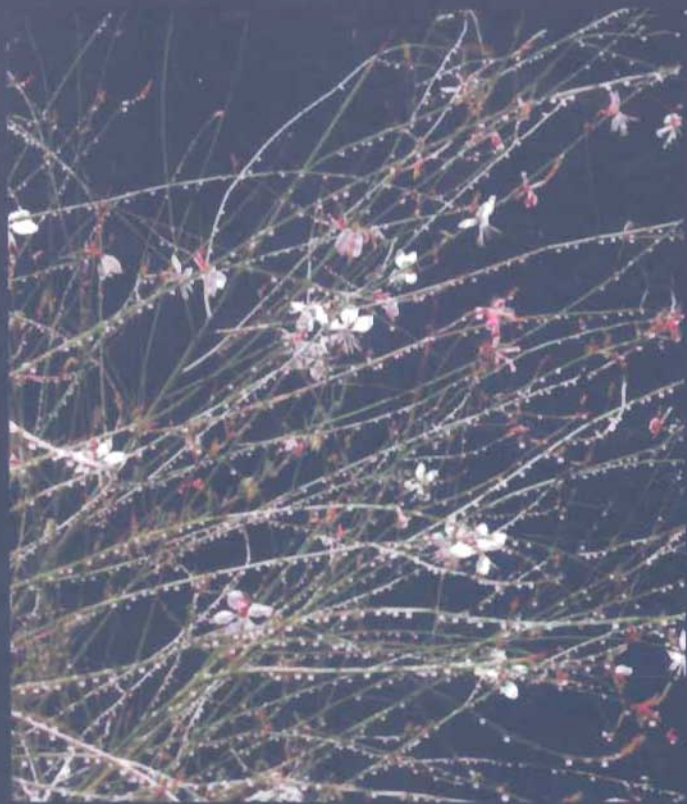


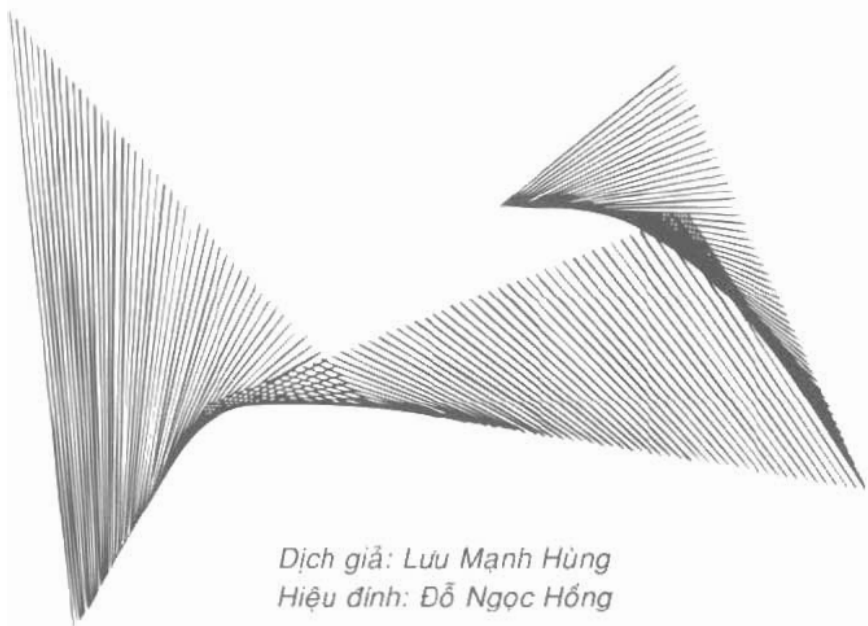
SỰ KÌ DIỆU CỦA TOÁN HỌC



Theoni Pappas

Khám phá những phép thuật toán học

SỰ KÌ DIỆU CỦA TOÁN HỌC



*Dịch giả: Lưu Mạnh Hùng
Hiệu đính: Đỗ Ngọc Hồng*

NHÀ XUẤT BẢN KIM ĐỒNG

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	1
TOÁN HỌC TRONG ĐỜI SỐNG HÀNG NGÀY	3
NHỮNG THẾ GIỚI TOÁN HỌC DIỆU KÌ	37
TOÁN HỌC VÀ NGHỆ THUẬT	70
SỰ KÌ DIỆU CỦA CÁC CON SỐ	107
SỰ KÌ DIỆU CỦA TOÁN HỌC TRONG TỰ NHIÊN	130
SỰ KÌ DIỆU CỦA TOÁN HỌC TRONG LỊCH SỬ	156
GIẢI ĐIỀU CỦA TOÁN	189
CUỘC CÁCH MẠNG MÁY TÍNH	204
TOÁN HỌC VÀ NHỮNG BÍ ẨN CỦA CUỘC SỐNG	244
TOÁN HỌC VÀ KIẾN TRÚC	264
SỰ CUỐN HÚT CỦA LOGIC, GIẢI TRÍ VÀ CÁC TRÒ CHƠI	286
LỜI GIẢI	331
SÁCH DẪN	337
GIỚI THIỆU VỀ TÁC GIẢ	349

LỜI NÓI ĐẦU

Bạn không cần giải các bài toán, cũng không nhất thiết phải là một nhà toán học để có thể khám phá sự kì diệu của toán học. Quyển sách này là một bộ sưu tập các ý tưởng ít nhiều có liên quan đến các khái niệm toán. Nó không phải là một cuốn sách giáo khoa, không đòi hỏi bạn phải giỏi toán và cũng sẽ không làm bạn phải tốn nhiều công sức để hiểu được. *Sự kì diệu của toán học* tập trung viết về thế giới của những ý tưởng, những khám phá và các quy luật toán học trong cuộc sống của chúng ta, nó sẽ phần nào giúp các bạn tìm hiểu toán học ngay tại những nơi mà bạn ít ngờ tới nhất.

Rất nhiều người trong chúng ta nghĩ rằng toán là một môn học cứng nhắc và tẻ nhạt, không gì hơn ngoài sự đúng, sai. Trí tuệ của con người luôn không ngừng sáng tạo nên những ý tưởng và thế giới toán mới trở nên đầy quyến rũ, tồn tại độc lập với thế giới của chúng ta. Nhưng thật lạ kì, những ý tưởng này kết nối thật phù hợp với thế giới của chúng ta như một phép nhiệm mầu. Cách mà các vật thể từ không gian này có thể biến mất vào một không gian khác, một điểm mới luôn tồn tại giữa hai điểm bất kì; cách thực hiện các phép tính số, giải phương trình, vẽ đồ thị hàm số, ứng dụng của những vô cùng hay cách thành lập công thức,... tất cả dường như đều mang một tính chất thần kì.

Các khái niệm toán học là sản phẩm trí tưởng tượng của con người. Chúng tồn tại trong những thế giới riêng hoàn toàn xa lạ. Tại đó, mọi thứ được tạo ra bởi tính logic tuyệt đối và óc sáng tạo của con người. Một hình vuông hay hình tròn hoàn hảo luôn tồn tại trong thế giới toán học, trong khi ở thế giới chúng ta chỉ có những đại diện của chúng mà thôi.

Chúng tôi hi vọng cuốn sách sẽ là những nấc thang đầu tiên dẫn bước các bạn trên con đường tìm hiểu SỰ KÌ DIỆU CỦA THẾ GIỚI TOÁN HỌC.



Bức tranh *Phòng triển lãm ảnh*, tác giả M.C. Escher.
© 1994 M.C. Escher/Cordon Art-Baarn-Holland.
Tất cả các quyền được bảo vệ.

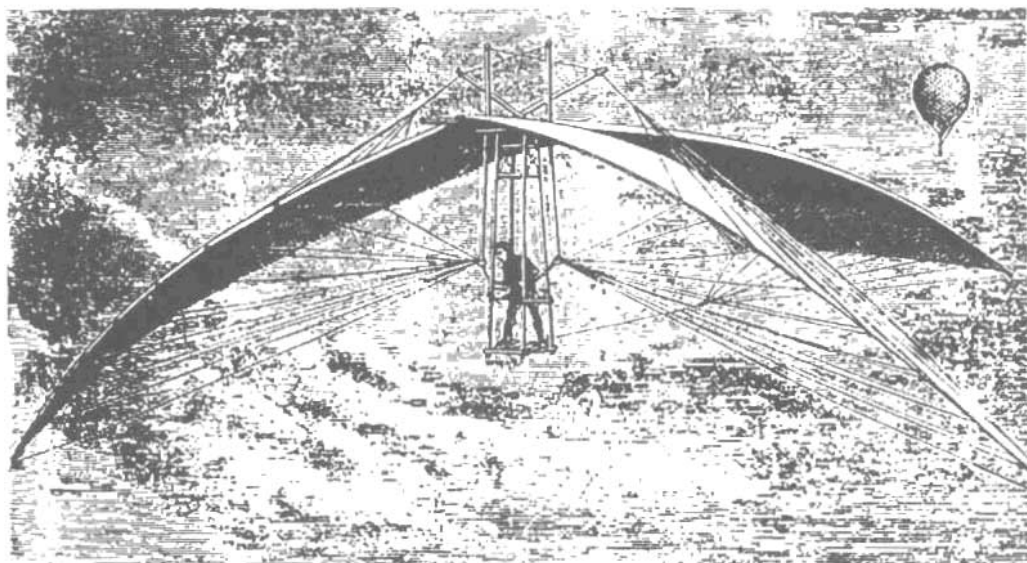
TOÁN HỌC TRONG ĐỜI SỐNG HÀNG NGÀY

TOÁN HỌC TRONG BAY LƯỢN
TOÁN HỌC KHI BẠN GỌI ĐIỆN THOẠI
GƯƠNG PHẢN XẠ & ĐÈN PHA
KHOA HỌC PHỨC HỢP & HIỆN TẠI
TOÁN HỌC & MÁY ẢNH
CÔNG NGHIỆP TÁI CHẾ - NHỮNG CON SỐ
XE ĐẠP, BÀN BI-A & CÁC ELIP
TRANH BIẾN HÌNH
THÔNG ĐIỆN QUA NHỮNG CON TEM
CÂU CHUYỆN CỦA CHÚ CHUỘT
CUỘC VIẾNG THĂM ĐẦY TOÁN HỌC
PHƯƠNG TRÌNH THỜI GIAN
TẠI SAO MIỆNG CỐNG LẠI TRÒN?

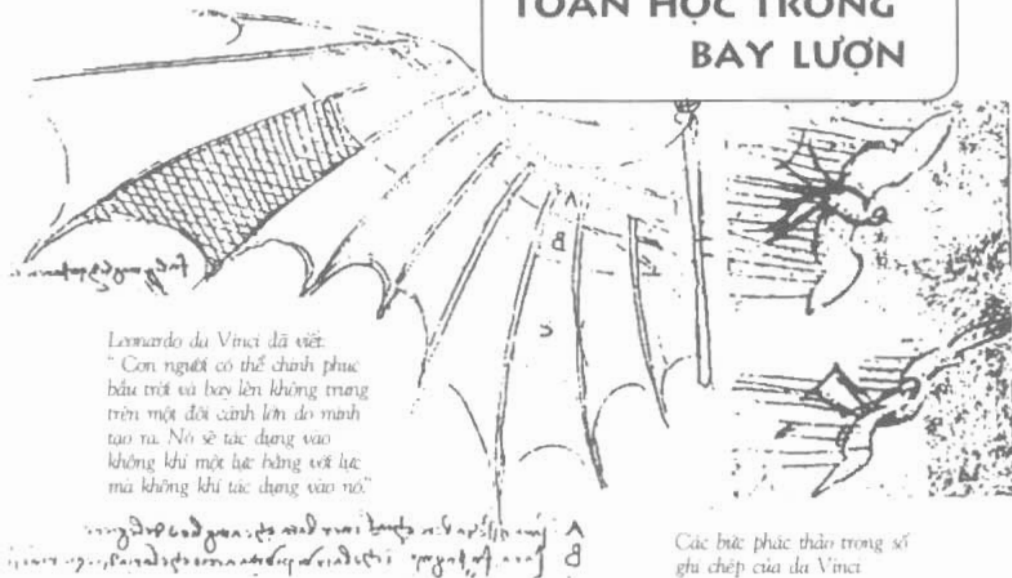
Tất cả các lĩnh vực của toán học, dù trừu tượng đến mấy, sớm muộn rồi cũng sẽ ionic dụng được vào các hiện tượng của thế giới thực.

—Nikolai Lobachevsky

Trong đời sống hàng ngày, rất nhiều sự vật, hiện tượng xung quanh chúng ta có cơ sở là toán học hoặc mối liên hệ nào đó với nó, từ việc máy bay cất cánh cho đến hình dạng của miệng cống. Thông thường, chính ở chỗ ít ngờ tới nhất thì chúng ta lại tìm thấy sự tham gia của toán học.



TOÁN HỌC TRONG BAY LƯỢN



Sự nhẹ nhàng và uyển chuyển khi bay lượn trên bầu trời của các loài chim luôn đánh thức lòng mong muốn biết bay của con người. Những câu truyện cổ tích từ các nền văn hóa khác nhau đã chứng minh lợi ích của bay lượn bằng sự xuất hiện của rất nhiều loài sinh vật biết bay. Quan sát khung tàu lượn, chúng ta thấy rằng chuyển bay của Daedalus và Icarus có thể không chỉ là câu chuyện hoang đường trong thần thoại Hy Lạp. Ngày nay, các máy bay cỡ lớn chở hàng hóa đều bay được trên bầu trời – nơi ngự trị của các loài chim. Tuy nhiên, để đạt được thành tựu đó, lịch sử nghiên cứu chuyển động bay đã trải qua không ít những thăng trầm. Nhiều nhà khoa học, toán học, nhà phát minh, họa sĩ, kĩ sư cùng các chuyên gia khác đã phải nhiều năm nghiên cứu, thiết kế, chế tạo và thử nghiệm để con người có thể bay lên.

Dưới đây là một vài nét phác thảo về lịch sử nghiên cứu chuyển động bay:

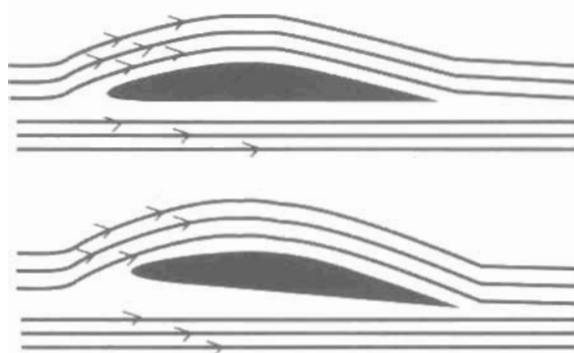
- Điều được người Trung Hoa phát minh vào khoảng những năm 400 – 300 tr.CN.
- Leonardo da Vinci nghiên cứu một cách khoa học quá trình bay của các loài chim, phác thảo ra nhiều mô hình tàu lượn khác nhau (năm 1500).
- Giovanni Borelli, nhà toán học người Ý, chứng minh rằng cơ bắp của con người là quá yếu không thể bay được (1680).
- Hai người Pháp Jean Pilatre de Rozier và Marquis d' Arlandes lần đầu tiên bay bằng khí cầu khí nóng (1783).
- Nhà phát minh người Anh, Nam tước George Cayley thiết kế hình dạng cánh máy bay (mặt cắt ngang), chế tạo và cho bay thử mẫu tàu lượn đầu tiên, đặt nền móng cho ngành khí động học.
- Otto Lilienthal, người Đức, phát minh hệ thống đo lực nâng sinh ra bởi cánh máy bay khi thí nghiệm; lần đầu tiên thực hiện thành công chuyến bay trên tàu lượn vào giữa những năm 1891–1896.
- Năm 1903, Orville và Wilbur Wright thực hiện những chuyến bay đầu tiên trên máy bay động cơ cánh quạt. Họ đã thí nghiệm với ống khu động cùng các hệ thống đo lực nâng và lực cản không khí của các mô hình thiết kế. Họ cũng hoàn thiện được máy móc và kỹ thuật bay của mình, cho đến năm 1905, các chuyến bay do họ thực hiện đã có thể kéo dài 38 phút với quãng đường bay được là 20 dặm (1 dặm = 1,609km).

Chúng ta bay lên như thế nào?

Để bay được, các lực theo phương thẳng đứng và phương

ngang cân phải cân bằng nhau. Trọng lực (lực theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) giữ chân chúng ta trên mặt đất. Để triệt tiêu sức hút của trọng lực, cần tạo ra một lực nâng hướng thẳng lên trên. Hình dáng của cánh cũng như thiết kế của máy bay đóng vai trò rất quan trọng trong việc tạo ra lực nâng này. Vì vậy, việc nghiên cứu hình dạng cánh của các loài chim trong tự nhiên chính là chìa khóa để giải quyết bài toán. Đường như chúng ta có phần sẵn sàng khi đo đạc sự uốn chuyển trong bay lượn của những chú chim, nhưng nếu thiếu những phân tích toán học, vật lý về các yếu tố tác động đến quá trình bay, thì có lẽ ngày nay, con người vẫn chưa thể bay lên được. Chúng ta thường nghĩ về không khí không phải là vật chất, bởi chúng ta không nhìn thấy nó. Nhưng không khí cũng là một môi trường giống như nước vậy. Cánh máy bay, hay như bản thân máy bay, khi xuyên qua không khí sẽ chia, hay đúng hơn là cắt qua làn không khí. Nhà toán học người Thụy Sĩ Daniel Bernoulli (1700–1782) đã phát hiện ra rằng: Khi tốc độ của dòng khí hoặc dòng chất lỏng tăng lên, thì áp suất của nó giảm đi. Định luật Bernoulli⁽¹⁾ đã giải thích vì sao hình dáng của cánh lại giúp ta tạo ra lực nâng. Đó là vì mặt trên của cánh được làm theo hình dáng cong, chính mặt cong này làm tốc độ của dòng không khí trên cánh máy bay tăng lên, do vậy giảm áp lực của không khí băng qua trên nó. Mặt dưới của cánh không cong nên không khí qua đây có tốc độ nhỏ hơn phía trên, dẫn đến áp lực của không khí bên dưới cánh cao hơn, đẩy nó về phía áp lực thấp bên trên và nâng máy bay lên. Trọng lượng (sức hút của trọng lực) chính là lực thẳng đứng tác dụng ngược chiều với lực nâng của máy bay.

(1). Các qui luật về chuyển động khu cho máy bay được áp dụng cho rất nhiều lĩnh vực khác trong cuộc sống của chúng ta, ví dụ cho những tòa nhà chọc trời, cầu treo, ổ đĩa máy tính, máy bơm khí, máy bơm nước và tuốcbin.



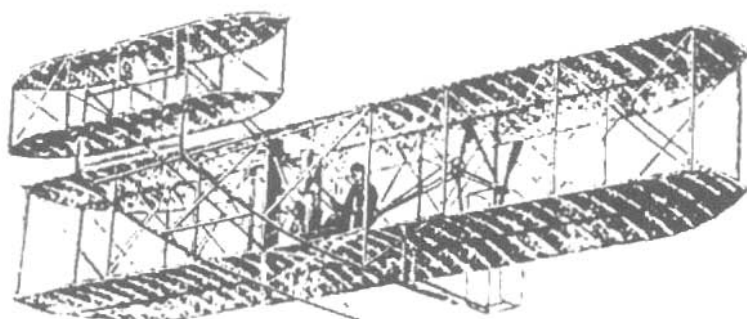
Hình dáng của cánh máy bay làm độ dài bề mặt phía trên nó tăng lên, do đó không khí di chuyển trên đó sẽ nhanh hơn, dẫn đến áp lực phía trên cánh nhỏ hơn so với phía dưới. Khi cánh máy bay nghiêng nhiều hơn, độ dài bề mặt phía trên tăng thêm lên, lúc ở dưới cánh sẽ càng tăng, và do vậy, làm tăng lực nâng của máy bay.

Lực kéo và lực đẩy là các lực tác động theo phương ngang khi máy bay đang bay. Lực đẩy đẩy máy bay về phía trước, trong khi lực kéo kéo nó lại về phía sau. Loài chim tạo ra lực đẩy bằng cách vỗ cánh, còn máy bay thì nhờ vào các cánh quạt hoặc động cơ phản lực. Đối với máy bay, để duy trì độ cao và đường bay thẳng thì các lực tác dụng lên nó phải triệt tiêu nhau, tức là tổng tất cả các lực bằng 0. Lực nâng và trọng lực phải triệt tiêu cho nhau, còn lực kéo và lực đẩy phải cân bằng với nhau. Trong quá trình cất cánh, lực đẩy phải lớn hơn lực kéo, còn trong khi bay chúng cân bằng nhau, nếu không tốc độ của máy bay sẽ tăng lên không ngừng.

Quan sát hình ảnh những chú chim sà xuống hay khi chúng bổ nhào, người ta nhận thấy có hai yếu tố khác tác động đến quá trình bay. Khi tốc độ của không khí bên trên cánh tăng thì lực nâng cũng sẽ tăng lên. Bằng cách tăng góc giữa cánh và dòng không khí chuyển động ngược phía máy bay (gọi là góc va chạm), ta có thể làm tăng tốc độ không khí ở phía trên. Nếu góc này xấp xỉ 15° hoặc lớn hơn, lực nâng sẽ dừng đột ngột và những chú chim, hay máy bay bắt đầu rơi thay vì bay lên cao. Chúng ta gọi góc khi xảy ra hiện tượng này là góc tấn. Góc tấn khiến cho không khí hình thành những cuộn gió xoáy phía

trên cánh máy bay. Chúng làm cánh máy bay rung lắc, dẫn đến sự suy yếu của lực nâng và làm trọng lực lớn hơn lực nâng.

Không được trời phú cho đôi cánh để có thể bay được như những chú chim, con người đã vận dụng các quy luật toán học và vật lý để nâng chính mình và nhiều thứ khác lên khỏi mặt đất. Các chi tiết chế tạo⁽¹⁾ đã không ngừng được cải tiến để nâng cao chất lượng và hiệu quả hoạt động của các máy bay ngày nay.



