tăng 10% lại giảm 10% liệu có trở về nguyên con số cũ chẳng? .....         | 65  |
| Khi giải các đề toán có được phép đặt giả thiết không? .....               | 67  |
| Có thể dùng tính chất các số chẵn, số lẻ để giải toán không? .....         | 69  |
| Trồng cây có cần đến toán học không? .....                                 | 71  |
| Bí quyết của các trò chơi với que diêm là gì? .....                        | 73  |
| Cái tinh xảo của "bàn thất xảo" là ở chỗ nào? .....                        | 75  |
| Liệu con mã có thể đi đến một điểm bất kỳ trên bàn cờ? .....               | 77  |
| Trên bàn cờ có gì liên quan đến toán học? .....                            | 78  |
| Vẽ ngôi sao 5 cánh như thế nào? .....                                      | 80  |
| Làm thế nào để chăng đèn thành các hình tam giác đẹp, tiết kiệm?.....      | 82  |
| Nàng Titô thông minh đã dùng cách gì để đo đất? .....                      | 84  |
| Sự khéo léo của tổ ong.....                                                | 86  |
| Có thể dùng phương pháp dẫn chứng để chứng minh định lý hình học không?..  | 87  |
| Các phép chứng minh hình học có thể có sai lầm không?.....                 | 89  |
| Làm thế nào chỉ dùng "compa gi" lại vẽ được hình bình hành và tam giác đều | 92  |
| Thế nào là "bài toán phục hiện"? .....                                     | 94  |
| Thế nào là bài toán bảy chiếc cầu và bài toán vẽ liền một nét?.....        | 96  |
| Thế nào là bài toán bản đồ có bốn màu? .....                               | 98  |
| Làm thế nào để làm được một dải Mobius? .....                              | 100 |
| Bài toán Hamilton "chu du vòng quanh thế giới " có ý nghĩa gì?.....        | 101 |

|                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Phải chăng hình học phi Euclide hoàn toàn không giống với hình học Euclide?        | 103 |
| Đường xoắn ốc có liên quan gì với con ốc?                                          | 105 |
| Vì sao trong hình học phẳng "học định lý thì dễ mà làm toán lại khó"?              | 106 |
| Toán học có giúp ta giải quyết các trường hợp khó xử không?                        | 109 |
| Mật mã được đặt ra như thế nào?                                                    | 111 |
| Giải bài toán logic như thế nào?                                                   | 113 |
| Có phải "đôi chân nhanh như gió" lại không đuổi kịp chú rùa?                       | 116 |
| Việc xếp hàng có liên quan đến toán học không?                                     | 118 |
| Thế nào là nghịch luận?                                                            | 120 |
| Xử lý thế nào với lời nói thật, lời nói dối?                                       | 123 |
| Bắt thăm trước có lợi hay bắt thăm sau có lợi?                                     | 124 |
| Việc ném đồng tiền, chọn bóng có tuân theo quy luật gì không?                      | 126 |
| Xác suất có ích lợi gì?                                                            | 129 |
| Các phương trình ẩn số bậc ba, bậc bốn có cần công thức chứa căn thức không?       | 131 |
| Thế nào là "độ tin cậy" của toán học?                                              | 133 |
| Thế nào là "dự đoán"?                                                              | 134 |
| Thế nào là mô hình toán học?                                                       | 136 |
| "Toán học mơ hồ" có mơ hồ không?                                                   | 138 |
| Số nguyên tố lớn nhất là bao nhiêu?                                                | 140 |
| Số 0 có phải là số vô cùng nhỏ không?                                              | 142 |
| Các biện pháp để xét một số có thể chia hết cho các số 7, 11, 13, 17... hay không? | 143 |
| Tổng các số lẻ liên tiếp có phải là một số chính phương không?                     | 145 |
| "Con số vàng" có thật quý như vàng không?                                          | 147 |
| Tam giác số có đặc điểm gì?                                                        | 149 |
| Thế nào là số tự bảo toàn?                                                         | 151 |
| Thế nào là số hoàn toàn?                                                           | 152 |
| Thế nào là số thân hòa?                                                            | 154 |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Có phải chữ số cũng "thoát y vũ"?                                              | 156 |
| Bí mật của chữ số "thoát y vũ" là ở chỗ nào?                                   | 157 |
| Số 6174 có điều gì kỳ diệu?                                                    | 159 |
| Từ đâu mà có số 142857?                                                        | 161 |
| Trong toán học có "hố đen" không?                                              | 164 |
| Tại sao gọi dự đoán Goldbach là " $1 + 1$ "?                                   | 166 |
| Thế nào là hình vuông hoàn mỹ?                                                 | 168 |
| Thế nào là hình chữ nhật hoàn mỹ?                                              | 170 |
| Làm thế nào chuyển một số theo hệ đếm thập phân thành số theo hệ đếm nhị phân? | 171 |
| Có thể dùng máy tính điện tử thay thế hoàn toàn bàn tính và tính miệng?        | 174 |
| Có phải mã vạch là một loại toán học không?                                    | 176 |
| Học sinh trung học có nên dùng máy tính điện tử không?                         | 178 |
| Có thể dùng máy tính điện tử để chứng minh các định lý hình học không?         | 180 |

# BỘ SÁCH BỒ TRỢ KIẾN THỨC

Chìa khóa vàng

TOÁN HỌC

*Biên dịch:* Từ Văn Mạc - Trần Thị Ái

---

NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG

Địa chỉ: Số 175 Giảng Võ - Hà Nội

Điện thoại: 04.38515380; Fax: 04.38515381

E-mail: [info@nxblaodong.com.vn](mailto:info@nxblaodong.com.vn):

VWebsite: [www.nxblaodong.com.vn](http://www.nxblaodong.com.vn)

Chi nhánh phía Nam:

Số 85 Cách mạng Tháng Tám, Quận 1 - Tp. Hồ Chí Minh

Điện thoại: 08.38390970; Fax: 08.39257205

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*

VÕ THỊ KIM THANH

*Biên tập-* Mai Thị Thanh Hằng

*Trình bày.* Đắc Huy

*Bìa-* Nguyễn Thắm

*Sửa bản in:* Nguyễn Nga - Đặng Thiên Sơn

## **Phát hành tại:**

Nhà sách Đông Tây: 62 Nguyễn Chí Thanh, Hà Nội. ĐT: 04.37733041;

Thư viện Café Đông Tây: Nhà NHA Trần Quý Kiên, cầu Giấy, Hà Nội. ĐT:  
04.62671117. Website: [dongtay.vn](http://dongtay.vn)

Sách Hà Nội: 245 Nguyễn Thị Minh Khai, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh. Website:  
[www.sachdongtay.com](http://www.sachdongtay.com)

In 1.000 cuốn, khổ 16 X 23 cm, tại Nhà in Văn hóa Dân tộc, số 128C Đại La, Hai Bà Trưng Hà Nội. Số đăng ký KHXB: 1095-2015/CXBIPH/27-77/LĐ. Số quyết định xuất bản : 435/QĐ-NXBLĐ cấp ngày 15/5/2015. Mã số ISBN: 978-604-59-3579-8. In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2015.