(1). Tấm lật và gân cánh là những thay đổi ở bộ phận cánh máy bay nhằm gia tăng lực nâng. Tấm lật là một chi tiết có khớp bán lề gắn vào cánh để thay đổi độ cong của nó và bổ sung lực nâng. Gân cánh là những khe hở bên trong cánh giúp giảm tình trạng rung rinh của máy bay.

TOÁN HỌC KHI BẠN GỌI ĐIỆN THOẠI

Mỗi lần nhắc ống nghe để gọi điện thoại, gửi fax hay trao đổi

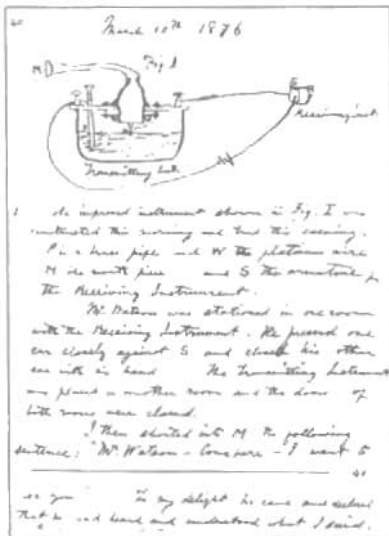
thông tin,... là bạn đã bước chân vào một mạng lưới rộng lớn và rất phức tạp. Mạng lưới thông tin liên lạc bao phủ trái đất của chúng ta quả thực vô cùng kì diệu. Thật khó có thể hình dung mỗi ngày có bao nhiêu cuộc điện thoại được thực hiện và kết nối trên mạng lưới này. Vậy một mạng lưới vốn bị phân tán bởi rất nhiều hệ thống riêng rẽ của các quốc gia, các đại dương khác nhau, sẽ hoạt động như thế nào?



Trong những năm đầu tiên khi điện thoại mới xuất hiện, người ta nhắc ống nghe và quay số gọi đến tổng đài. Nhân viên trực tổng đài khu vực sẽ nhắc máy và nói: "Xin cho biết số điện thoại cần gọi.", rồi kết nối bạn với số máy đó. Ngày nay, liên lạc bằng điện thoại đã phát triển nhanh như năm khi xuất hiện rất nhiều phương thức khác nhau để chuyển hoặc kết nối các máy điện thoại. Toán học, bao gồm cả các dạng quy hoạch

tuyến tính phức tạp kết hợp với hệ thống số và mã hóa nhị phân, sẽ giúp chúng ta có sự hình dung rõ ràng nhất về điện thoại trong sự phức tạp và đa dạng của nó.

Tiếng nói của bạn được truyền đi như thế nào? Khi bạn nói, tiếng của bạn phát ra âm thanh, âm thanh này được ống nghe thu lại và chuyển thành tín hiệu điện. Ngày nay, các xung điện được truyền đi và chuyển đổi bằng rất nhiều cách thức khác nhau. Chúng có thể được chuyển thành tín hiệu laser, sau đó truyền đi bằng cáp quang sợi⁽¹⁾. Chúng cũng có thể được chuyển thành tín hiệu vô tuyến (tín hiệu radio) rồi truyền qua sóng radio, liên kết vì ba từ trạm phát này tới trạm phát kia trên khắp đất nước hay vẫn giữ nguyên là tín hiệu điện trên suốt đường dây điện thoại. Hầu hết các kết nối điện thoại trên nước Mỹ đều được thực hiện bởi hệ thống chuyển tín hiệu tự động. Hiện nay hệ thống này sử dụng phương thức chuyển tín hiệu

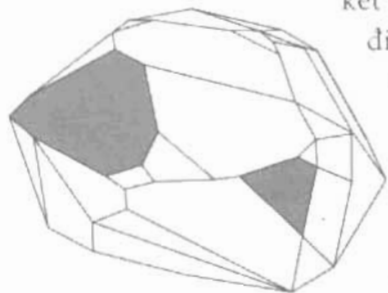


Các trang ghi chép của Alexander Graham Bell viết về cuộc gọi đầu tiên của mình cho trợ lý của ông, Watson, để nói chuyện về phát minh của mình. "Tôi hét lên vào M câu sáo "Ông Watson, tới đây với tôi đi. Tôi muốn gặp ông" Và với sự mừng rỡ của tôi, ông ấy đã đến và thông báo rằng ông đã nghe thấy và hiểu những gì tôi nói"

(1) Tùy thuộc vào loại đường dây được sử dụng, số lượng cuộc gọi có thể thực hiện cùng lúc dao động từ 96 đến trên 3000. Hệ thống quang sợi có thể truyền đi nhiều thông tin hơn cáp đồng hay nhóm truyền thống.

nhanh nhất hiện có. Nó có một chương trình lưu trữ những thông tin cần thiết cho tất cả các hoạt động điều khiển, vận hành, theo dõi máy nào đang kết nối trên mạng và đường dây nào đang truyền tín hiệu. Các cuộc điện thoại được truyền đi trên các dòng điện có tần số khác nhau hoặc chuyển thành tín hiệu số. Một phương thức khác cho phép truyền đi nhiều cuộc gọi cùng lúc trên cùng một đường dây. Các hệ thống hiện đại nhất ngày nay chuyển cuộc gọi thành tín hiệu số, sau đó mã hóa chúng thành một dãy các số nhị phân. Chính vì vậy, nhiều cuộc gọi đơn lẻ có thể truyền đồng thời trên dây theo một trình tự nhất định cho tới khi chúng được giải mã ở đầu dây bên kia.

Khi một cuộc gọi được thiết lập, hệ thống kết nối sẽ lựa chọn đường truyền tốt nhất cho nó và gửi đi một chuỗi các lệnh để hoàn chỉnh sơ đồ kết nối. Toàn bộ quá trình này chỉ mất một phần mười giây. Sẽ là lí tưởng nhất nếu một đường kết nối đi thẳng tới đích được thiết lập,



điều mà con người luôn mong muốn nhằm tiết kiệm khoảng cách và thời gian. Nhưng nếu đường dây kết nối thẳng đang bận truyền các cuộc điện thoại khác, thì cuộc gọi mới sẽ được gửi theo tuyến đường tối ưu nhất có thể được. Đây chính là lúc mà quy hoạch tuyến tính⁽¹⁾ vào

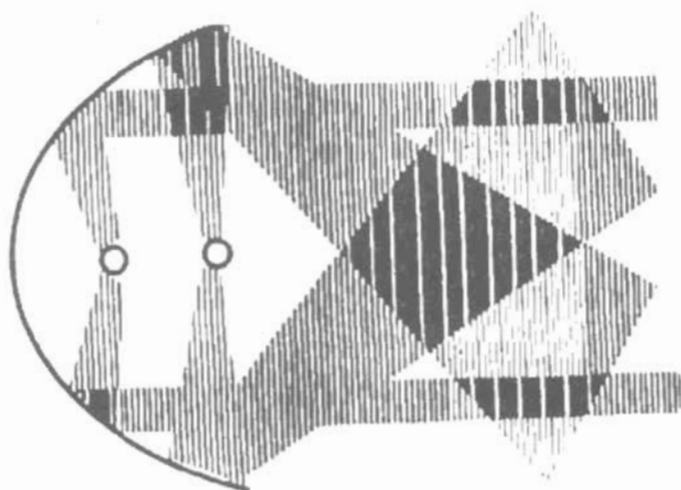
(1). Kỹ thuật quy hoạch tuyến tính được dùng để giải rất nhiều bài toán khác nhau. Thông thường, các bài toán có rất nhiều điều kiện và biến. Một ví dụ đơn giản là bài toán về nông nghiệp như sau: Một nông dân muốn tìm ra cách hiệu quả nhất để khai thác mảnh đất của mình, tạo ra năng suất và lợi nhuận cao nhất. Điều kiện và biến của bài toán sẽ bao gồm các yếu tố như trong các vụ mùa vùi qua, mỗi vụ mùa cần bao nhiêu đất, cho sản lượng là bao nhiêu trên 1 mẫu và đem lại bao nhiêu thu nhập sau khi bán xong nông sản. Để giải quyết một bài toán như vậy, người ta lập các bất đẳng thức hoặc đẳng thức tuyến tính cho mỗi một điều kiện, rồi đưa vào một biểu đồ hai chiều để tìm lời giải.

cuộc. Chúng ta hãy cùng tưởng tượng bài toán lập sơ đồ kết nối như là một khối hình học với hàng triệu mặt. Mỗi đỉnh tượng trưng cho một giải pháp có thể có. Điều thách thức chúng ta là phải tìm ra được giải pháp tốt nhất mà không cần xem xét, tính toán từng giải pháp một. Năm 1947, nhà toán học George B. Dantzig đã phát triển phương pháp đơn hình để giải quyết các bài toán quy hoạch tuyến tính phức tạp như vậy. Bản chất của phương pháp này là đi theo các cạnh của khối hình, kiểm tra lần lượt từng góc, đồng thời trong quá trình đó vẫn luôn tính toán để tìm ra lời giải tối ưu nhất.

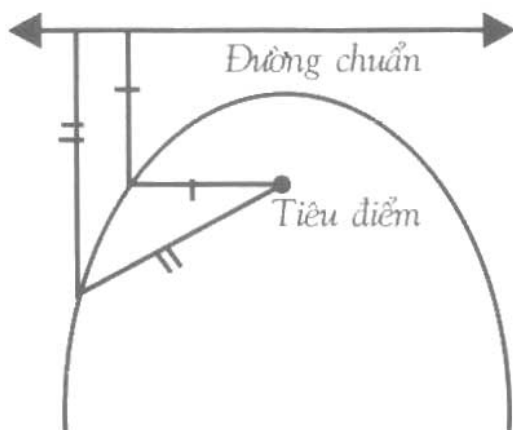
Đối với những trường hợp mà số lượng đường truyền từ 15 000 đến 20 000, phương pháp đơn hình tỏ ra khá hiệu quả. Năm 1984, nhà toán học Narendra Karmarkar tìm ra một cách giải mới, làm giảm đáng kể thời gian giải những bài toán quy hoạch tuyến tính công kênh, ví dụ bài toán tìm tuyến đường tốt nhất cho các cuộc điện thoại đường dài. Thuật toán *Narendra Karmarkar* đi theo một lối tắt hăng cách xuyên qua giữa khối hình. Sau khi lựa chọn một điểm bất kì bên trong, thuật toán sẽ co kéo toàn bộ cấu trúc khối hình để đưa về bài toán mà điểm đã chọn nằm ở chính tâm của khối mới. Bước tiếp theo là tìm ra một điểm trong khối mới hứa hẹn cho chúng ta đáp án tốt nhất, rồi tiếp tục kéo cấu trúc một lần nữa để đưa điểm mới này thành tâm. Nếu không có quá trình co kéo khối hình thì việc tìm ra hướng đi cải thiện sau mỗi bước sẽ chỉ là không tưởng. Các phép biến đổi lặp, dựa trên cơ sở lý thuyết của hình học xạ ảnh như trên, sẽ dẫn đưa chúng ta tới đáp án của bài toán ban đầu.

Ngày nay, lời mời “Xin cho biết số thoại cần gọi” trên điện thoại theo lối cũ ngày xưa mang ý nghĩa lớn hơn rất nhiều. Quá trình nhắc máy và gọi điện đơn giản trước đây giờ sẽ khởi động cả một hệ thống tính vi, phức tạp và rộng lớn mà cơ sở của nó chính là toán học.

GƯƠNG PHẢN XẠ VÀ ĐÈN PHA



Khi bật công tắc chuyển đèn pha từ chế độ chiếu xa sang chiếu gần, bạn hãy hiểu rằng toán học, hay đúng hơn là các tính chất của parabol, đang tham gia vào đó. Gương phản xạ ở phía sau đèn pha có hình parabol. Trên thực tế, chúng là các parabol tròn xoay (hình thu được khi quay parabol quanh trục đối xứng của nó). Chùm sáng chiếu xa sinh ra bởi nguồn sáng đặt tại vị trí tiêu điểm của gương phản xạ. Khi đó tia sáng phản xạ sẽ đi song song với trục đối xứng của parabol. Khi bật sang chế độ chiếu gần, bạn đã thay đổi vị trí của nguồn sáng. Nó không còn nằm ở tiêu điểm nữa và kết quả là các tia phản xạ không song song với trục parabol. Chúng rọi lên và rọi xuống. Những tia rọi lên trên sẽ bị chặn lại sao cho chỉ còn những tia phản xạ hướng xuống dưới. Những tia ở vị trí thấp hơn sau khi phản xạ sẽ gần với ta hơn là các tia ở phía trên.



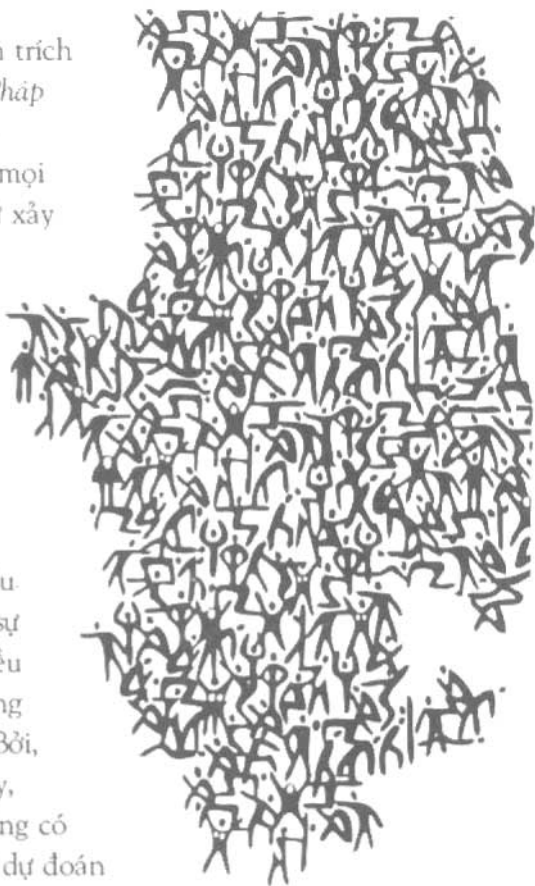
Parabol là một dạng đường cong cổ điển do Menaechmus (vào khoảng năm 375-325 tr.C.N) phát hiện, khi ông cố gắng tìm căn bậc ba của hai. Trải qua nhiều thế kỉ, người ta đã tìm ra nhiều phát minh và ứng dụng có liên quan đến parabol. Ví dụ như Galileo (1564 - 1642) đã chứng minh rằng quỹ đạo của viên đạn khi bắn có hình parabol. Ngày nay, người ta có thể vào các cửa hàng đồ gia dụng để tìm một loại lò sưởi điện parabol hiệu năng cao. Nó tiêu thụ 1000W điện nhưng lại sinh ra lượng nhiệt tương đương với lò sưởi thường khi tiêu thụ 1500W.

KHOA HỌC PHỨC HỢP VÀ HIỆN TẠI

Khoảng thời gian từ bảy giờ tối tới gần nửa đêm thường là những thời khắc yên tĩnh

trên cầu. Mọi sự bắt đầu gần như vào đúng bảy giờ, tất cả những người dân có ô tô ở Manhattan⁽¹⁾ đều quyết định ra Long Island⁽²⁾ vào đêm đó.”

Giống như đoạn trích từ cuốn *The Law* (Pháp luật) của Robert M. Coates đã miêu tả, mọi việc đôi khi vẫn cứ xảy ra dù chẳng có nguyên nhân rõ ràng nào cả. Thậm chí không có cả một dấu hiệu báo trước rằng chúng sắp xảy ra. Tất cả chúng ta đều đã trải qua những sự kiện như vậy và đều quy chúng về “trùng hợp ngẫu nhiên”. Bởi, nếu không như vậy, chúng ta cũng không có cơ sở gì rõ ràng để dự đoán sự việc sắp tới.



(1). Một trong năm khu vực của New York, Mỹ.

(2). Một hòn đảo nằm ở đông nam New York, Mỹ.

Khoa học phức hợp là một ngành khoa học mới phát triển, có thể nó chính là chìa khóa cho câu trả lời, hoặc ít nhất là lời giải thích cho những câu hỏi kiểu như:

Tại sao...

- ...vũ trụ lại sinh ra được từ hư không?
- ...tế bào tự nhận biết được là nó sẽ phát triển thành cơ quan hay bộ phận cơ thể nào?
- ...ngày 17/01/1994, tại Los Angeles lại xảy ra trận động đất dữ dội và có sức tàn phá ngoài sức tưởng tượng đến như vậy?
- ...Liên bang Nam Tư đột nhiên rơi vào cánh nội chiến tàn khốc?
- ...các loài không hề thay đổi trong hàng triệu năm giờ bỗng dưng lại biến đổi đột ngột?
- ...thị trường chứng khoán biến động lên xuống dù không có nguyên nhân rõ ràng nào cả?

Những câu hỏi tương tự như vậy thì vô cùng vô tận. Yếu tố chung ẩn chứa trong các sự kiện này chính là mỗi sự kiện đều đại diện cho một hệ thống rất phức tạp. Hệ thống đó bị điều khiển bởi rất nhiều yếu tố khác nhau mà chúng ta gọi là *hệ thống phức hợp*, chúng cân bằng và dao động vô cùng tinh vi, vô cùng phức tạp giữa ổn định và hỗn loạn. Các yếu tố tác động lên hệ thống phức hợp không ngừng tăng lên và biến đổi. Do vậy, nó luôn ở trong trạng thái hỗn loạn tiềm ẩn, nghĩa là ở bên bờ của sự hỗn loạn. Có vẻ như luôn có một cuộc chiến không ngừng giữa trật tự và hỗn loạn, trong đó lực tự sắp xếp là yếu tố cần thiết của một hệ phức hợp. Nó chính là phương tiện để hệ lấy lại trạng thái cân bằng bằng cách thay đổi và điều chỉnh mình cho phù hợp với những yếu tố, hoàn cảnh biến động không ngừng ở cả bên trong và bên ngoài hệ. Những

nghiên cứu về ngành khoa học phức hợp đã đưa ra một loạt các ý tưởng khoa học và toán học mới như: lý thuyết hỗn loạn, fractal⁽¹⁾, xác suất, trí tuệ nhân tạo, logic mờ.... Các nhà khoa học và toán học tin tưởng rằng toán học hiện đại, cùng với những công cụ và cải tiến công nghệ cao khác, sẽ có thể làm nên một công trình nghiên cứu đầy đủ về khoa học phức hợp. Khi đó, vận dụng khoa học phức hợp, chúng ta sẽ có khả năng tác động vào các yếu tố quan trọng trong thế giới của mình, đặc biệt là kinh tế, môi trường và chính trị.

(1). Thuật ngữ "fractal" được dịch là "phân dạng", nhưng ở cuốn sách này chúng tôi xin giữ nguyên thuật ngữ tiếng Anh để thống nhất với cách gọi chung của thế giới.

TOÁN HỌC VÀ MÁY ẢNH

Bạn đã từng bao giờ thắc mắc f -stop của máy ảnh là gì chưa? Tên gọi này xuất phát từ đâu? Nó được xác định như thế nào? “ f ” chính là chữ viết tắt của thuật ngữ toán học *factor*, có nghĩa là hệ số. Độ sáng của ảnh quang học trên phim phụ thuộc vào khẩu độ (độ mở ống kính) và tiêu cự (khoảng cách tiêu điểm) của các thấu kính. Những người thợ chụp ảnh sử dụng hệ thống hệ số hiệu dụng của thấu kính để nhận biết hệ số liên hệ giữa tiêu cự thấu kính và khẩu độ. f -stop được tính bằng cách đo tiêu cự thấu kính và chia nó cho đường kính của khẩu độ. Ví dụ:

$$f4 = 80 \text{ mm tiêu cự} / 20 \text{ mm khẩu độ.}$$

$$f16 = 80 \text{ mm tiêu cự} / 5 \text{ mm khẩu độ.}$$

Độ mở ống kính sẽ nhỏ lại khi f -stop tăng lên. Do đó, khi chụp ảnh, bạn có thể tự mình điều chỉnh f stop và tốc độ cửa sập để tập trung làm nổi bật một phần nào đó trên bức ảnh theo ý muốn của mình.



CÔNG NGHIỆP TÁI CHẾ - NHỮNG CON SỐ

Trong trường hợp này các đơn vị và kí hiệu toán học tham gia vào việc làm sáng tỏ các số liệu về công việc tái chế giấy.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

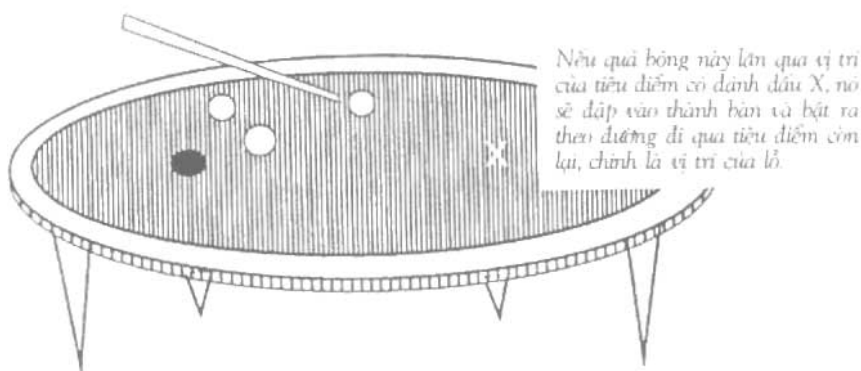
- Một tấn giấy mới $\neq$ một tấn giấy tái sinh.
- Một tấn giấy tái sinh khi sản xuất tiêu tốn năng lượng ít hơn so với giấy mới là 4102 kwh.
- Một tấn giấy tái sinh tiêu tốn lượng nước ít hơn 7000 gallon (1 gallon = 3,78 lít).
- Trong quá trình sản xuất, một tấn giấy tái sinh sản sinh ra lượng khí thải ít hơn 60 pound (1 pound = 0,37kg).
- Một tấn giấy tái sinh sinh ra lượng chất thải rắn ít hơn 3 yard khối (1 yard = 0,914m).
- Một tấn giấy tái sinh mất ít thuế chôn lấp hơn.
- Một tấn giấy tái sinh tiêu tốn ít hơn 17 cây gỗ so với giấy mới.

— Những số liệu đằng sau việc tái chế và rác thải —

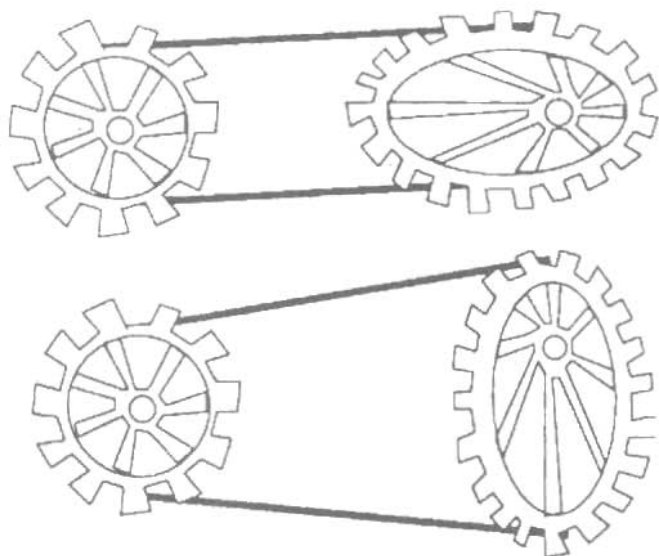
- 37% rác thải là giấy.
- Chỉ 29% giấy báo cũ được đem tái chế bởi người tiêu dùng.
- Chúng ta cần 165 triệu yard khối không gian để chôn lấp rác thải mỗi năm.
- 97% rừng nguyên sinh ở châu Mỹ đã bị đốn hạ trong vòng 200 năm qua.

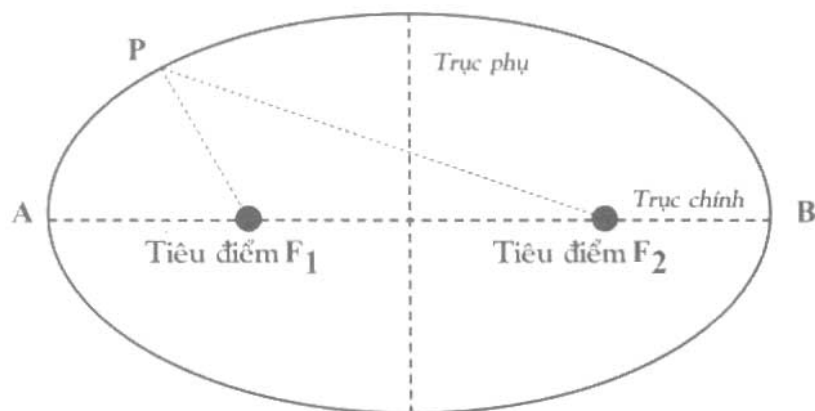
XE ĐẠP, BÀN BI-A VÀ CÁC ELIP

Elip cùng với những đường conic khác (các giao tuyến khi cắt mặt nón bằng một mặt phẳng) đã được người Hy Lạp nghiên cứu từ rất sớm vào thế kỉ thứ III tr.C.N.



Hầu hết chúng ta liên tưởng elip với một hình tròn dẹt hoặc quỹ đạo của một hành tinh. Nhưng hình elip với các tính chất của nó cũng góp phần



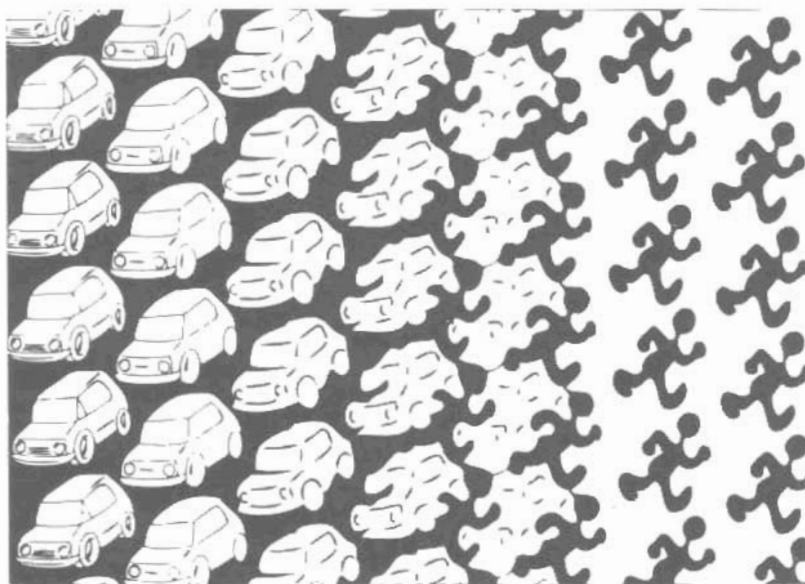


Mỗi elip có hai tiêu điểm, tổng khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên elip đến hai tiêu điểm luôn bằng với độ dài trục chính, tức là $|PF_1| + |PF_2| = |AB|$.

vào những ứng dụng trong cuộc sống đời thường. Ai có thể tưởng tượng được rằng elip xuất hiện trong thiết kế của bánh răng xe đạp và bàn bi-a? Ngày nay, một số xe đạp được sản xuất với bánh răng trước hình elip và bánh răng sau hình tròn. Hình vẽ ở trang trước mô tả cách thức thiết kế này vận dụng lực đè của chân hướng xuống dưới và phản lực nhanh hướng lên trên như thế nào. Bàn bi-a hình elip cũng được thiết kế dựa vào tính phản xạ của hai tiêu điểm elip. Chiếc bàn này có một lỗ nằm ở một trong hai tiêu điểm của elip. Khi quả bóng lăn ngang qua tiêu điểm không có lỗ, nó sẽ đập vào thành bàn rồi nảy ra theo đường đi qua lỗ bóng nằm ở vị trí tiêu điểm còn lại.

TRANH BIẾN HÌNH

Các tranh biến hình kiểu Escher⁽¹⁾ của Mark Simonson đã cho chúng ta thấy công dụng của nó như là một hình thức giao tiếp thị giác. Hình vẽ bên dưới được in trong tạp chí *The Utne Reader*⁽²⁾ và trên trang bìa của tạp chí *Transactions*, một ấn phẩm của Cục Giao thông Vận tải Hoa Kỳ, được tái bản nhờ sự giúp đỡ của Mark Simonson. Bluesky Graphics⁽³⁾, Minneapolis, Minnesota.



(1). Maurits Cornelis Escher (17/06/1898 - 27/03/1972) là một họa sĩ đồ họa người Hà Lan. Ông nổi tiếng về các bức tranh khắc gỗ, khắc trên đá đầy tính sáng tạo về mặt toán học. Chúng mô tả những cấu trúc không thể có, khám phá sự vô cùng, kiến trúc và các phép biến hình.

(2). Một tạp chí của Mỹ chuyên sâu tằm và in lại các bài báo từ các nguồn truyền thông luân phiên và lựa chọn, bao gồm tạp chí, báo, các tuần báo, tạp chí phụ thương mại, âm nhạc và băng đĩa DVD.

(3). Một hãng thiết kế đồ họa ở Indiana, Mỹ.

THÔNGIỆP QUA NHỮNG CON TEM

Chắc hẳn bạn không mong muốn phải chạm trán với toán học trên đường tới

bưu điện, nhưng một số mẫu tem dưới đây vẫn thường được dùng với chủ đề là toán học. Cùng với rất nhiều khái niệm toán học khác nữa, chúng được in trên các vật dụng phổ thông như tranh ảnh quảng cáo, ti vi, áo phông, giấy ghi chú, cốc uống nước, giấy dán, thanh chắn ô tô và giấy để can.



Định lý Pythagoras - Hy Lạp



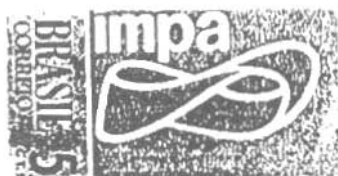
Định lý Pythagoras - Nicaragua



Euler - Thụy Sĩ



Pascal - Pháp



Dải Möbius - Brazil



Bolesu - Romania



Gauss - Đức



Các công thức toán - Israel

CÂU CHUYỆN CỦA CHÚ CHUỘT

"Ngược lại", Tweedledee tiếp tục, "Nếu như thế, thì nó sẽ là như thế; còn nếu nó là thế thì nó đã là thế rồi; nhưng vì nó không là như thế, nên nó không như thế. Đó chính là logic".

—Lewis Carroll.

Alice ở xứ sở kì diệu.

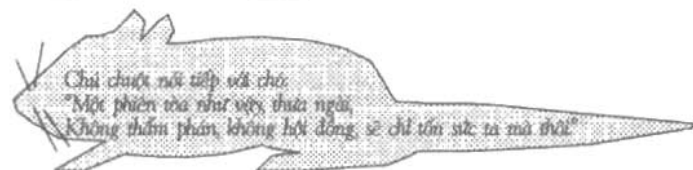
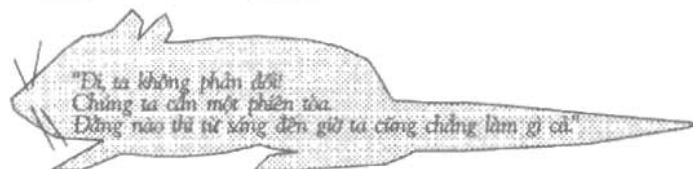
Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898) là một nhà toán học, một giảng viên toán, người phát minh các trò chơi và câu đố, một nhiếp ảnh gia về trẻ em nổi tiếng dưới thời Nữ hoàng Victoria, tác giả viết sách toán và truyện cho trẻ em⁽¹⁾, viết thơ và bình luận về các vấn đề của xã hội. Khi viết truyện cho trẻ em, bút danh của ông là Lewis Carroll. Nhưng dường như Dodgson không muốn gắn mình với cái tên Lewis Carroll này lắm. Có lần ông đã trả lại một bưu phẩm gửi cho mình dưới cái tên Lewis Carroll. Khi thư viện Bodleian trích dẫn tham khảo chéo giữa Dodgson và Carroll, ông đã lên tiếng phản đối.

Dodgson có thú đam mê chơi chữ. Vào năm 1991, hai thanh

Hay nói với chú chuột
mà nó gặp trong nhà.
"Nào, hãy cùng tìm tòi
à, ta sẽ thăm kiến
mì" Di, ta
không phân
đổi! Chúng ta
cố gắng một
phiên tòa
Đang nào
thư tư sáng
đến giờ tư
cũng chúng
cố gắng làm. Chú
chuột nói tiếp với
cho: "Một phiên
tòa như vậy,
thưa ngài,
không
thảm
phản,
không hỏi
đồng, sẽ
chỉ tin sắn
ta mà
thời "Ta sẽ
lú thẩn
phản lú
hỏi
đồng", còn
chỉ ga
uao quyết
Fury
na,
"Ta sẽ
xét
xử cả
phiên
tòa và
tuyên
án
mù tư
hình
l"

(1). Euclid và các đối thủ thời nay, Luận cơ bản về định thức, Alice ở xứ sở thần tiên, Sơn lâm quái vật, Ảo ảnh và những cảnh đẹp nền thơ, Quai lẳng kính là những tác phẩm của Dodgson.

niên ở New Jersey đã phát hiện ra một lối chơi chữ bốn cách (cả về đặc điểm hình thái và từ ngữ) trong bài thơ *A Caucus Race and a Long Tale* (Một cuộc họp kín và một câu chuyện dài) thuộc chương II của tác phẩm *Alice in Wonderland* (Alice ở xứ sở thần tiên). Alice được một chú chuột kể cho nghe câu truyện bằng thơ có dạng “cái đuôi dài”. Bên cạnh mỗi liên hệ giữa câu chuyện và chiếc đuôi, hai sinh viên Garry Graham và Jeffrey Maiden còn phát hiện ra rằng khi bài thơ được viết theo từng khổ, nó sẽ cho chúng ta hình ảnh một chú chuột. Mỗi khổ thơ có hai dòng ngắn (phần thân) và dòng thứ ba dài (phần đuôi của chuột).



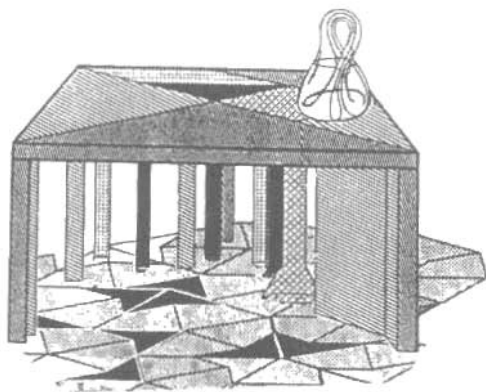
Cuối cùng, họ suy ra cấu trúc vắn đuôi – một cấu trúc thơ gồm hai câu vắn nhau và một câu thứ ba có độ dài khác hai câu đầu. Bạn có nghĩ là Lewis Carroll cố tình tạo nên tất cả những điều đó không?

CUỘC VIẾNG THĂM ĐẦY TOÁN HỌC

Tôi bấm chuông cửa, không chắc chắn điều gì đang chờ đón mình. Một giọng nói cất lên yêu cầu tôi đưa ra năm số đầu tiên của dãy số Fibonacci.

May thay tôi cũng đã nghiên cứu tí chút sau khi tòa soạn giao cho nhiệm vụ viết một câu chuyện về ngôi nhà của nhà toán học nổi tiếng Selath.

Tôi nhấn 1, 1, 2, 3, 5, cánh cửa từ từ mở ra. Bước qua cánh cửa, tôi thực sự choáng ngợp bởi những viên đá gắn móc xích với nhau thành hình chiếc cổng vòm được treo độc lập ở lối vào. Một phút sau, nhà toán học Selath bước ra và nói: "Tôi có thể mời bạn dùng chút gì sau chuyến đi dài mệt nhọc được đây?"



— Làm ơn cho tôi một cốc nước lạnh.

— Xin mời đi theo tôi.
Ông nói và dẫn đường.

Khi bước theo sau ông, tôi không thể không tò mò ngắm nhìn rất nhiều vật độc nhất vô nhị và rất lạ thường. Vào trong

bếp, chúng tôi tới một chiếc bàn có nhiều chân rất độc đáo. Selath lôi ra một chiếc bình cũng lạ kì không kém từ trong tủ lạnh. Lúc đó, chắc là tôi cũng đã có hơi chút cười nhạo. Nhà toán học bắt đầu: "Trong khi bạn uống nước, thì có lẽ chúng ta cũng sẽ bắt đầu chuyến thăm ngay tại đây, trong căn bếp này. Như bạn đã thấy, cả chiếc bàn và chai nước này đều không giống những vật dụng hàng ngày của bạn.

Tôi dùng chiếc bàn lắp ghép này làm bàn ăn, bởi vì bảy miếng ghép của nó có thể xếp thành nhiều hình khác nhau như trong trò tangram⁽¹⁾ vậy. Hôm nay, ở trong bếp, nó được xếp thành hình vuông, còn ở phòng khách tôi xếp một cái thành hình tam giác vì tôi dự định mời hai người khách tới ăn tối. Bình chứa nước kia chính là bình Klein, tức là mặt trong và mặt ngoài của nó là một. Nếu nhìn xuống nền nhà, bạn sẽ thấy có hai hình gạch lát cơ bản được sử dụng.”



— Vâng. — Tôi đáp. — Những hình như trên nền nhà không có chỗ nào hoa văn lặp lại cả.

— Rất sâu sắc. — Nhà toán học có vẻ hài lòng với câu trả lời của tôi. — Đó là những viên gạch lát Penrose⁽²⁾. Chúng có thể phủ kín mặt phẳng mà không hình nào trùng với hình nào bao giờ.

— Xin ngài cứ tiếp tục, tôi đang rất háo hức muốn xem tất cả các đồ vật toán học có trong ngôi nhà của ngài. — Tôi thúc giục.

—Ồ, thực tế là hầu hết mọi thứ trong căn nhà này đều mang tính chất toán học. Ở bất cứ đâu trên giấy dán tường, tôi đều thiết kế những

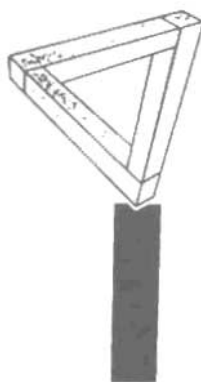


(1). Tangram là một trò xếp hình cổ của Trung Quốc, xuất hiện khoảng 200 năm trước. Nó bao gồm một hình vuông được chia thành 7 phần: 2 tam giác lớn, 2 tam giác nhỏ, 1 tam giác nhỡ, 1 hình vuông nhỏ và 1 hình bình hành. Bằng việc sắp xếp lại 7 hình này, người ta có thể tạo được hàng trăm hình người, động vật và đồ vật khác nhau.

(2). Roger Penrose (08/08/1931) là nhà vật lý, giáo sư danh dự tại Viện Toán của Đại học Oxford, người phát minh ra mô hình những viên gạch lát này.

mảnh tranh biến hình đặc biệt cho các bức tường Escher. Nào, chúng ta hãy cùng tiến đến phòng quang học! Mọi vật ở đây đều là ảo ảnh. Thực tế, điều thật nhất ở trong căn phòng này chính là ở chỗ mọi vật đều là ảo. Đồ nội thất, các vật dụng, tranh ảnh và mọi thứ. Ví dụ như chiếc trường kỷ này được tạo từ những hình lập phương đơn vị màu trắng và đen xếp chồng lên nhau để gây cho ta cảm giác ánh động. Bức tường ở giữa phòng được thiết kế để mô tả hiện tượng hội tụ và phân kì của ánh sáng, hai hình xếp chồng lên nhau đó có kích thước như nhau. Chân đế của chiếc đèn, nhìn từ vị trí này, sẽ tạo thành một tam giác không thể.

– Tuyệt vời! Tôi có thể dành hàng giờ chỉ để ngắm nhìn mọi vật ở trong ngôi nhà này của ngài.



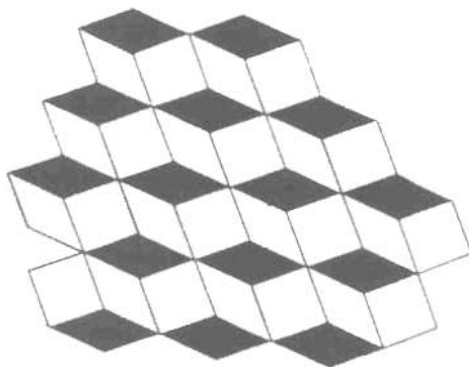
– Thời gian của chúng ta có hạn thôi, xin mời bạn sang căn phòng kế tiếp. – Nhà toán học vừa nói vừa dẫn đường.

Chúng tôi bước vào một căn phòng tối đen như mực.

– Bạn hãy bước cẩn thận. Xin mời đi theo lối này tới màn hình parabol. – Selath hướng dẫn.

Khi tôi nhòm vào một cái đĩa thì một cảnh động bỗng hiện ra. Tôi hỏi: “Đây có phải là máy quay video không?”

– Selath cười đáp, “Ồ, không, tôi gọi nó là hệ thống giám sát cổ lỗ của mình. Các thấu kính ở phía trên lỗ này

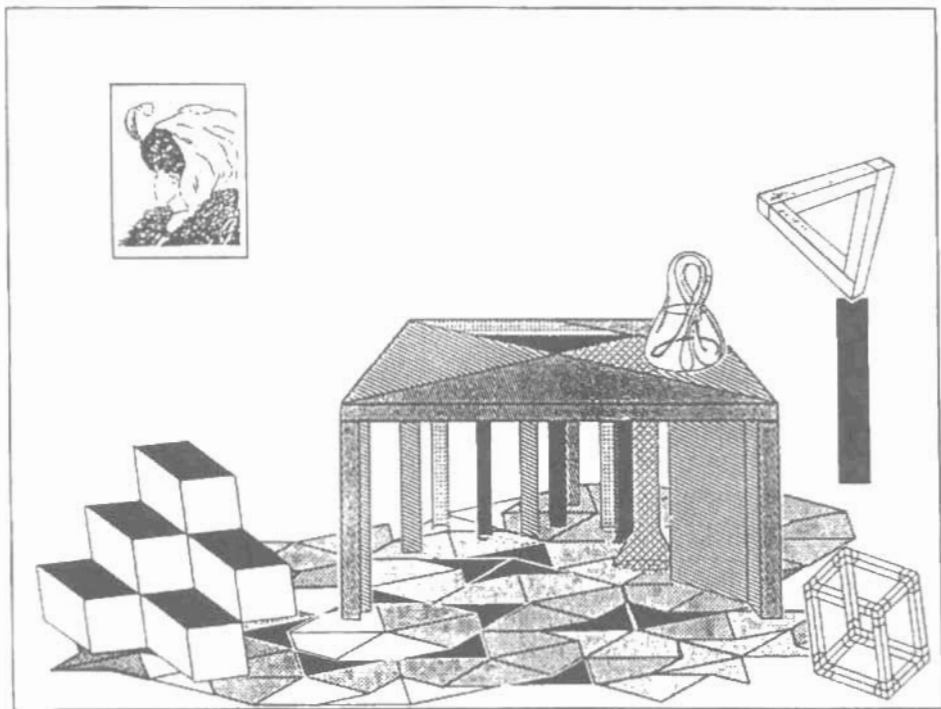


sẽ bắt ánh sáng ban ngày và phản chiếu lại quang cảnh phía ngoài ngôi nhà của tôi, tương tự như cách hoạt động của máy ảnh. Tôi cũng có một thấu kính để nhìn vào ban đêm”.

Tôi mê mải chép, nhận ra rằng mình sẽ cần tìm hiểu thêm nhiều trước khi tiến hành viết bài báo.

Liếc nhìn xung quanh, tôi lưu ý Selath: “Chiếc đồng hồ huỳnh quang của ngài hình như đã ngừng chạy rồi. Đồng hồ của tôi chỉ 5 giờ 30 phút chiều, trong khi nó chỉ 21 giờ 30 phút”.

- Không, chả là tôi sắp xếp 24 giờ của ngày theo hệ 8 giờ,



bởi tuần này tôi làm việc theo chu kỳ 8 giờ. Thế nên 24 giờ sẽ là 30 giờ, 8 giờ sẽ là 10 giờ, và cứ thế. - Selath giải thích.

– Hè đêm nào cũng tốt cho ngài cả thôi. – Tôi đáp hơi lúng túng một chút.

– Nào, chúng ta hãy cùng sang phòng ngủ chính!

Và chúng tôi bước ra, đi qua tất cả các vật với đủ loại hình thù mà từ trước tới nay tôi chưa bao giờ nhìn thấy trong một ngôi nhà bình thường.

– Phòng ngủ chính có một cửa sổ vòm hình bán nguyệt cùng với các cửa sổ vòm tròn địa di động. Chúng được thiết kế để tối ưu hóa việc sử dụng nguồn năng lượng mặt trời.

Thật là kì diệu, nhưng giường ở đâu, thưa ngài?

– Chỉ cần bám vào ở trên khối gỗ vuông này, bạn sẽ thấy một chiếc giường gấp với một bảng phía đầu và hai bàn ở phía cuối.

– Một cách tuyệt vời để làm giường ngủ!

– Vẫn còn nhiều thứ để xem lắm, nhưng tiếc là chúng ta không có nhiều thời gian. Xin mời bạn qua phòng tắm để xem chiếc giường ở trên chậu rửa mặt. Mời đi theo lối này. Giờ thì bạn hãy nghiêng người về phía trước.

Tôi ngạc nhiên nhìn vào vô số hình ảnh của chính mình lặp đi lặp lại trong gương. Chiếc gương này đã phản xạ ánh sáng qua lại, tạo thành vô số ánh sáng trong gương.

– Bạn hãy quay ngược lại và để ý chiếc gương. Nó có gì khác biệt? – Nhà toán học hỏi.

Tôi đáp: “Hình trong gương của tôi ngược phía so với gương thường”.

– Đúng vậy, trái với bình thường, chiếc gương⁽¹⁾ cho chúng ta nhìn thấy bản thân mình giống như khi người khác nhìn vào vậy.

– Selath giải thích.

Đúng lúc đó thu chuông cửa reo. Những người khách tối ăn tối đã đến. “Tại sao bạn không ở lại dùng bữa cùng chúng tôi”, Selath đề nghị. “Bạn còn chưa xem phòng khách và tôi chắc rằng bạn sẽ rất thích khi gặp gỡ những vị khách của tôi”.

– Thật khó mà che giấu niềm phấn khởi, tôi thốt lên: “Nhưng bàn ăn của ngài chỉ lắp cho ba người thôi mà”.

– Không vấn đề gì. Đối với cái bàn tangram, tôi chỉ cần xếp lại một vài phần là chúng ta sẽ có ngay bàn ăn hình chữ nhật thôi.

(1). Được tạo bởi hai chiếc gương đặt tương góc với nhau. Sau đó chúng được bố trí để có thể phản xạ lại ảnh phản xạ của bạn.

PHƯƠNG TRÌNH THỜI GIAN



Nếu bạn đã từng sử dụng đồng hồ mặt trời, chắc hẳn bạn sẽ nhận thấy rằng thời gian theo đồng hồ mặt trời hơi khác so với thời gian trên đồng hồ của bạn. Sự khác nhau này tùy thuộc vào độ dài ban ngày của các ngày trong năm. Vào thế kỉ XV, Johannes Kepler đã phát biểu ba định luật về chuyển động của các hành tinh. Ông mô tả Trái Đất chuyển động xung quanh Mặt Trời theo quỹ đạo hình elip như thế nào và cũng giải thích rằng đoạn thẳng nối Mặt Trời và Trái Đất sẽ quét những phần diện tích bằng nhau nếu nó



Một chiếc đồng hồ mặt trời bỏ túi ở thế kỉ X. Mỗi mặt đồng hồ có khác 6 tháng. Một chiếc que sẽ được cắm vào lỗ tương ứng với cột của tháng hiện tại.

di chuyển trong thời gian bằng nhau. Mặt Trời nằm tại một trong hai tiêu điểm của elip, do đó tạo nên các phần hình quạt có diện tích bằng nhau trong một khoảng thời gian di chuyển cố định, dù chiều dài cung của mỗi phần quạt là khác nhau. Điều này dẫn đến tốc độ bay trên quỹ đạo của Trái Đất thay đổi theo đường đi của nó. Đây là lí do cho sự thay đổi độ dài ban ngày trong những khoảng thời gian khác nhau của năm. Đồng hồ mặt trời hoạt động dựa vào ánh sáng ban ngày, mà ánh sáng ban ngày thì lại phụ thuộc vào thời gian trong năm và vị trí địa lí. Còn các khoảng thời gian trên đồng hồ của chúng ta là không đổi, vì vậy dẫn đến sự chênh lệch giữa hai loại đồng hồ. Sự khác nhau đó thông thường được nhắc đến như là “phương trình thời gian”. Niên lịch đã liệt kê các bảng phương trình thời gian, trong đó chỉ ra số phút nhanh hoặc chậm của đồng hồ mặt trời so với đồng hồ thường. Ví dụ sơ đồ phương trình thời gian có thể lập như bảng sau:

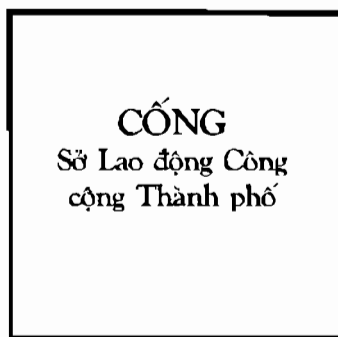
Bảng phương trình thời gian

(Các số âm hoặc dương chỉ số phút mà đồng hồ mặt trời chậm hoặc nhanh hơn đồng hồ thường. Tuy nhiên, bảng này chưa xem xét đến sự khác nhau của độ dài ban ngày tại các múi giờ khác nhau.)

NGÀY		SAI SỐ
Tháng một	1	- 3
	15	- 9
Tháng hai	1	- 13
	15	- 14
Tháng ba	1	- 3 ...
	15	- 9 ...
Tháng tư	1	- 4
	15	0
Tháng năm	1	+3
	15	+4.

+4. Nếu đồng hồ mặt trời chỉ 11 : 50 ngày 15 tháng 5, thì giờ của nó phải được tăng thêm 4 phút thành 11 : 54.

TAI SAO MIỆNG CỐNG LẠI TRÒN?

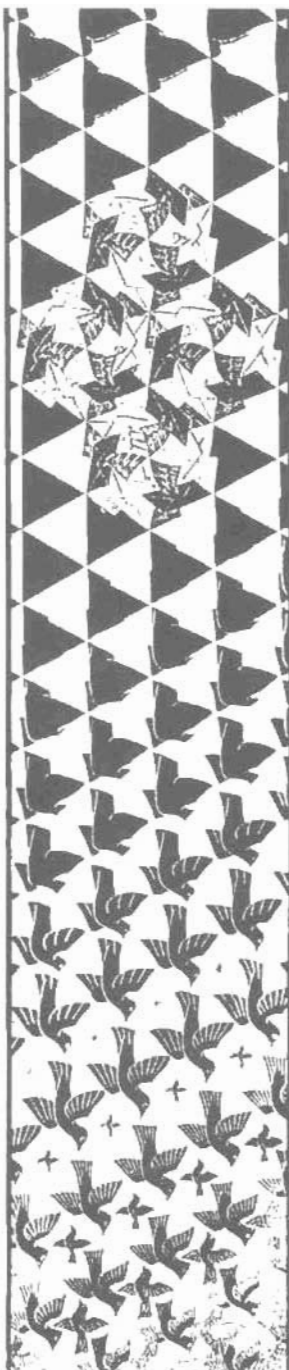
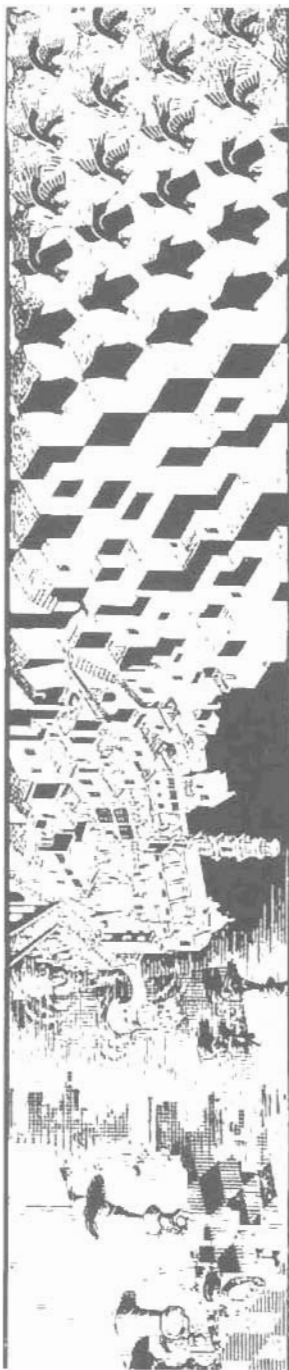


Tại sao miệng cống lại hình tròn?

Sao không phải là hình vuông, hình chữ nhật, lục giác hay elip?

Có phải hình tròn là dễ nhìn hơn không?

Có một lí do về mặt toán học trong đó. Bạn hãy thử giải thích nhé!



Bức tranh Biến hình III, tác giả M.C. Escher.
© 1994 M.C. Escher/Condon Art-Buam-Holland.
Tất cả các quyền đều được bảo vệ.

NHỮNG THẾ GIỚI TOÁN HỌC ĐIỀU KÌ

**CÁC THẾ GIỚI TOÁN HỌC HÌNH THÀNH
NHƯ THẾ NÀO?
THẾ GIỚI HÌNH HỌC
THẾ GIỚI SỐ
THẾ GIỚI CỦA CÁC KHÔNG GIAN ĐA CHIỀU
THẾ GIỚI CỦA CÁC VÔ CÙNG
THẾ GIỚI FRACTAL
THẾ GIỚI TOÁN TRONG VĂN CHƯƠNG**

*Làm sao mà toán học, một sản phẩm tư duy
của con người không phụ thuộc vào kinh nghiệm,
lại có thể phù hợp với thế giới hiện thực đến như vậy?*
—Albert Einstein

Toán học được liên hệ và ứng dụng trong rất nhiều sự vật hiện tượng ở thế giới của chúng ta, đồng thời nó cũng tự tồn tại và phát triển trong những thế giới riêng thật hoàn hảo, nhưng cũng rất xa lạ với thế giới của chúng ta.

Một thế giới toán học hoàn chỉnh có thể tồn tại trên một đầu kim hoặc trong một tập hợp vô hạn các số. Người ta đã tìm ra các thế giới như thế giới điểm, phương trình, đường cong, các nút, fractal, ... Cho đến khi chúng ta hiểu được những thế giới đó và hiểu được các hệ thống toán hình thành như thế nào, thì một vài điểm trong chúng lại có vẻ như mâu thuẫn với nhau. Chẳng hạn ta có thể hỏi rằng làm sao một thế giới vô hạn lại có thể tồn tại trên một đoạn thẳng rất nhỏ, hay một thế giới phẳng lại chỉ gồm ba điểm không trùng nhau. Mục đích của chương này sẽ giúp các bạn khám phá sự kì diệu của thế giới toán và đi sâu tìm hiểu phần nào nội dung của chúng.

1, 2, 3, 4, 5
'6' '8' 'L' '9'
10,
'11'
12,
... '13'

Như sẽ thảo luận ở phần tiếp theo của cuốn sách, bản thân các số đếm cũng hình thành nên một thế giới toán.

Tại sao? Đôi khi, trước
bữa sáng, tôi tin vào
những 6 điều không thể
xảy ra được.

—*Lewis Carroll*

CÁC THẾ GIỚI TOÁN HỌC HÌNH THÀNH NHƯ THẾ NÀO?

Năm 300 tr.C.N, khi bắt đầu xây dựng các khái niệm hình học, Euclid đã không hề nhận ra rằng ông đang xây dựng thế giới toán học đầu tiên trong lịch sử. Các thế giới toán và những phần tử của chúng như thế giới số học (các con số), thế giới đại số (các biến số), thế giới hình học Euclid (các hình vuông, tam giác ...), thế giới hình học tôpô (dải Möbius và các đồ thị), thế giới fractal (các hình liên tục thay đổi) – đều là những thế giới độc lập nhưng lại có mối liên quan lẫn nhau. Tất cả chúng tạo nên vũ trụ toán học, một vũ trụ tồn tại độc lập với vũ trụ của chúng ta, nhưng lại có thể mô tả và giải thích tất cả mọi điều xung quanh ta.

Mỗi thế giới toán học tồn tại trong một hệ thống toán học tương ứng. Hệ thống này đặt ra các quy tắc cơ bản cho sự tồn tại của các đối tượng trong thế giới đó. Nó giải thích các đối tượng được hình thành như thế nào, bị chi phối ra sao và cách thức tạo ra các đối tượng mới. Một hệ thống toán học bao gồm các yếu tố cơ bản, được gọi là *các khái niệm không định nghĩa*. Những khái niệm này có thể mô tả được và mọi người đều có thể hiểu được ý nghĩa của chúng, nhưng về mặt kĩ thuật thì lại không thể định nghĩa chúng. Vì sao? Bởi cần phải có các khái niệm để hình thành nên định nghĩa và bạn phải bắt đầu với một vài khái niệm nào đó. Đối với những khái niệm mở đầu này, không có khái niệm nào khác có thể sử dụng để định nghĩa chúng.

Để hiểu rõ nhất những hệ thống toán học như vậy, chúng ta hãy cùng tìm hiểu một ví dụ cụ thể. Dưới đây là một cách tạo thành thế giới toán hữu hạn. Giả sử các khái niệm không định nghĩa của nó là *điểm* và *đường thẳng*. Ngoài các khái niệm không định nghĩa, trong hệ thống toán học còn có các tiên đề, định lý và định nghĩa. *Tiên đề* (định đề) là những khẳng định mà chúng ta thừa nhận, không cần chứng minh. *Định nghĩa* là những khái niệm mới mà chúng ta mô tả hoặc xác định thông qua các khái niệm không định nghĩa hoặc các khái niệm đã được định nghĩa trước đó. *Định lý* là những khẳng định cần được chứng minh bằng cách sử dụng các tiên đề, định nghĩa hoặc các định lý đã được chứng minh.

Loại định nghĩa, định lý và tiên đề nào có thể có trong thế giới nhỏ bé ở ví dụ của chúng ta? Dưới đây là một vài mục nhỏ mà chúng ta có thể tạo ra ngay:

Các khái niệm không định nghĩa: Điểm và đường thẳng.

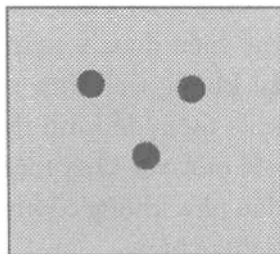
Định nghĩa 1: Một tập hợp các điểm gọi là thẳng hàng nếu tất cả các điểm của nó cùng nằm trên một đường thẳng.

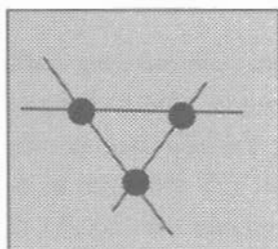
Định nghĩa 2: Một tập hợp các điểm gọi là không thẳng hàng nếu tất cả các điểm của nó không cùng nằm trên một đường thẳng.

Tiên đề 1: Thế giới này chỉ gồm 3 điểm khác nhau không nằm trên một đường thẳng.

Tiên đề 2: Qua hai điểm bất kì đều kẻ được một đường thẳng.

Định lý 1: Trong thế giới toán học này chỉ có thể tồn tại 3 đường thẳng khác nhau.





Chứng minh

Tiền đề 1 phát biểu rằng trong thế giới này chứa 3 điểm khác nhau. Sử dụng tiền đề 2, chúng ta biết rằng qua hai điểm bất kì kẻ được một đường thẳng. Do đó, qua 3 điểm ta chỉ có thể kẻ được ba đường thẳng khác nhau.

Ví dụ trên minh họa cho chúng ta thấy rõ một trong những cách thức mà các thế giới toán học có thể được tạo ra. Khi một ý tưởng mới nảy sinh, người ta lại bổ sung thêm các khái niệm không định nghĩa, tiền đề, định nghĩa và các định lý mới khác, nhờ đó thế giới toán học của chúng ta mở rộng thêm ra.

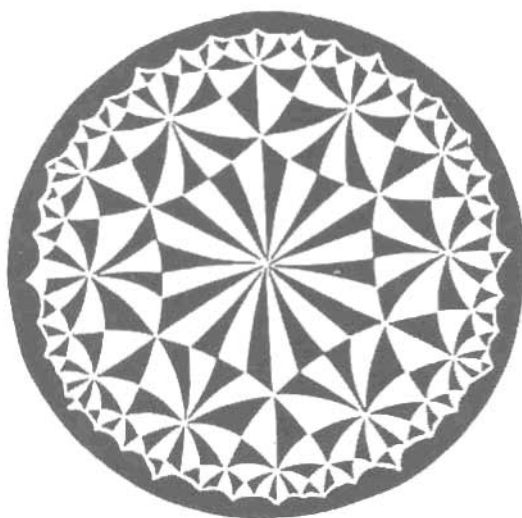
Những phần tiếp theo trong chương này sẽ giới thiệu với các bạn một số thế giới toán học và các cư dân của chúng.

THẾ GIỚI HÌNH HỌC

...Vũ trụ luôn mở rộng trước mắt chúng ta, nhưng chúng ta sẽ không thể hiểu được nó nếu không học, tìm hiểu ngôn ngữ cũng như giải nghĩa các ký tự của nó. Nó được viết bằng thứ ngôn ngữ của toán học, ký tự của nó chính là các hình hình học mà nếu thiếu chúng, ta sẽ không thể hiểu được dù chỉ một chữ. Không có chúng, ta sẽ chỉ lang thang trong một mê cung tối tăm.

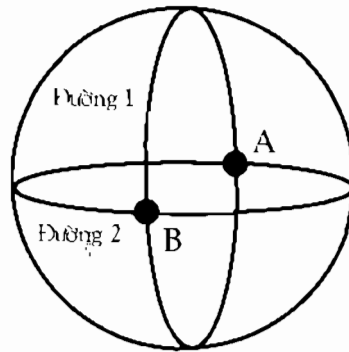
—Galileo

Toán học gồm nhiều loại hình học khác nhau, trong đó có hình học Euclid, hình học giải tích và một loạt các loại hình học phi Euclid như hình học hyperbolic, hình học elliptic, hình học xạ ảnh, hình học tôpô, hình học fractal. Mỗi loại hình học hình thành nên một hệ thống toán học với các khái niệm không định nghĩa, các tiên đề, định lý và định nghĩa riêng của mình. Mặc dù những thế giới hình học này sử dụng tên gọi chung cho các phần tử



Đây là một mô hình lý thuyết về thế giới hình học hyperbolic của Henri Poincaré (1854 - 1912). Ở đây, một đường tròn bao quanh là đường biên của thế giới này. Kích thước của các cư dân trong đó thay đổi theo khoảng cách của nó tới tâm đường tròn. Càng gần vào tâm, kích thước của chúng càng lớn lên và ngược lại. Như vậy, chúng không bao giờ chạm tới được đường biên và kết quả là thế giới của chúng là vô hạn.

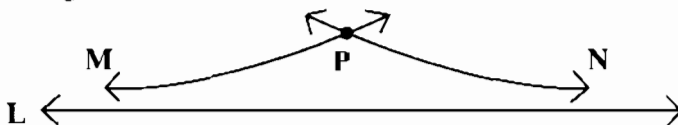
hoặc tính chất, nhưng chúng vẫn có đặc điểm khác nhau. Ví dụ như trong hình học Euclid, các đường là thẳng, hai đường khác nhau chỉ có thể song song, hoặc cắt, hoặc trùng nhau; nhưng trong hình học eliptic, đường không còn thẳng nữa. Chúng là các bán kính lớn của hình cầu, do đó hai đường khác nhau bất kỳ cắt nhau tại hai điểm. Chúng ta hãy cùng xem



Hình minh họa cho thấy hai vòng tròn lớn, đường 1 và 2 giao nhau tại các điểm A & B.

xét cụ thể từ song song. Trong hình học Euclid, các đường thẳng song song luôn cách đều nhau và không bao giờ cắt nhau. Nhưng trong hình học eliptic hoặc hyperbolic thì điều này lại không đúng. Tại sao?

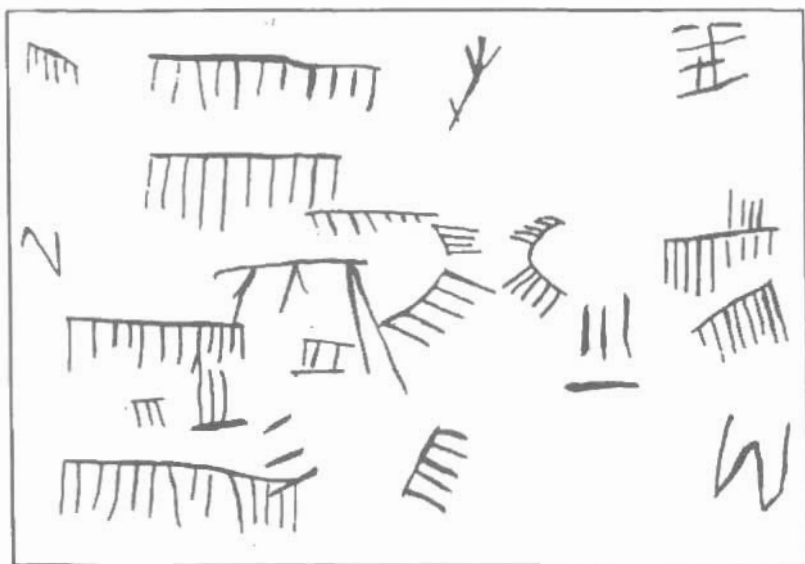
Tại vì mỗi đường tròn lớn của hình cầu đều cắt các đường tròn lớn khác, do đó trong hình học eliptic không có khái niệm đường song song. Trong hình học hyperbolic, các đường thẳng song song không bao giờ cắt nhau, nhưng chúng không giống như đường song song ở hình học Euclid. Chúng tiến lại gần nhau, nhưng không cắt nhau, hay nói cách khác, chúng tiệm cận nhau. Hình học Euclid, hình học hyperbolic và hình học eliptic tạo nên ba thế giới khác nhau với các đường, điểm,... có tính chất riêng biệt. Mỗi thế giới này là một hệ thống toán học và chúng đều có những ứng dụng nhất định vào trong thế giới của chúng ta.



Trong hình học hyperbolic, đường thẳng M và N cùng song song với đường thẳng L và đi qua điểm P, M và N tiệm cận với đường thẳng L

THẾ GIỚI SỐ

Các con số có thể xem là những yếu tố đầu tiên của toán học. Kí hiệu đầu tiên về chúng có thể chỉ là những dấu vẽ trên mặt đất dùng để chỉ số lượng đồ vật. Nhưng kể từ khi có sự tham gia của các nhà toán học, thế giới của các số đã không bao giờ còn đơn giản như vậy nữa. Rất nhiều người trong số chúng ta đã quá quen thuộc với các số nguyên,



Các kí hiệu số thời kì Đồ đá được tìm thấy ở La Pileta, Tây Ban Nha.

phân số và số thập phân trong các phép tính hàng ngày. Tuy nhiên, thế giới số còn có số hữu tỉ, số vô tỉ, số phức, số thập phân vô hạn không tuần hoàn, số siêu việt, số siêu hạn và rất nhiều những tập hợp số nhỏ hơn khác cùng với các tính chất riêng của chúng, ví dụ như số hoàn hảo⁽¹⁾, số đa giác⁽²⁾,... Sẽ thật

(1). Số có tổng các ước, trừ chính nó, bằng giá trị của nó.

(2). Số mà có thể sắp xếp chúng ấy số 1 thành một đa giác đều.

thứ vị nếu chúng ta đi sâu vào mối quan hệ giữa các con số, tìm hiểu xem chúng được tạo nên như thế nào và khám phá các tính chất khác nhau của chúng.

Số đếm ra đời từ thời tiền sử. Những kí hiệu vô cùng đơn giản dùng để biểu diễn các số từ thời kì Đồ đá cách đây 25 000 năm đã được tìm thấy trong hang La Pileta ở miền Nam Tây Ban Nha. Con người đã biết tới số π từ cách đây hơn 3000 năm, khi họ dùng nó để tính toán chu vi và diện tích của hình tròn. Sau đó, người ta chứng minh được rằng π là một số vô tỉ và cũng là số siêu việt. Các nền văn minh cổ đại cũng đã biết về sự tồn tại của các phân số. Người Ai Cập sử dụng nét vẽ hình cái miệng  để viết các phân số, ví dụ  là $\frac{1}{3}$, còn  là $\frac{1}{10}$.

Số vô tỉ được các nhà toán học cổ đại phát hiện khi tìm rồi phương pháp tính gần đúng các giá trị. Thực tế, người Hy Lạp đã phát triển phương pháp *cầu thang* để tính gần đúng giá trị $\sqrt{2}$, trong khi người Babylon lại sử dụng một phương pháp khác.

0 = hai	1 = hai	10 = hai	11 = hai	100 = hai	101 = hai
					
0	1	2	3	4	5

Các số trong hệ lục phân và biểu diễn của chúng trong hệ nhị phân.

Trải qua nhiều thế kỉ, các nền văn minh khác nhau đã phát triển các kí hiệu và hệ đếm riêng cho mình. Tới thế kỉ XX, hệ nhị phân với hai chữ số 0 và 1 được đưa vào sử dụng cùng với cuộc cách mạng về máy vi tính. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) là người đầu tiên viết về hệ nhị phân trong bài báo *De Progressione Dyadica* (1679) của mình. Ông trao đổi về hệ nhị phân với Père Joachim Bouvet, một nhà truyền giáo ở Trung Hoa và chính nhờ Bouvet mà Leibniz biết rằng hệ 6 nét I Ching

có mối liên hệ với hệ nhị phân. Ông nhận thấy nếu thay số 0 cho mỗi đường nét đứt và số 1 cho đường liền nét thì hệ lục phân sẽ biểu diễn các số nhị phân. Nhiều thế kỉ trước đó, người Babylon đã phát triển và cải tiến hệ 60 số của người Sumer để tạo ra hệ cơ số 60. Trong chương này, chúng tôi chỉ xin đề cập tới các loại số chứ không bàn về hệ thống các số.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

Chúng ta hãy cùng lướt qua một chút về loại số đầu tiên - số đếm. Trong thế giới số đếm có các khái niệm không định nghĩa như các số 1, 2, 3, 4, ... các tiên đề như tính giao hoán của phép cộng: Thứ tự cộng các số không ảnh hưởng đến kết quả " $a + b = b + a$ ", tính giao hoán của phép nhân: Thứ tự nhân các số không ảnh hưởng đến tích " $a \times b = b \times a$ " và các định lí như: Tổng hai số chẵn là một số chẵn, tích hai số lẻ là một số lẻ. Nhưng rồi thế giới số đếm cũng không đủ khả năng giải quyết các bài toán mới xuất hiện. Bạn có thể hình dung làm sao giải được bài toán "Tìm giá trị của x thỏa mãn phương trình $x + 5 = 3$ " nếu như không có số âm. Đã từng có những phản đối nói rằng bài toán đặt ra không đúng, nên không thể có lời giải. Các tài liệu của Ả-rập đã giới thiệu số âm đến châu Âu, nhưng hầu hết các nhà toán học thế kỉ XVI, XVII thời đó không sẵn sàng chấp nhận những số âm này. Nicholas Chuquet (thế kỉ XV) và Michael Stidel (thế kỉ XVI) nhắc đến số âm như một điều vô lí. Còn Jerome Cardan (1501 - 1576) mặc dù đã coi số âm là nghiệm của phương trình, nhưng ông vẫn xem chúng là những đáp số

không thể có. Thậm chí Blaise Pascal cũng đã từng viết: “Tôi đã từng biết những người không thể hiểu được rằng lấy bốn đi khỏi 0 thì vẫn chỉ còn lại 0 mà thôi”.

Như vậy lịch sử đã chứng minh rằng, để giải một số bài toán, chúng ta cần phải xây dựng các số mới. Ví dụ như việc giải thích ý nghĩa của $\sqrt{-1}$ hay giải phương trình $x^2 = -1$ đã dẫn đến việc hình thành nên số ảo. Từ số ảo, các nhà toán học lại mở rộng thêm đến số thực và số phức. Và thế là số phức

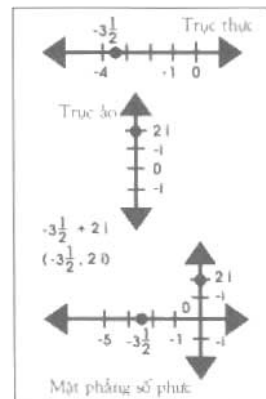
(số có dạng $a + bi$, trong đó a, b là số thực, còn $i = \sqrt{-1}$) ra đời vào thế kỉ XVI. Cùng với sự ra đời của nó, tất cả các số từ trước đến nay đều có thể xếp vào loại số phức.⁽¹⁾



Đồ thị là phương tiện dùng để vẽ các đối tượng toán học. Trục số thực biểu diễn các số thực đã sắp thứ tự và khoảng cách tương đối của chúng với số 0. Mỗi điểm trên trục số thực tương ứng với duy nhất một con số và ngược lại. Do đó, số $3\frac{1}{2}$ chỉ nằm tại một vị trí trên trục số thực mà thôi.

Các số ảo nằm trên trục ảo. Do đó, số $2i$ nằm tại điểm như trong hình vẽ bên cạnh.

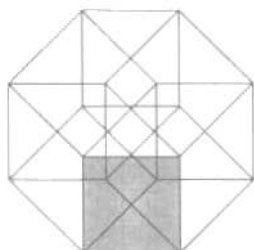
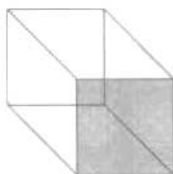
Kết hợp trục thực và trục ảo, chúng ta có được cách biểu diễn



(1) Một số thực bất kỳ có thể coi như là số phức với phần ảo bằng 0, còn số ảo là số phức với phần thực bằng 0.

số phức trên mặt phẳng, gọi là mặt phẳng phức. Hai trục thực và trục ảo vuông góc nhau tại gốc tọa độ $(0,0)$. Mỗi điểm trên mặt phẳng này biểu diễn một số phức, không số phức nào khác có vị trí đó. Do đó, điểm $(-4,3)$ tương ứng với số phức $(-4 + 3i)$, còn $(4,0)$ tương ứng số phức $(4 + 0i)$, tức là 4 . Hệ tọa độ này là một cách tuyệt vời để biểu diễn và sắp xếp các số phức. Câu hỏi đặt ra bây giờ là: Liệu có còn số nào khác chưa được biểu diễn trên mặt phẳng này không? Chắc hẳn là có rồi! Chương *Sự kì diệu của các con số* sẽ cho chúng ta một số dẫn chứng về những số đó.

THẾ GIỚI CỦA CÁC KHÔNG GIAN ĐA CHIỀU



Bốn chiều không gian

Chúng ta hãy xét tới những thế giới toán tạo bởi các khái niệm về chiều không gian.

Một thế giới toán học có thể tồn tại trên một điểm, một đường, mặt phẳng hay trong một không gian hoặc siêu lập phương. Mỗi không gian đa chiều chứa các không gian ít chiều hơn nó, mỗi không gian ít chiều hơn tự bản thân nó cũng là một không gian độc lập. Hãy hình dung thế giới

và cuộc sống của bạn trên một mặt phẳng. Bạn không thể nhìn lên hoặc xuống. Các sinh vật trong không gian ba chiều có thể xâm lược thế giới của bạn mà bạn không hề hay biết chỉ đơn giản bằng cách đi vào nơi bạn ở từ phía trên hoặc phía dưới. Các nhà

toán học, nhà văn, các nghệ sĩ đã cố gắng rất nhiều trong sáng tác để có thể nắm bắt được điểm cốt yếu của các chiều không gian khác nhau trong tác phẩm của mình. Những không gian nhiều hơn ba chiều vẫn luôn là đối tượng thu hút được sự quan tâm nhiều nhất.

Hình lập phương là một trong những hình ba chiều đầu tiên được đưa vào không gian bốn chiều bằng cách biến đổi thành siêu lập phương. Các bước biến nó thành siêu lập phương được minh họa trong hình vẽ. Các chương trình máy tính còn được lập trình để tạo hình ảnh bốn chiều bằng cách phối chụp các hình ảnh ba chiều trên các mặt khác nhau của siêu lập phương.

THẾ GIỚI CỦA CÁC VÔ CÙNG

Đò nhìn thế giới trong một hạt cát,
Và thiên đường trên một bông hoa,
Hãy nắm giữ vô cùng trong lòng
bàn tay bạn,
Và vĩnh cửu trong khoảnh khắc một giữ.
—William Blake

Vô cùng đã khơi dậy sức tưởng tượng của con người từ hàng ngàn năm nay. Nó là khái niệm được các nhà thần học, nhà thơ, nhà văn, nghệ sĩ, nhà triết học, nhà khoa học, nhà toán học phác ra – một khái niệm gây bối rối và cả trí tò mò của các nhà khoa học, một khái niệm mà hiện giờ vẫn là không tưởng. Vô cùng mang những diện mạo khác nhau trong các lĩnh vực tư duy khác nhau. Ban đầu, khái niệm vô cùng, dù đúng hay sai, được liên hệ với những con số lớn. Người xưa có cảm nghĩ về vô cùng khi quan sát các ngôi sao và hành tinh hoặc đếm những hạt cát trên bãi biển. Các nhà triết học và toán học cổ đại như Zeno, Anaxagoras, Democritus, Aristotle, Archimedes đã nghiên cứu và đưa ra tranh luận những khái niệm mà vô cùng mô tả. Aristotle đề xuất khái niệm *vô hạn tiềm năng* và *vô hạn thực tế*. Ông lập luận rằng chỉ vô hạn tiềm năng⁽¹⁾ là tồn tại.

Trong tác phẩm *The Sand Reckoner* (Người đếm cát), Archimedes đã bác bỏ ý kiến cho rằng số hạt cát trên bãi biển là vô hạn bằng cách xác định một phương pháp thực tế để tính số hạt cát trên tất cả các bãi biển của Trái Đất.

Vô cùng đã từng là thủ phạm trong nhiều nghịch lý. Các nghịch lý của Zeno (nghịch lý *Achilles* và *côn rùa* và nghịch lý

(1) Tập số tiềm là vô hạn tiềm năng, bởi có thể cộng một số với số khác để tạo ra số đứng sau nó, nhưng thực tế là không thể viết ra hết toàn bộ tập hợp này.

lượng phân¹¹⁾) đã làm đau đầu nhiều người trong hàng thế kỉ. Các nghịch lí của Galileo¹²⁾ với các cung, điểm và tập vô hạn cũng là những ví dụ điển hình.

Danh sách các nhà toán học và những khám phá, ý kiến tán thành hay không tán thành của họ về khái niệm vô cùng kéo dài theo thời gian. Euclid (khoảng năm 300 tr.C.N) đã chứng minh rằng tập các số nguyên tố là tập hợp vô hạn, không có số nguyên tố cuối cùng. Những tiến bộ đạt được trong việc tìm hiểu các vô cùng về sau này là nhờ đóng góp của các nhà toán học như Bernhard Bolzano (1781 - 1848), Gottfried W. Leibniz (1646 - 1716) và J.W.R. Dedekind (1831 - 1916), nhưng công trình nghiên cứu của George Cantor (1845 - 1918) về lí thuyết tập hợp mới là bước đột phá chính. Sử dụng các định nghĩa mới về tập hợp, Cantor đã tìm ra phương thức mới để sắp xếp tổ chức lại toán học. Ông đưa ra phương pháp so sánh các tập hợp vô hạn bằng cách phát triển số siêu hạn. Nhờ các khái niệm về tập hợp tương đương và tính đếm được, ông xác định được những

(1) Trong nghịch lí lượng phân, nhà toán học Zeno lập luận rằng: Một người đi bộ từ điểm A ra điểm B sẽ không bao giờ tới được điểm B. Bởi vì, trước hết anh ta phải đi từ điểm giữa của A và B. Sau đó, anh ta lại phải đi tới điểm giữa của quãng đường còn lại và cứ thế mãi. Do luôn tồn tại một nửa quãng đường còn lại để đi nên anh ta vô số các trung điểm của nửa phần đường còn lại. Như vậy, người đi bộ đó sẽ không bao giờ tới đích của mình.

(2) Trong công trình nghiên cứu của Galileo năm 1634, quyển **Hội thoại về hai ngành khoa học mới**, ông cho rằng vô cùng có mối liên hệ với các số nguyên dương và hình phẳng của chúng. Thậm chí ông cho rằng hai tập hợp vô hạn này là tương đương 1-1. Ngoài ra, ông còn đưa ra khái niệm bằng nhau, lớn hơn, nhỏ hơn để so sánh các tập hợp hữu hạn. Galileo còn đưa ra định lí phát biểu rằng **Tổng thể luôn lớn hơn từng phần** là đúng với tất cả các tập hợp hữu hạn và vô hạn. 300 năm sau Cantor đã chứng minh được rằng nguyên lí này không đúng đối với các tập hợp vô hạn, ông cũng đã sử dụng khái niệm tương đương 1-1 để sửa lại những khái niệm truyền thống về bằng nhau, lớn hơn, nhỏ hơn cho các tập vô hạn. Những cải tiến của Cantor đã loại bỏ nhiều nghịch lí liên quan tới các tập vô hạn và nguyên lí tổng thể luôn lớn hơn từng phần.

tập hợp nào là có cùng số lượng phần tử và gọi số lượng đó là số siêu hạn. Các nghiên cứu và chứng minh của ông về vấn đề này quả là hết sức thông minh và sáng tạo.



Cảnh đồng hướng dương ở vùng quê Tây Ban Nha này cho chúng ta ảo giác về vô cùng.

Ngoài đặc điểm làm rối trí chúng ta, các vô cùng còn là một công cụ không thể thiếu trong toán học. Nó đóng vai trò cực kì quan trọng trong nhiều khám phá toán học. Nó được dùng để xác định diện tích và thể tích trong cả hình học và giải tích, tính gần đúng giá trị số π , số e và các số vô tỉ khác, dùng trong lượng giác, chu kì nửa phân rã, các tập hợp vô hạn, giới hạn, dãy số, trong cân đối ...

Trong những phần khác của cuốn sách này, chúng tôi sẽ giới thiệu đến các bạn thêm nhiều đối tượng khác nữa của vô cùng như fractal, lí thuyết hỗn loạn, các số nguyên tố lớn, số siêu hạn và những tiến tới vô cùng khác.

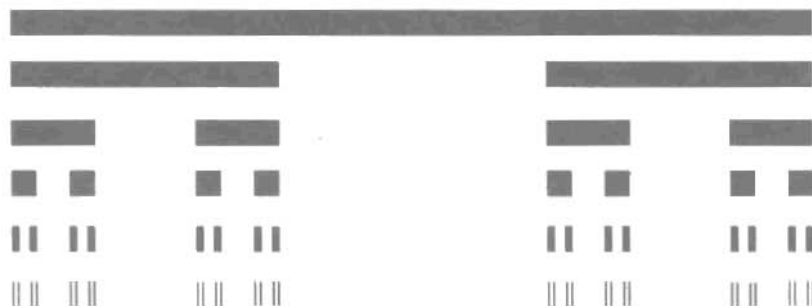
THẾ GIỚI FRACTAL

Tôi đặt ra từ "fractal" từ tính từ La-tinh "fractus".

Động từ La-tinh tương ứng của nó "fragere" có nghĩa là "làm vỡ": tạo ra những mảnh vỡ không theo quy luật. ... thật là phù hợp với yêu cầu của chúng ta! Ngoài nghĩa "bị vỡ", "fractus" còn có nghĩa là "không theo quy luật", cả hai nghĩa này đều có trong từ "mảnh vỡ".

—Benoit Mandelbrot

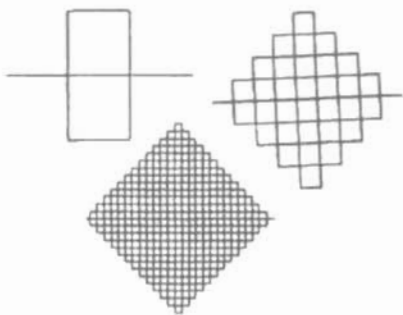
Fractal là những vật thể rất đẹp, bao gồm vô số các hình. Nhà toán học người Ý Ernesto Cesaro (1859 - 1906) đã viết về fractal hình học đường bông tuyết Koch như sau: "Điều gây kinh ngạc cho tôi hơn cả là bất kì phần nào của đường cong này đều giống với hình dáng tổng thể của nó. Nếu cố gắng nhìn bao quát hết đường cong, chúng ta nhận ra rằng mỗi tam giác nhỏ trong cấu trúc của nó đều là bản thu nhỏ của toàn bộ đường cong. Và rồi đến lượt chúng lại chứa



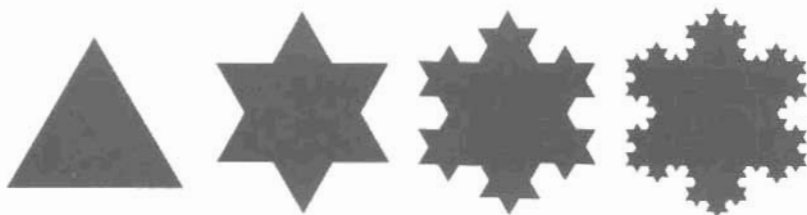
Năm 1983, Cantor đã xây dựng fractal này, nó được gọi là tập hợp Cantor. Bắt đầu với đoạn thẳng có chiều dài đơn vị trên đường thẳng các số thực, ở bước 1 ông bỏ đi đoạn phân ba nằm giữa. Bước 2, đối với mỗi đoạn trong hai đoạn còn lại, ông lại bỏ đi đoạn phân ba ở giữa. Lặp lại mãi mãi quá trình này ta sẽ thu được một tập hợp gồm vô số các điểm, gọi là tập Cantor. Trên hình vẽ là các bước đầu để thu được tập Cantor.

các tam giác bé hơn - bản thu nhỏ của đường cong theo tỉ lệ nhỏ hơn và cứ như vậy mãi... Đặc điểm tự đồng dạng ở khắp nơi

này tuy đơn giản nhưng đã làm cho đường cong trở nên kỳ lạ như vậy. Nếu nó xuất hiện trong thực tế, chúng ta sẽ không thể phá hủy nó nếu không phá hủy toàn bộ đường cong bông tuyết cùng một lúc, bởi vì chỉ cần một phần fractal còn tồn tại, nó sẽ lại không ngừng phát



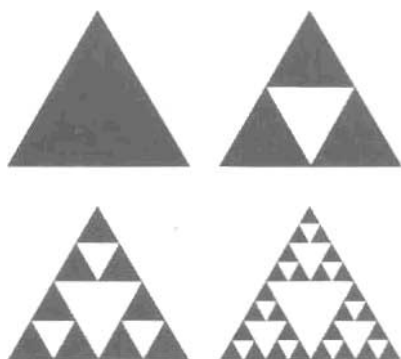
Ba bước đầu tiên của đường Peano. Đường Peano ra đời năm 1890 bằng cách lặp lại lần lượt quá trình nhún lên khối ban đầu.



Bốn bước đầu tiên của đường bông tuyết Koch. Đường cong này được sinh bởi một tam giác đều. Chia mỗi cạnh của nó ra làm ba đoạn đều nhau. Từ đoạn ở giữa đường ra phía ngoài một tam giác đều rồi xóa đoạn giữa này đi.

triển lên từ các tam giác nhỏ thành toàn bộ đường cong, cũng giống như sự phát triển của cuộc sống trong vũ trụ này vậy". Đó chính là bản chất của fractal. Nếu một phần nhỏ hãy còn tồn tại, thì nó sẽ lưu giữ tất cả các đặc điểm và nhờ đó phục hồi lại toàn bộ fractal. Vậy fractal là gì? Có lẽ các nhà toán học đã cố tình tránh đưa ra định nghĩa cụ thể để không hạn chế sự sáng tạo các fractal và những ý tưởng khám phá trong lĩnh vực rất mới mẻ này.

Cùng với fractal, các khái niệm như số chiều của fractal, lý thuyết lặp, ứng dụng rối, tự đồng dạng đã ra đời. Các ứng dụng của fractal trải khắp từ mưa axit tới zeolit (một loại khoáng chất), từ thiên văn học tới y dược, từ bản đồ học tới kinh tế, ...



Bốn bước đầu tiên của tam giác Sierpinski (sier-pin-ski). Bắt đầu bằng một tam giác đều. Chia nó ra thành 4 tam giác và xóa tam giác ở giữa đi như ở bước 2. Lặp lại quá trình trên đối với các tam giác đen còn lại mãi mãi. Fractal thu được có chu vi bằng vô cùng, nhưng diện tích bằng 0.

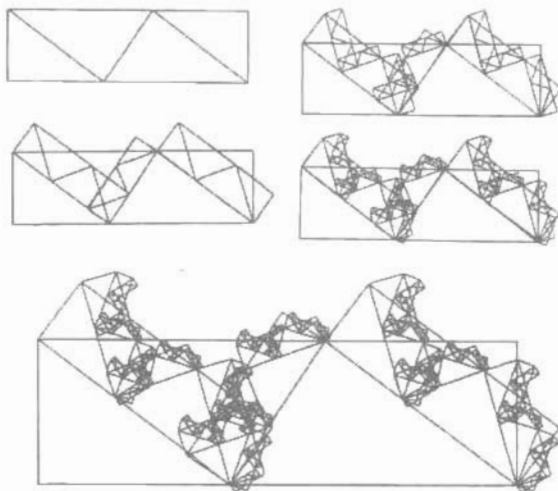
Một cách toán học, fractal là hình dạng bất nguồn từ một hình nào đó, ví dụ như một đoạn thẳng, một điểm, tam giác,... được biến đổi không ngừng bằng cách lặp đi lặp lại một quy tắc biến đổi mãi mãi. Quy tắc này có thể được diễn tả bằng công thức toán hay bằng lời. Các hình vẽ trên mô tả 4 bước đầu tạo ra các fractal mà con người biết đến sớm nhất.

Chúng ta có thể coi fractal như một đường cong liên tục phát triển. Để xem một fractal, bạn phải quan sát nó trong quá trình biến đổi. Nó không ngừng thay đổi. Ngày nay, chúng ta đã rất may mắn khi có các máy tính đủ khả năng tái tạo lại quá trình phát triển của các fractal để có thể quan sát được chúng. Cũng may mắn như vậy khi Benoit Mandelbrot, trong cùng tư tưởng với các nhà toán học trước đó, gần như đơn thương độc mã, đã nghiên cứu và mở rộng thành công các ý tưởng cũng như ứng dụng của fractal trong những năm từ 1951 đến 1975. Ông chính là người đã tạo ra từ “fractal”. Thật đáng kinh ngạc thay các nhà toán học dùng cảm thế kỉ XIX⁽¹⁾, những người đã dám nhìn thẳng vào những ý tưởng bị cho là

(1). Các nhà toán học Georg Cantor, Helge von Koch, Karl Weierstrass, Dubrois Reymond, Giuseppe Peano, Wacław Sierpinski, Felix Hausdorff, A.S. Besicovitch, (Hausdorff và Besicovitch nghiên cứu về số chiều của fractal), Gaston Julia, Pierre Fatou (Julia và Fatou nghiên cứu về lý thuyết lặp), Lewis Richardson (nghiên cứu về sự rối và tự đồng dạng) trong suốt những năm từ 1860 đến đầu thế kỉ XX đã khám phá ra nhiều ý tưởng về fractal - “những con quái vật”.

quái dị⁽¹⁾ và điên rồ nhất thời bấy giờ để thấy được hình dạng biến đổi tuyệt vời của các fractal như ngày nay.

Khi chúng ta nhìn hình minh họa hay ảnh của một fractal, chúng ta chỉ thấy nó ở tại một thời điểm, như thể nó bị đóng băng tại một bậc trong quá trình phát triển của mình. Về bản chất, chính ý nghĩa về sự phát triển (hay biến đổi) này là đặc điểm liên kết fractal với tự nhiên. Bởi liệu có thứ gì trong tự nhiên là không biến đổi? Ngay cả một hòn đá cũng luôn ở trong quá trình biến đổi nếu xét ở mức độ phân tử. Người ta có thể thiết kế fractal để mô phỏng đường như bất cứ hình dạng nào mà bạn có thể tưởng tượng ra. Không nhất thiết phải xác định fractal theo một quy tắc, mà có thể là một loạt các quy tắc và điều kiện. Bạn hãy chọn một vật thể đơn giản, nghĩ ra một số quy tắc nào đó và thử tạo ra fractal của riêng mình nhé!



Năm bước đầu tiên của một fractal hình học dựng bởi máy tính.

(1) "Những con quái vật" fractal này không được coi là đáng để tìm hiểu, cũng không được các nhà toán học bảo thủ thời đó chấp nhận. Người ta cho rằng fractal mâu thuẫn với toán học truyền thống, bởi một số fractal là những hàm liên tục nhưng lại không khả vi, một số có diện tích hữu hạn nhưng chu vi vô cùng, còn một số khác thì lại có thể hoàn toàn lấp đầy không gian.

CÂU CHUYỆN CỦA FRACTAL

"Dậy đi, Fractal! Ông phải dậy làm việc!" – Một giọng nói cất lên đánh thức Fractal đang ngủ.

"Đừng nữa mà, còn sớm lắm.", Fractal cầu xin. "Ta vừa mới sắp xếp lại các chiều của ta xong mà."



"Dậy đi, Fractal! Hãy rút đám mây mà ông mới tạo ra xuống đây", giọng nói cất lên đánh thức Fractal đang say ngủ.

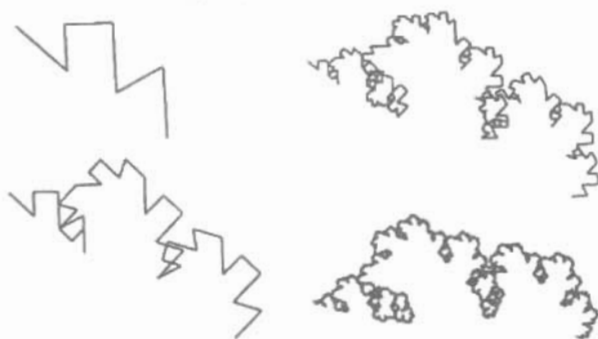
- Người ta đang cần ông ở Cục Khảo sát Địa hình đây, có một đường biên giới đang cần ông mô tả.
- Thế không cho ta ngủ nghĩ gì à?
- Ông đã nghĩ thoải mái nhiều thế kỉ nay rồi, giờ đến lúc phải dậy làm việc đi thôi.
- Làm việc, làm việc, làm việc! Sao họ không gọi cái ông hình vuông, hình tròn, hình đa giác hay là hình Euclid nào đấy đi?

Tại sao cứ phai là tại

Trước kia thì ông phàn nàn rằng không ai đã động gì đến ông cả, người ta chỉ gọi ông là quái vật. Bây giờ, người ta hiểu ông, cần ông, gọi đến ông thì ông lại muốn nghỉ ngơi. Cũng chỉ tại ông nổi tiếng quá đấy mà. – Giọng nói cứ lại.

- Nổi tiếng là một chuyện, còn chuyện mọi người không để cho ta ngủ ngơi lại là việc khác. Kể từ khi ông Mandelbrot đặt tên rồi giới thiệu ta với thế giới đến giờ, họ không để cho ta yên thân lấy một lát.” Fractal đáp. “Các nhà toán học đã vất vả đấu tranh để tìm hiểu ta. Ta chắc rằng số chiều của ta đã đánh bại họ trong một thời gian. Những con người tội nghiệp thế kỉ XIX đó không có cái máy tính nào trợ giúp họ cả. Thời đó hầu hết họ đều không chấp nhận ta, vì ta không phù hợp hoặc là không tuân theo những quy tắc toán học của họ. Nhưng mà vẫn có một số nhà toán học ngoan cường. Và giờ ta ở đây, được thiết kế và sử dụng trong bao nhiêu lĩnh vực. Máy tính quả là rất lợi ích. Vừa mới đây trên màn hình là một mảnh hay phần khởi đầu của một fractal, lúc sau trên đó đã nảy lên những mảnh phát sinh của nó, liên tục phát triển mãi. Ngày nay, người ta dùng ta trong hầu như tất cả các lĩnh vực của cuộc sống, ta có thể mô tả rễ cây, rau củ, cây cối, bóng ngó, đám mây, phong cảnh... Ta phải nói rằng thật là thú vị khi mở rộng những khả năng của mình. Ta thích mô tả những đường biên bởi nhiều người vẫn chưa hiểu vì sao ta có thể bao quanh một vùng có diện tích hữu hạn nhưng chu vi của ta thì lại vô cùng. Ta đang giúp cho việc mô hình hóa nhiều sự vật, hiện tượng của thế giới. Ví dụ như mô tả vấn đề dân số với đường Peano, những đường fractal dùng để tạo cảnh trong điện ảnh, fractal để mô tả thiên văn, khí tượng, kinh tế, sinh thái, vân vân, vân vân và vân vân. Ta quá bận rộn vì bị cuốn vào công việc đến nỗi mọi thứ đang bắt đầu trở nên lộn xộn, đặc biệt là từ khi họ trợn tu vào trong lí thuyết hỗn loạn.” Fractal nói, giọng nghe có vẻ rất mệt mỏi.

– Giọng nói lại vang lên: “Đừng phàn nàn kêu ca nữa! Lí thuyết hỗn loạn đã đem lại cho ông vài điểm khác lạ mới. Nếu không có lí thuyết hỗn loạn, ông sẽ mãi mãi chỉ lặp đi lặp lại một quy tắc và tạo ra một kiểu dáng cũ rích mà thôi, ít nhất thì khi một thông số đầu vào nào đó thay đổi, một cái gì đó hoàn toàn khác có thể sẽ được tạo ra”.



Các bước đầu của một fractal đám mây.

– Có lẽ là ông nói đúng. – Fractal thở dài buồn bã.

– Tất nhiên là ta đúng rồi. Ông hãy nghĩ xem thật nhàm chán biết bao khi mãi mãi chỉ một hình dáng cũ, ví như một hình vuông hay hình tròn tội nghiệp. – Giọng nói quả quyết.

– Ờ, nhưng ít nhất thì cũng không có tí bất ngờ nào về hình vuông hay hình tròn cả. – Fractal phản ứng lại.

– Chính xác. Cuộc sống đầy những sự ngạc nhiên, đó chính là lí do tại sao họ lại thường xuyên gọi ông đến vậy. Ông giống với cuộc sống hơn. – Giọng nói có vẻ như khen ngợi Fractal.

– Ý ông nói ta là con người. – Fractal hỏi lại.

– Ta không có ý đến mức vậy đâu. Hơn nữa tất cả cuộc sống cũng không phải là con người cơ mà. Hãy chỉ nói rằng ông rất khác thường và ông là phi Euclid! Thế rồi sau lời nhận xét ấy, giọng nói biến mất.

ĐI TÌM DIỆN TÍCH CỦA HÌNH BÔNG TUYẾT

Fractal xinh đẹp này được tạo ra năm 1904 bởi Helge von Koch. Để sinh một đường bông tuyết Koch, chúng ta bắt đầu

bằng một tam giác đều. Chia mỗi cạnh tam giác làm ba đoạn đều nhau. Xóa đoạn ở giữa mỗi cạnh đi và dựng ra phía ngoài tam giác một mũi nhọn tạo với đoạn bị xóa đủ một tam giác đều. Lặp lại mãi quá trình trên cho mỗi cạnh mới nhận được.

Hai tính chất tuyệt vời của fractal, mà lại có vẻ như mâu thuẫn là:

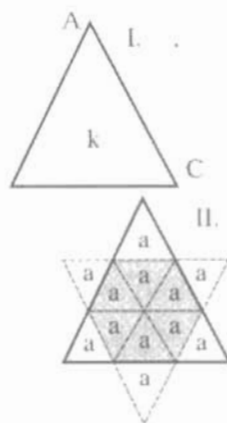
Diện tích bên trong đường bông tuyết bằng $\frac{8}{5}$ diện tích của tam giác ban đầu.

Chu vi của đường bông tuyết bằng vô cùng.

Dưới đây là một chứng minh không chính xác về diện tích bên trong đường bông tuyết.

I. Giả sử diện tích của tam giác đều ABC là k .

II. Chia $\triangle ABC$ thành 9 tam giác đều có diện tích a bằng nhau như hình vẽ. Suy ra $k = 9a$.

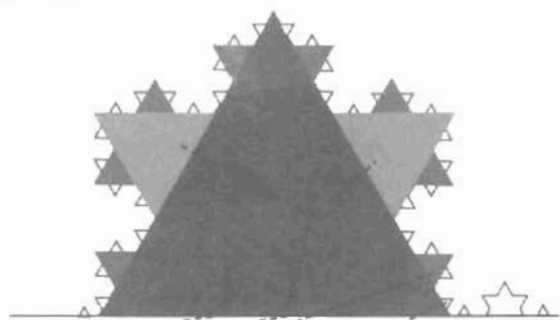


Chúng ta sẽ tính giới hạn diện tích một trong 6 mũi nhọn ban đầu của hình bông tuyết. Biết rằng diện tích của mũi nhọn lớn là a , bởi nó bằng một trong 9 tam giác trong $\triangle ABC$. Mỗi mũi nhọn tiếp theo sinh ra từ nó có diện tích là $\frac{a}{9}$, tương tự như tam giác ban đầu bị chia thành 9 tam giác nhỏ hơn. Thực chất là mỗi mũi nhọn bị chia thành 9 tam giác bằng nhau và có thêm hai tam giác mọc lên từ đó.

BƯỚC III: Chỉ ra công thức tính tổng diện tích các tam giác sinh ra từ mũi nhọn này.

BƯỚC IV: Cộng 6 diện tích vừa tìm được từ 6 mũi nhọn với diện tích phần còn lại của tam giác ban đầu, chúng ta có biểu thức IV.

BƯỚC IV: Được biến đổi thành **BƯỚC V**. Dãy trong ngoặc vuông là một cấp số nhân với công bội là $4/9$ và giá trị ban đầu là $2/9$. Vì thế, chúng ta có thể tính giới hạn của nó: $(2/9)/(1-(4/9)) = 2/5$.



$$\text{III. } \left[a + 2\left(\frac{a}{9}\right) + \left(\frac{a}{9 \cdot 9}\right)8 + \left(\frac{a}{9 \cdot 9 \cdot 9}\right)32 + \dots \right]$$

Bước này có
8 mũi nhọn

Bước này có
32 mũi nhọn

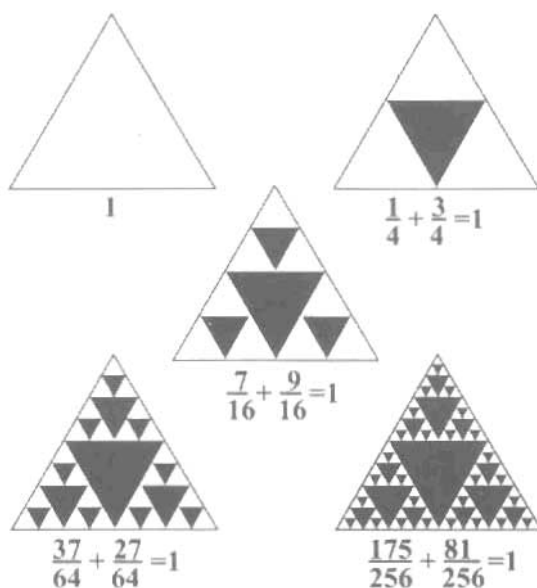
$$\text{IV. } \left[a + 2\left(\frac{a}{9}\right) + 2\left(\frac{a}{9 \cdot 9}\right)4 + 2\left(\frac{a}{9 \cdot 9 \cdot 9}\right)4^2 + 2\left(\frac{a}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}\right)4^3 + \dots \right] 6a + 6a$$

$$\text{V. } \left[1 + \left[\frac{2}{9} + \frac{2 \cdot 4}{9^2} + \frac{2 \cdot 4^2}{9^3} + \frac{2 \cdot 4^3}{9^4} + \dots + \frac{2 \cdot (4)^{n-2}}{9} + \dots \right] \right] 6a + 6a$$

BƯỚC VI. Thế $2/5$ vào giới hạn của dãy, chúng ta nhận được $[1+2/5]6a+6a = 75a/5$.

Bây giờ, chúng ta cần biểu diễn diện tích hình bông tuyết theo diện tích k của tam giác ban đầu. Vì $k=9a$ nên $a=k/9$. Thay biểu thức này vào $72a/5$ chúng ta nhận được $(72/5)(k/9)=(8/5)k$.

NHỮNG ĐƯỜNG CONG QUÁI VẬT



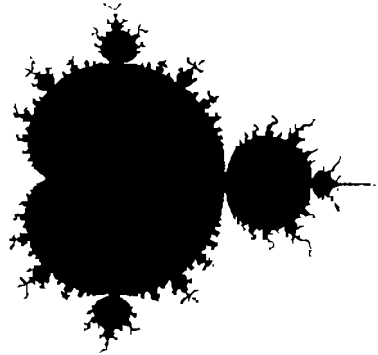
Các bước hình thành của tam giác Sierpinski. Giả sử diện tích của tam giác đều ban đầu là một đơn vị diện tích. Tổng diện tích của các tam giác đen và trắng lần lượt được chỉ ra trong 5 bước đầu tiên. Giả sử các tam giác màu đen là những vùng bị bỏ đi. Nhận xét rằng tổng diện tích của các tam giác trắng liên tục giảm, tức là diện tích vùng trắng dần đến 0. Vì vậy, diện tích của tam giác Sierpinski tiến tới 0, trong khi chu vi của nó tiến đến vô cùng.

Cho đến khi Benoit Mandelbrot tạo ra thuật ngữ “fractal” vào cuối những năm 1970, các đường cong này vẫn được nhắc đến như những con quái vật. Các nhà toán học bảo thủ thế kỷ XIX coi chúng là vô lí. Họ không chấp nhận và cũng không cho là chúng đáng để tìm hiểu bởi chúng mâu thuẫn với các khái niệm toán học đã có. Ví dụ, một vài đường trong số chúng là các hàm liên tục (hàm không có điểm ngắt quãng nào) nhưng không khả vi, một số có diện tích hữu hạn nhưng chu vi vô hạn, còn một số khác thì lại có thể lấp đầy không gian. Tam giác Sierpinski⁽¹⁾ (còn được gọi là thảm Sierpinski) có chu vi vô hạn và diện tích hữu hạn. Hình vẽ bên trên minh họa vì sao diện tích của tam giác Sierpinski lại bằng 0.

(1). Được đặt theo tên của nhà toán học Waclaw Sierpinski (1882 – 1920).

CUỘC TRANH CÃI VỀ TẬP HỢP MANDELBROT

Vào thế kỉ thứ XVII, các nhà toán học lỗi lạc như Galileo, Pascal, Torricelli, Descartes, Fermat, Wren, Wallis, Huygens, Johann Bernoulli, Leibniz, Newton mới để ý và khám phá các tính chất của đường xiclôit. Ngay khi xuất hiện những phát minh về đường xiclôit, thì đồng thời cũng xuất hiện các tranh cãi về việc ai là người đầu tiên tìm ra nó cùng những buộc tội về hành động ăn cắp ý tưởng và đánh giá thấp công trình của người khác. Đó chính là lí do khiến đường xiclôit được người ta đặt cho cái tên là *quả táo bất hòa* hay *nàng Helen của hình học*⁽¹⁾. Các nhà toán học thế kỉ XX thì dường như lại có một Helen mới của hình học, đó là tập hợp Mandelbrot.



Ai là người đầu tiên tìm ra tập hợp Mandelbrot⁽²⁾? Đây là câu hỏi rất nóng bỏng giữa các nhà toán học ngày nay. Các ứng cử viên là:

— Benoit Mandelbrot được nhắc đến như là người tiên phong nhờ công trình của ông về fractal vào những năm 1970. Các công trình của Mandelbrot chỉ ra các biến tướng của tập Mandelbrot được

(1). Xuất phát từ câu chuyện về cuộc chiến thành Troy trong thần thoại Hy Lạp. Helen là con gái của thần Diot và Leda, bị Paris bắt cóc. Quân đội Hy Lạp đã giong thuyền tới thành Troy để giành lại nàng, gây nên cuộc chiến thành Troy nổi tiếng.

(2) Hình trên là dạng fractal quen thuộc nhất của tập hợp mandelbrot. Tập Mandelbrot là một bầu vật trong số những fractal, nó chứa vô số các fractal. Tập hợp này được sinh bởi một phương trình lặp, ví dụ z^2+c , trong đó z và c là các số phức, c nhận các giá trị giới hạn trong một đường hình xoắn ốc.

xuất bản vào ngày 26 tháng 12 năm 1980 trên tạp chí khoa học *Annals*, Viện hàn lâm Khoa học New York. Công trình thực sự của ông về tập Mandelbrot xuất bản vào năm 1982.

— John H. Hubbard tại trường Đại học Cornell và Adrien Douady tại trường Đại học Paris đã đặt tên cho tập Mandelbrot vào những năm 1980 khi chứng minh các khu vực khác nhau của nó. Năm 1979, Hubbard nói ông gặp gỡ với Mandelbrot và chỉ cho Mandelbrot xem làm cách nào để lập trình cho máy tính vẽ các hàm lặp. Hubbard thừa nhận rằng Mandelbrot sau đó đã phát triển một phương pháp mạnh hơn để tạo ra các hình ảnh của tập Mandelbrot.

— Robert Brooks và J. Peter Mueliski tuyên bố rằng họ đã phát hiện và mô tả tập hợp trước cả Mandelbrot một cách độc lập. Tuy nhiên, công trình của họ chưa được xuất bản cho đến năm 1981.

— Pierre Fatou đã trình bày các tính chất khác thường của các tập Julia vào khoảng năm 1906, còn công trình của Gaston Julia về các tập Julia ra đời còn sớm hơn cả của Fatou. (Các tập Julia được coi là điểm khởi đầu của tập Mandelbrot.)

Ai mới là người đầu tiên tìm ra tập Mandelbrot đây? Có lẽ là tất cả những nhà toán học trên.

*Có một sức tưởng tượng lạ
thường ngay cả trong toán học.*
—Voltaire

THẾ GIỚI TOÁN TRONG VĂN CHƯƠNG

Siêu lập phương bốn chiều có phải là điều tưởng tượng trong toán học không? Liệu có phải không gian “thực sự” duy nhất là không gian 3 chiều hay không? Chúng ta biết rằng trong hình học Euclid, điểm là khái niệm dùng để chỉ vị trí, nó không thể nhìn thấy được bởi vì nó có số chiều là 0. Thế nhưng, chúng ta lại nhìn được một đoạn thẳng tạo bởi các điểm không nhìn thấy này. Còn mặt phẳng thì sao? Nó có hai chiều và độ dày chỉ bằng một điểm. Mặt phẳng là gì trong thế giới của chúng ta? Hãy xem giả mặt cầu của hình học hyperbolic, đường tiệm cận của các hàm mũ, tính vô tận của các số siêu hạn. Hãy xem các số ảo, mặt phẳng số phức, fractal và thậm chí là một đường tròn. *Người ta phải tự hỏi rằng liệu chúng có thể tồn tại trong thế giới chúng ta hay không?* Mặc dù không có nghi ngờ gì về sự tồn tại của chúng trong các hệ thống toán học tương ứng, chúng vẫn chỉ là mô hình trong thế giới của chúng ta.

Rất nhiều văn nghệ sĩ và các nhà toán học đã vận dụng các khái niệm trên để miêu tả thế giới mà từ đó chúng ra đời. Các nhà văn như Dante, Italo Calvino, Jorge Luis Borges và Madeleine L'Engle đã vận dụng toán học vào các sáng tác của mình.

Vào thế kỉ thứ XIX, nhà toán học Henri Poincaré đã tạo ra mô hình của thế giới hyperbolic trong hình tròn. Ở đó, đối với tất cả mọi thứ và các cư dân, thế giới tròn của chúng là vô hạn. Bất kể các sinh vật hay tạo vật này là gì, mọi thứ sẽ thu nhỏ lại khi chúng đi ra xa tâm hình tròn và to lên nếu tiến lại gần tâm. Điều này có nghĩa là chúng sẽ không bao giờ tiến đến được biên của hình tròn. Do đó, đối với chúng thế giới là vô cùng.



Bức tranh Giới hạn vòng tròn IV (Thiên đường và địa ngục) của M.C. Escher miêu tả một thế giới gợi cho ta như đến thế giới hyperbolic của Henri Poincaré.

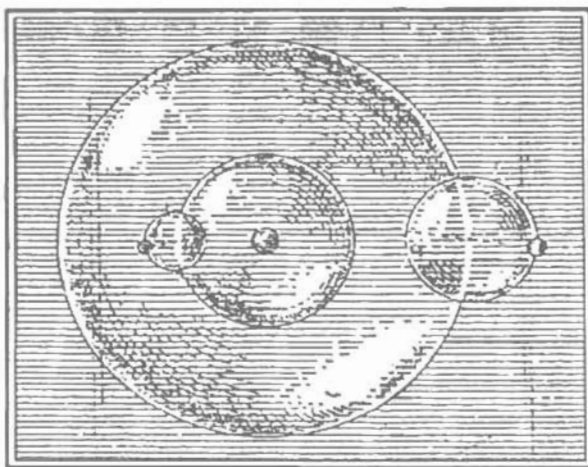
Năm 1958, họa sĩ M.C. Escher đã làm một loạt tranh khắc gỗ có tên là *Giới hạn vòng tròn I, II, III, IV*, chúng cho chúng ta hình dung về những gì mà Poincaré đã mô tả. Escher miêu tả thế giới này là vẻ đẹp của thế giới vô cùng trong mặt phẳng khép kín⁽¹⁾.

Nhà văn Madeleine L'Engle trong tiểu thuyết *A Wrinkle In Time* (Nếp gấp thời gian) của mình lại sử dụng siêu lập phương và không gian đa chiều như là phương tiện cho phép các nhân vật chu du ngoài không gian. "... với chiều thứ năm, bạn hãy nhân đôi chiều thứ tư rồi thêm vào bốn chiều kia. Nhờ đó, bạn sẽ có thể di chuyển trong không gian mà không cần phải đi xa... Nói cách khác, đường thẳng không phải là khoảng ngắn nhất giữa hai điểm."

(1). M.C. Escher, Harry N. Abrams, Inc., New York, 1983.

Italo Calvino thì miêu tả thế giới trong một điểm trong truyện ngắn *Thế giới trong một điểm* của mình. Sáng tạo tài tình của ông khiến người ta tin rằng một thế giới không chiều như vậy thực sự tồn tại. “Tất nhiên, chúng ta đều ở đó, – *Qfwfg* già nói, – chúng ta còn có thể ở đâu được nữa? Lúc đó sẽ không ai biết rằng còn có không gian. Cả thời gian cũng vậy: chúng ta cần thời gian để làm gì, để nhét mình chặt như nêm trong đó ư? Tôi nói chặt như nêm, sử dụng một hình ảnh văn học: trên thực tế, thậm chí còn không có cả chỗ cho chúng ta nhét vào nữa. Mỗi điểm của mỗi chúng ta trùng với mỗi điểm của những người khác tại một điểm duy nhất, đó chính là nơi mà tất cả chúng ta đã ở.”

Nhìn lại thời kì trung cổ với cuốn *The Divine Comedy* (Thần khúc) của Dante, chúng ta nhận thấy các vật thể của hình học Euclid chính là căn cứ cho địa ngục của Dante. Hình nón được dùng để giam giữ con người ở các tầng địa ngục. Trong đó, Dante dùng chín mặt cắt hình tròn đóng vai trò như những cơ sở phân nhóm tội ác của con người.



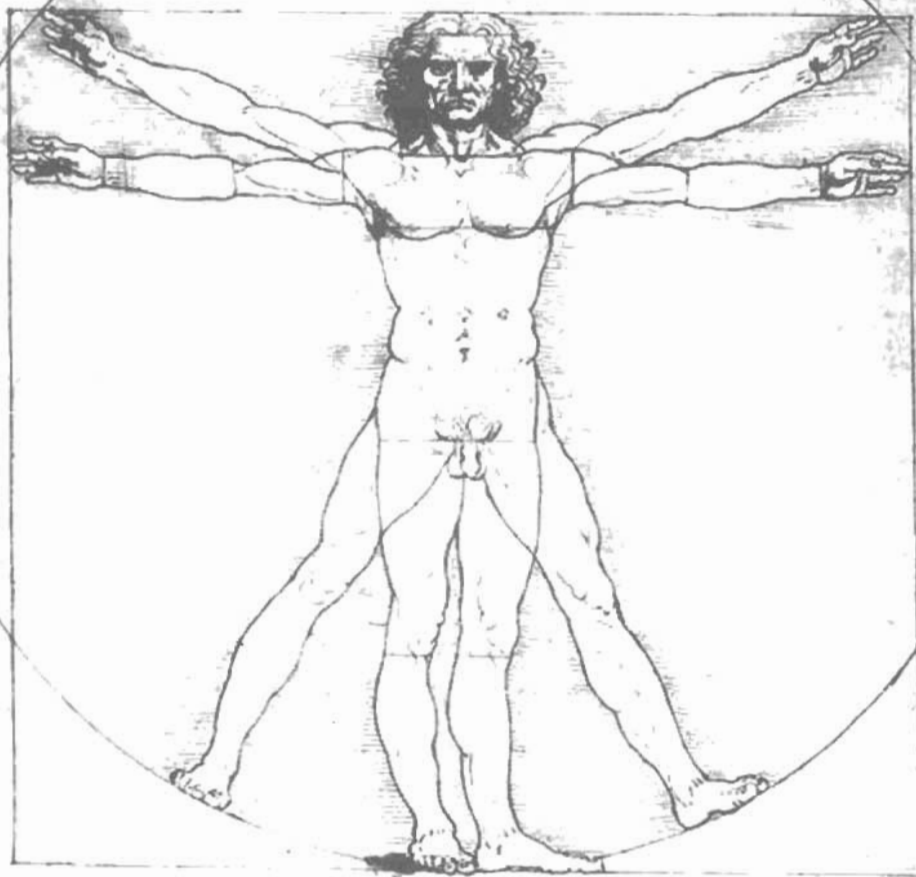
Hình vẽ trích từ cuốn *Thần khúc* của Dante. Mặt cắt của các hình cầu đồng tâm, trong đó Trái Đất nằm trong mặt cầu (chứa đường ngoạ luân) của Mặt Trăng, tất cả chúng được bao quanh bởi mặt cầu (chứa đường ngoạ luân) của sao Thủy.

Trong những năm 1900, vô cùng đã được kể đến trong cuốn *The Book of Sand* (Sách về Cát) của Jorge Luis Borges. Nhân vật chính trong truyện có được một quyển sách thần kì. “Số trang của quyển sách này không lớn hơn, cũng không nhỏ hơn vô cùng. Không trang nào là đầu, cũng không trang nào là cuối cả. Tôi không biết sao chúng lại được đánh số tùy tiện như vậy. Có lẽ để ám chỉ rằng các phần tư của một dây vô hạn có thể là bất kì số nào”. Quyển sách này đã ảnh hưởng tiêu cực tới cuộc sống và cách nhìn về mọi vật của nhân vật này cho đến khi anh nhận ra rằng phải tìm cách để bác bỏ nó. “Tôi nghĩ về lửa, nhưng tôi sợ rằng để thiêu một cuốn sách dày vô cùng có thể sẽ phải đốt nó mãi mãi và hành tinh của chúng ta sẽ chết ngạt trong biển khói”. Bạn sẽ xử lí tình huống này như thế nào đây?

Các nhà khoa học viễn tưởng cũng sử dụng các ý tưởng toán học để tạo nên thế giới trong sách của mình. Ví như trong tập *The Next Generation* (Thế hệ mới) của bộ phim *Star Trek* (Trạm vũ trụ), con tàu vũ trụ bị kéo bởi một lực vô hình về phía lỗ đen. Chỉ khi quang cảnh trên màn hình tàu thay đổi các thủy thủ phi hành đoàn mới nhận ra lực vô hình là một thế giới hai chiều của các sinh vật tí hon.

Các nhà toán học với đầy ắp các ý tưởng của mình đã khuấy động trí tưởng tượng của chúng ta, khiến chúng ta phải tự hỏi: Liệu chúng có thật hay không? Với họ, chúng có thật. Họ quen thuộc với thế giới của các ý tưởng – có lẽ không thật với chúng ta, nhưng dù gì cũng là thật với chúng.

Handwritten text in a medieval script, likely Latin, located at the top of the page. The text is arranged in several lines, with some words written in a larger, more decorative script. The text appears to be a preface or introduction to the main content of the page.



Handwritten text in a medieval script, likely Latin, located below the drawing. The text is arranged in several lines, with some words written in a larger, more decorative script. The text appears to be a continuation of the preface or introduction to the main content of the page.

Handwritten text in a medieval script, likely Latin, located at the bottom of the page. The text is arranged in several lines, with some words written in a larger, more decorative script. The text appears to be a continuation of the preface or introduction to the main content of the page.

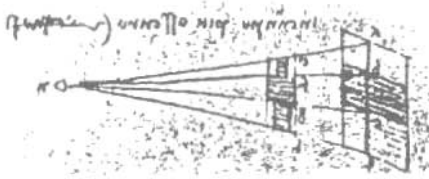
TOÁN HỌC VÀ NGHỆ THUẬT

NGHỆ THUẬT, CHIỀU KHÔNG GIAN THỨ 4
VÀ LÁT MẶT PHẶNG KHÔNG LẬP
TOÁN HỌC VÀ ĐIỀU KHẮC
TOÁN HỌC, THIẾT KẾ VÀ NGHỆ THUẬT
TOÁN HỌC VÀ NGHỆ THUẬT CỦA M.C.ESCHER
HÌNH HỌC XẠ ẢNH VÀ NGHỆ THUẬT
PHA TRộn TOÁN HỌC VÀ NGHỆ THUẬT
CỦA ABRECHT DÜRER
NGHỆ THUẬT MÁY TÍNH

Điều đẹp nhất mà con người có thể cảm nhận được đó chính là bí ẩn. Nó là nguồn gốc của nghệ thuật và khoa học thực thụ.

—Albert Einstein

Mối liên hệ giữa toán học và nghệ thuật dường như còn rất xa lạ đối với nhiều người. Nhưng những thế giới hình học, đại số, không gian đa chiều hay máy tính đã cung cấp cho các nghệ sĩ công cụ để khám phá, nâng cao, đơn giản hóa và hoàn thiện công việc của mình. Trải qua nhiều thế kỷ, các nghệ sĩ và tác phẩm của họ đã chịu ảnh hưởng của các kiến thức và công dụng của toán học. Nhà điêu khắc Hy Lạp cổ đại Phidias sử dụng tỉ lệ vàng trong rất nhiều tác phẩm của mình. Albrecht Dürer thì mượn các khái niệm của hình học xạ ảnh để tạo ra các cấu trúc hình học có vai trò quan trọng trong kĩ thuật in ấn các chữ La Mã. Trong nghệ thuật Hồi giáo, vì các học



Một bức phác thảo trong sổ ghi chép của Leonardo da Vinci mô tả các đường thẳng hội tụ đến điểm ảo.

thuyết tôn giáo cấm sử dụng vật thể động, nên các nhà nghệ thuật đã dựa vào toán học như là một lối thoát để sáng tạo – nguyên nhân đưa họ đến các tranh biến hình phong phú. Leonardo da Vinci

cảm nhận: “... không có nhu cầu nào của con người có thể gọi là khoa học, trừ phi nó theo đuổi con đường của mình thông qua các phát biểu và biểu diễn toán học”. Các tác phẩm điêu khắc và các bức họa của Leonardo thể hiện sự nghiền ngẫm về hình chữ nhật vàng, tỉ lệ vàng và hình học xạ ảnh, trong khi các thiết kế kiến trúc lại thể hiện kiến thức của ông về cấu trúc hình học và các loại đối xứng. Trong phần này chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một vài ví dụ về mối liên hệ giữa toán học và nghệ thuật.

NGHỆ THUẬT, CHIỀU KHÔNG GIAN THỨ TƯ VÀ LÁT MẶT PHẪNG KHÔNG LẬP

*Toán học đưa chúng ta
vào thế giới của các
quy luật tuyệt đối, không
chỉ thế giới hiện thực
mà mọi thế giới có thể
có đều phải tuân
theo chúng.*

—*Albert Einstein*

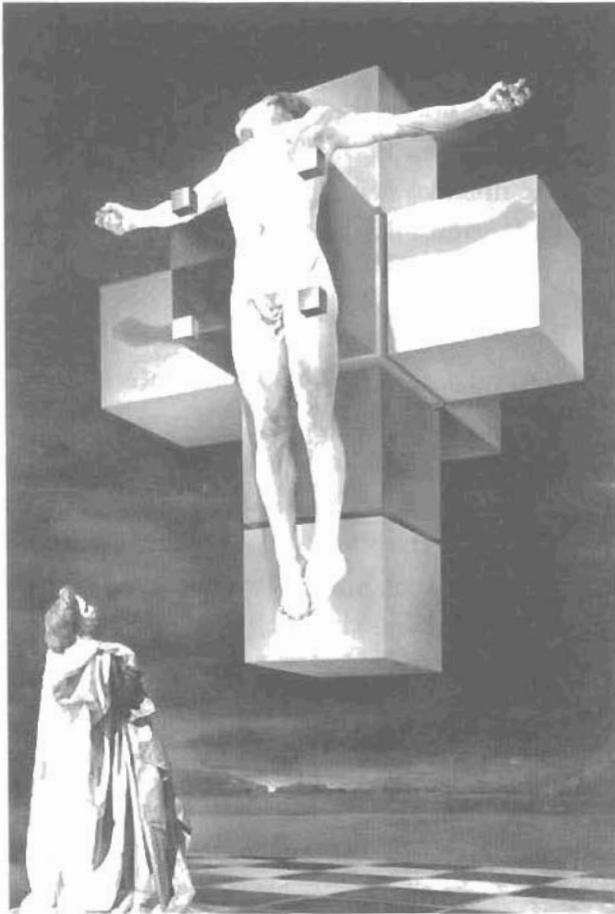
Trên bức tranh sơn dầu, người họa sĩ buộc phải thể hiện những cảm giác của không gian nhiều chiều trên không gian hai chiều. Các họa sĩ tượng hình thời kì đế chế La Mã Byzantine đã miêu tả cảnh hành lễ tôn giáo ba chiều trên một không gian hai chiều, đem lại cho khung cảnh đáng vẽ hết sức huyền bí. Trong suốt thời kì Phục hưng, các họa sĩ đã sử dụng hình học xạ ảnh để biến bức tranh sơn dầu phẳng thành thế giới ba chiều nhằm chuyển tải cảm xúc của mình. Ngày nay, toán học đóng vai trò tích cực trong việc khơi gợi niềm cảm hứng và cung cấp những công cụ cho quá trình sáng tạo cũng như truyền đạt các ý tưởng của nghệ sĩ. Họ dùng toán học để thoát li đến những không gian nhiều chiều hơn. Siêu lập phương⁽¹⁾ là một ví dụ, nó đã đưa các nghệ sĩ tiến thêm một bước vào chiều không gian thứ tư. Vào đầu những năm 1900 kiến trúc sư Claude Bragdon đã phỏng lại khối siêu lập phương trong các tác phẩm bốn chiều của mình⁽²⁾. Cũng bị cuốn hút bởi siêu lập phương, Salvador Dali⁽³⁾ lại tìm hiểu toán học để tạo ra mô hình

(1). Biểu diễn bốn chiều của một hình lập phương.

(2). Cùng lúc đó Bragdon sử dụng các đường ma phương trong trang trí kiến trúc và thiết kế đồ họa của sách báo và vải vóc.

(3). Dali liên hệ với khoa Toán trường Đại học Brown, Mỹ để biết thêm thông tin chi tiết.

siêu lập phương mở làm điểm nhấn cho bức họa có tên *The Crucifixion*⁽¹⁾ (1954).



Siêu lập phương mở là nguồn cảm hứng cho tác phẩm *The Crucifixion* (1954) của Salvador Dalí. Viện Bảo tàng Nghệ thuật Quốc gia, Quà tặng từ bộ sưu tập Chester Dale, 1955. (555)

(1). Bức họa Chúa Jesus bị đóng đinh trên cây thánh giá hình siêu lập phương mở bốn chiều.

Ngày nay, rất nhiều nghệ sĩ theo đuổi con đường nghệ thuật gắn liền với toán học, đặc biệt là toán học chủ đề lát mặt phẳng không lập, không gian đa chiều và đồ họa vi tính. Thiết kế đồ họa vi tính của siêu lập phương tạo bởi nhà toán học Thomas Banchoff và nhà khoa học máy tính Charles Strauss ở trường Đại học Brown đã cho ta hình dung về một siêu lập phương chuyển động vào và ra khỏi không gian ba chiều. Rất nhiều hình ảnh khác nhau về siêu lập phương trong thế giới ba chiều cũng được ghi lại trên màn hình máy tính bằng cách đó.

Nhờ làm quen với các lĩnh vực toán học, họa sĩ Tony Robbin đã vẽ siêu lập phương trên tranh sơn dầu 3D (ba chiều), trong đó bức tranh sơn dầu đóng vai trò như là một mặt cắt của siêu lập phương. Lát mặt phẳng không lập, lát mặt phẳng Pentose, hình học giả tinh thể và đối xứng 5 lần⁽¹⁾ đã giúp ông sáng tạo ra các cấu trúc tuyệt vời, biến đổi tùy theo góc nhìn của người xem. Từ phía này ta thấy một dãy các tam giác, còn từ phía khác ta lại thấy những ngôi sao năm cánh kết lại với nhau. Sự kết hợp giữa lát mặt phẳng không lập ở cả dạng hai chiều và ba chiều đan quện với nhau thành một loại đối xứng khác thường sẽ cho chúng ta một hình ảnh trông gần như là màu thuận.

(1) Lát mặt phẳng không lập là lát mặt phẳng bằng các viên gạch hoặc các hình có những kiểu dáng không theo hoa văn nào cả.

Đoạn xoay n lần: Nếu một hình không thay đổi khi quay nó một góc $360^\circ/n$ thì nó được gọi là đối xứng n lần. Vì vậy, hình là đối xứng 5 lần nếu nó giữ nguyên khi bị quay một góc 72° .

Giả tinh thể là trạng thái mới được tìm ra của chất rắn. Chất rắn được cho là tồn tại chỉ ở hai trạng thái: vô định hình và tinh thể. Trong trạng thái vô định hình các nguyên tử (hoặc phân tử) sắp xếp một cách ngẫu nhiên, còn ở trạng thái tinh thể chúng sắp xếp tuần hoàn theo từng đơn vị cấu trúc. Phát hiện về giả tinh thể đã cho thấy một trạng thái mới, trong đó các đơn vị sắp xếp không tuần hoàn với một sự đối xứng lạ thường, ví dụ như đối xứng 5 lần - kiểu đối xứng không tồn tại trong chất vô định hình và tinh thể.

TOÁN HỌC VÀ ĐIỀU KHẮC

Chiều, không gian, trọng tâm, đối xứng, các đối tượng hình học, tập hợp... là những khái niệm toán học cần đến khi một nhà điêu khắc sáng tạo nghệ thuật, trong đó không gian đóng vai trò đặc biệt đối với một tác phẩm điêu khắc. Một số tác phẩm chiếm chỗ trong không gian giống như chúng ta và tất cả các sinh vật khác. Với chúng, trọng tâm⁽¹⁾ là điểm nằm bên trong tác phẩm. Chúng là những vật thể đặt trên mặt đất và chiếm chỗ trong không gian theo cách mà chúng ta cảm thấy dễ nhìn và thoải mái nhất. Ví dụ như bức tượng *David* của Michelangelo, *Discobolus* (Lực sĩ ném đĩa) của nghệ nhân Hy Lạp cổ đại Myron, *St. Francis on Horseback*



Bức tượng *The Discobolus* (khung năm 450 tr.CN) của Myron, đúc bằng đồng, miêu tả một tư thế trong quá trình chuẩn bị ném đĩa.

(Thánh Francis trên lưng ngựa) của Beniamino Bufano, tất cả chúng đều có trọng tâm nằm bên trong tượng. Một vài tác phẩm điêu khắc nghệ thuật hiện đại thì lại đùa giỡn với không gian ba chiều theo cách của riêng chúng. Chúng sử dụng không gian như một phần không thể thiếu của tác phẩm. Vì thế, trọng tâm có thể là một điểm nằm ở không gian bên ngoài khối vật chất của tác phẩm như *Red Cube* (Lập phương đỏ) của Isamu Noguchi, *Eclipse* (Thiên thực) của Charles Perry, hay như *Vaillancourt*

(1). Trọng tâm là điểm mà tại đó một vật thể cân bằng. Ví dụ trọng tâm của tam giác là giao của ba đường trung tuyến.

Fountain (Đài phun nước *Vaillancourt*) của Louis Vaillancourt. Số tác phẩm còn lại phụ thuộc vào hiệu ứng qua lại của chúng với không gian. Với loạt tác phẩm này không gian bao quanh chúng (tập hợp bù của tập các điểm trong tác phẩm) cũng quan trọng như chính bản thân chúng vậy. Chúng ta hãy cùng xem tác phẩm *Zinc Zinc Plain* của Carl Andre. Nó được đặt trong một căn phòng trống, không có bất kì tác phẩm hay đồ vật nào xung quanh. Giá đỡ của nó là một hình vuông lớn xếp bởi 36 hình vuông nhỏ, đặt trên mặt sàn. Căn phòng chính là không gian bao quanh và Carl Andre miêu tả tác phẩm của mình như là một “lát cắt của không gian”⁽¹⁾. Một số tác phẩm dường như còn thách thức cả trọng lực, như các mẫu lắp ghép của Alexander Calder với sự cân bằng và đối xứng hết sức tinh tế, *Red Cube* của Isamu Noguchi thăng bằng một cách lạ kì trên các trục của nó. Thậm chí có cả những tác phẩm sử dụng trái đất như là một phần tất yếu trong nghệ thuật nhằm thể hiện ý đồ của tác giả như *The Running Fence*⁽²⁾ của Cristo, *Secant* (Đường cát tuyến) của Carl Andre và các hình thù bí ẩn trên cánh đồng lúa mù nước Anh.



Tác phẩm Đài phun nước của San Francisco có trọng tâm là một điểm nằm ở không gian phía ngoài.

(1). Nghệ thuật và Vật lý, Leonard Shlain, William Morrow & Co. NY, 1981.

(2). Tác phẩm là một hàng rào trắng cao 5,5 m, dài 40 km được dựng trên mặt đất, kéo dài từ East-West đến Freeway 101, phía bắc San Francisco, hoàn thành vào 10/09/1976

Thông thường, bản chất vật lí của các tác phẩm thuộc về ý niệm đòi hỏi phải có hiểu biết và các kiến thức toán học thì mới có thể hoàn thành công việc. Leonardo da Vinci đã phân tích một cách toán học hầu hết các sáng tác của mình trước khi bắt tay vào làm và nếu M.C.Escher không xem xét kĩ lưỡng yếu tố toán học trong các ý tưởng về biến hình và ảnh ảo, thì các tác phẩm của ông sẽ không thể biến đổi tự nhiên đến vậy. Ngày nay, có rất nhiều nhà điêu khắc tìm tòi toán học để mở rộng nghệ thuật của mình. Tony Robbin dùng các nghiên cứu về hình học giả tinh thể, hình học chiều thứ tư và khoa học máy tính để phát triển nghệ thuật. Trong bức điêu khắc to lớn *Easter Egg*



Bức phác họa của Leonardo cho thấy phân tích của ông về bộ xương con người.

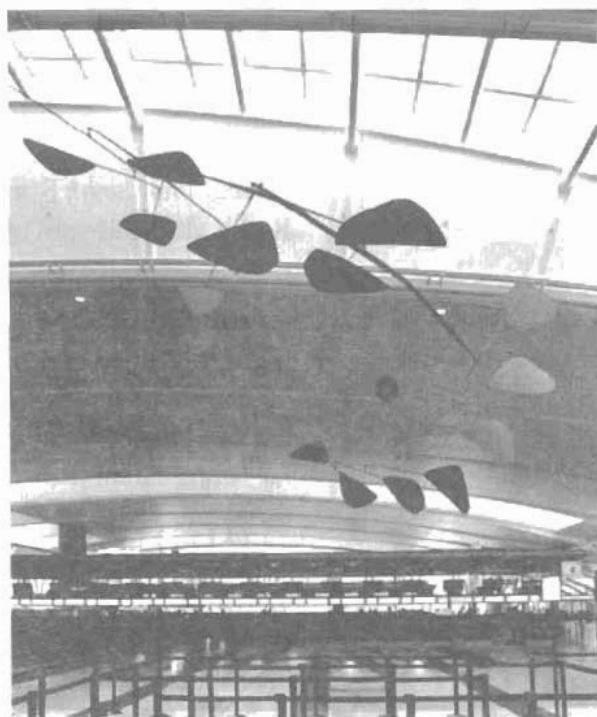


Tác phẩm *Continuum* của Charles Perry. Viện bảo tàng Khí quyển và Không gian Hoa Kỳ, Washington, DC.

(Trương Phục sinh), Ronald Dale Resch đã phải vận dụng hết cảm quan, tài khéo léo, toán học, máy tính và cả đôi bàn tay của mình để hoàn thành tác phẩm. Còn nhà toán học - nghệ sĩ Helaman R.P. Ferguson lại dùng điêu khắc truyền thống, máy tính và các phương trình toán để tạo ra *Wide Sphere* (Quả cầu lớn) và *Klein Bottle with Cross-cap & Vector Field* (Bình Klein với dải Möbius và trường vector). Vì thế, sẽ không ngạc nhiên khi chúng ta thấy

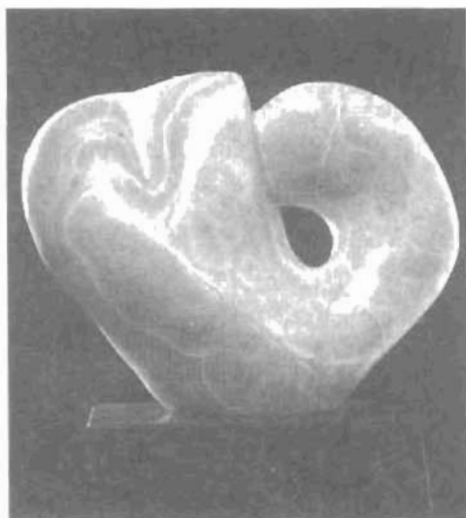
những mô hình toán học cũng đồng thời là các mô hình nghệ thuật, trong số đó có hình lập phương, đa lập phương, hình cầu, xuyên, nút ba lá, dải Möbius, đa diện, bán cầu, các nút, hình vuông, tròn, tam giác, hình chóp, lăng trụ,... Các đối tượng toán trong hình học Euclid và tôpô thì đóng vai trò quan trọng trong nghệ thuật điêu khắc của các nghệ thuật gia như Isamu Noguchi, David Smith, Henry Moore, Sol LeWitt.

Không cần tới các bức điêu khắc, toán học vẫn tồn tại như nó vốn có. Ngược lại, tác phẩm cũng có thể được suy tưởng và tạo nên mà không cần đến tư duy toán học. Tuy nhiên, toán học vẫn luôn tồn tại trong nghệ thuật, giống như nó tồn tại trong tự nhiên vậy.



Một mẫu lắp ghép Alexander Calder. Tòa nhà phiu động
Phòng triển lãm nghệ thuật Hoxi kỳ, Washington D.C.

ĐƯA TOÁN HỌC VÀO "ĐÁ"



Eine Kleine Rock Musik III.

Ed Bernik chụp. Trích từ *Helaman Ferguson: Toán học trong đá và đồng* của Claire Ferguson. Nhóm sáng tác Meridian, bản quyền năm 1994.

Nút ba lá, xuyên, hình cầu, vectơ, dòng chảy, chuyển động, đó là những yếu tố toán học cổ hữu trong các tác phẩm điêu khắc của Helaman Ferguson.

Chúng ta vẫn thường nghe nhắc đến việc các nghệ sĩ dùng toán học để sáng tạo nghệ thuật. Một trong số đó, nhà toán học - nghệ sĩ Helaman R.P. Ferguson, đã chuyển tải vẻ đẹp của toán vào

trong các tác phẩm phi thường của mình. Ông nói: "Toán vừa là một hình thức nghệ thuật, vừa là một khoa học... Tôi tin rằng chúng ta có thể đưa toán học dưới hình thức kết hợp với mỹ học tới toàn thể người xem trên khắp thế giới"⁽¹⁾.

Để tạo ra những hình thù kì lạ, Ferguson sử dụng các phương pháp trong điêu khắc truyền thống, máy tính và các phương trình toán học. Các tác phẩm của ông mang những cái tên cũng khá lạ như *Wild Sphere* (Quả cầu hoang dã), *Klein Bottle With Cross-cap and Vector Field* (Bình Klein với dải Möbius và trường vectơ), *Torus* (Xuyên), *Umbilical Torus With Vector Field* (Xuyên rốn với trường vectơ), *Whaledream II* (Hình cầu cô sinh).

(1) Trích từ bài Những phương trình trong đá đăng trên tạp chí Science News (Tin tức Khoa học) tập 138, ngày 8 tháng 9 năm 1990, tác giả Ivars Peterson.

“ĐẼ TRỨNG” NHỜ TOÁN HỌC



Ngay từ đầu khi Ronald Dale Resch đồng ý nhận nhiệm vụ làm một quả trứng Phục sinh khổng lồ cho thị trấn Vegreville tại Alberta, ông đã nhận ra mình phải vận dụng toán học cho công việc này.

Qua nhiều năm, Resch đã cải tiến nghệ thuật chuyển hóa không gian hai chiều thành không gian ba chiều. Công việc và các vấn đề mà ông cần giải quyết thuộc về toán học, nhưng lúc đó ông mới chỉ biết rất ít về toán. Với nhiều tấm vật

liệu khác nhau như giấy, nhôm, ông biến chúng thành các tác phẩm nghệ thuật bằng kỹ thuật gấp do chính mình phát triển. Ông giải các bài toán hình học bằng linh cảm, sự tài tình, toán học, máy tính và đôi bàn tay của mình.

Suy nghĩ ban đầu của ông khi thiết kế trứng Phục sinh là tạo hai hình elipxôit (elip tròn xoay) làm hai đầu trứng và một hình trụ phình lên làm phần giữa. Nhưng ông sớm nhận ra rằng không thể làm theo cách đó. Hiểu rằng toán học hiện tại không đủ để giúp mình hoàn thành công việc⁽¹⁾, ông biết ông

(1). Phương trình đại số cho đường cong hình quả trứng được nhà toán học người Pháp – Rene Descartes (1596 – 1650) tìm ra. Năm 1842, khi còn là một thanh niên, nhà toán học Scotlen James Clerk Maxwell (1831 – 1879) đã nghĩ ra phương pháp để dựng hình quả trứng bằng một cái bút, một sợi dây và các đỉnh mũi.

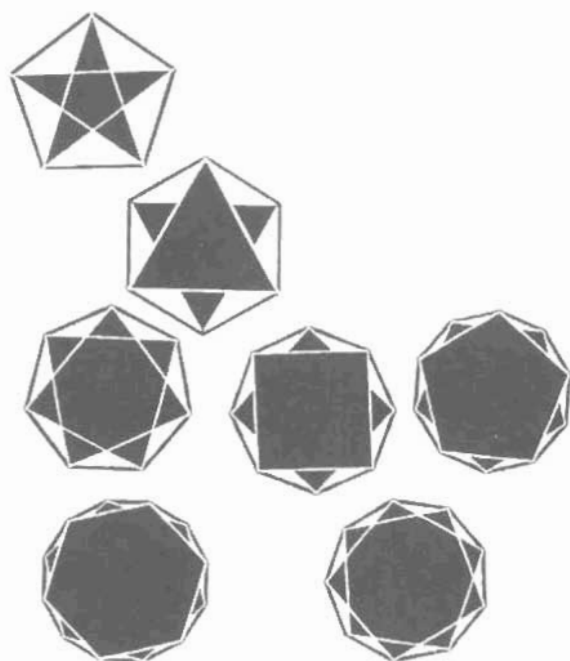
phải tự làm mọi thứ một mình. Thiết kế cuối cùng của ông cho quả trứng Phục sinh lồng lầy cần tới 2208 tấm ghép hình tam giác đều và 524 tấm hình sao ba cánh đều có độ lớn tùy thuộc vào vị trí của nó trên quả trứng. Ông phát hiện ra bằng cách thay đổi góc xếp một chút (từ gần 1° đến 7°), các tấm ghép phẳng sẽ cho cảm giác cong, từ đó hình thành nên các đường viền trên quả trứng. Tác phẩm điêu khắc *Trứng Phục sinh* khi hoàn thành có chiều dài là 25,7 foot, rộng 18,3 foot và nặng 5000 pound (1 foot = 0,3048m, 1 pound = 0,454kg).

TOÁN HỌC, THIẾT KẾ VÀ NGHỆ THUẬT

Các hình dưới đây đã và đang được dùng trong các thiết kế nghệ thuật và đồ họa. Được tạo nên nhờ toán học, nhưng điều đó không làm mất đi vẻ đẹp và sự duyên dáng giản dị của chúng.

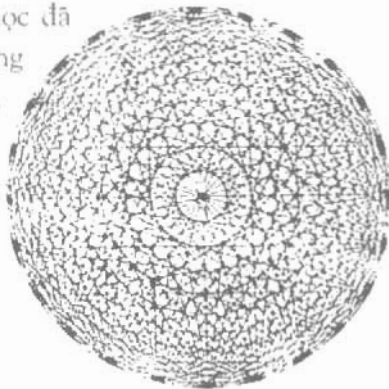
NHỮNG NGÔI SAO TOÁN HỌC

Các hình vẽ cho chúng ta thấy cách thức dựng hình sao bằng các đa giác đều. Với các đa giác có số lẻ cạnh, bạn chỉ cần nối các đỉnh không cùng cạnh lại với nhau, khi vẽ xong hình sao, bạn sẽ trở lại đúng điểm ban đầu. Còn với đa giác có chẵn cạnh, hình sao sẽ được tạo bởi hai đa giác xoay lệch nhau. Hai đa giác này có số cạnh bằng $1/2$ số cạnh của đa giác ban đầu.

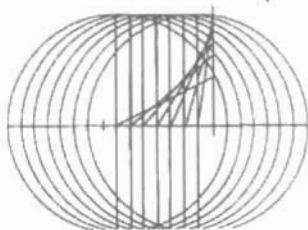
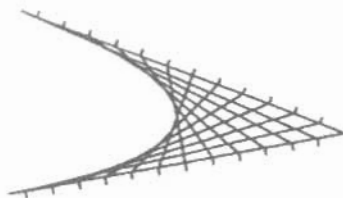
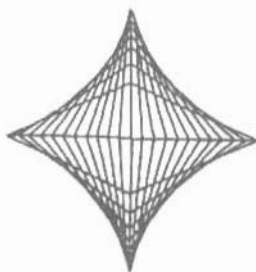


NHỮNG HÌNH THÊU TOÁN HỌC

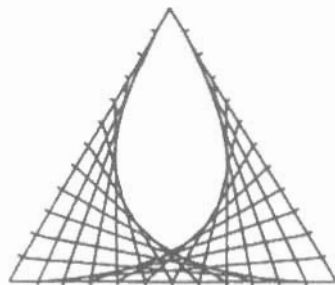
Những người say mê toán học đã “thêu” các đường cong từ hàng trăm năm nay. Thật thú vị khi ta khám phá ra một đường cong hình thành nên từ một loạt các đoạn thẳng. Các “mũi thêu” (có dạng đoạn thẳng) hóa ra chính là tiếp tuyến của đường cong mà chúng vẽ nên. Người ta có thể “thêu” đường tròn, elip, parabol, hypebol, đường hình tim, đường ốc sên, đường denta,... Trong quá trình thêu các đường này, người ta đã phát hiện ra một vài tính chất đặc biệt của chúng. Dưới đây là các bước thêu đường astroid (đường hình sao).



Các đường tròn đồng tâm xuất hiện khi thêu các đường chéo của đa giác 24 cạnh.



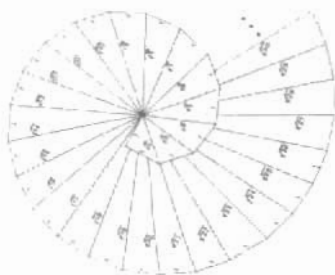
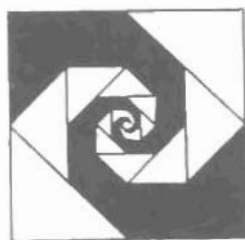
Một cách để thêu đường hình sao là coi nó như một cái thang trượt. Các đường tròn và bán kính của chúng được dùng để đánh dấu vị trí mỗi của thang.



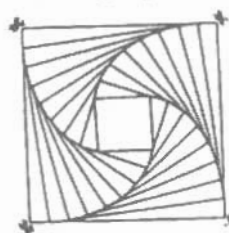
Thêu các parabol.



Nhóm các hình vuông này là bước đầu tiên của quá trình tạo hình xoắn ốc bên dưới.



Đường xoắn ốc này được tạo thành từ các số căn bậc 2 như định lý Pythagoras



ĐƯỜNG XOẮN ỐC TẠO BỞI CÁC ĐOẠN THẲNG

Đường xoắn ốc có vẻ như là đối tượng toán học mô tả sự chuyển động. Chúng là một họ các đường cong bao gồm từ xoắn ốc hai chiều như xoắn ốc đẳng giác, xoắn ốc Archimedes, cho đến các xoắn ốc ba chiều như conchoid (vỏ sò) hay đường đỉnh ốc. Các đường xoắn ốc đáng kể đến rất nhiều lĩnh vực trong cuộc sống của chúng ta và các sinh vật sống trong tự nhiên. Có thể kể một vài ví dụ như xoay ở trên đầu con người, đài hạt hoa hướng dương, đường vân trên vỏ sò, các dây leo, kiến trúc, nghệ thuật, các thiết kế đồ họa,...

Đường xoắn ốc tạo bởi các đoạn thẳng được hình thành bằng cách vẽ một loạt các đa giác đều, trong đó mỗi hình vuông nhỏ hơn có cạnh là đoạn thẳng nối trung điểm các

Bốn con nhện bắt đầu bò từ bốn góc của hình vuông. Mỗi con bò về phía tâm bên phải nó và di chuyển về tâm với tốc độ không đổi. Vì thế, chúng luôn nằm ở bốn góc của một hình vuông. Đường cong tạo bởi đường đi của chúng là các đường xoắn ốc đẳng giác. Kích thước của hình vuông ban đầu và tốc độ của chúng sẽ xác định thời gian chúng gặp nhau.

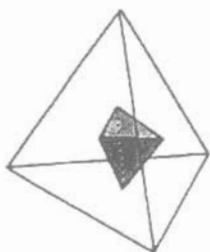
cạnh của hình vuông lớn hơn ngay trước nó. Nhìn vào tổ hợp các hình vuông đó, chúng ta khó mà nhận ra được đường xoắn ốc nếu không tô màu chúng. Các hình minh họa trong mục này là một vài thiết kế thú vị từ các *đường xoắn ốc tạo bởi đoạn thẳng*.

Có rất nhiều cách xây dựng các xoắn ốc loại này. Một số cách có liên hệ đến bài toán đuổi bắt, ví dụ như bài toán bốn con nhện.

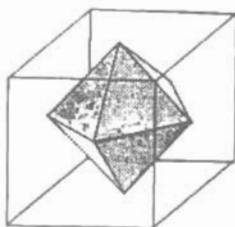
Một *đường xoắn ốc tạo bởi các đoạn thẳng* nổi tiếng khác là đường hình thành khi lấy căn bậc hai các số như định lý Pythagoras.

CÙNG QUAN SÁT CÁC ĐỐI NGẪU CỦA KHỐI PLATON

Khối Platon – những đa diện lồi có các mặt là đa giác đều – chỉ có 5 loại. Chúng ta hãy cùng đi tìm mối liên quan giữa khối Platon và các đối ngẫu của chúng.



Tứ diện và đối ngẫu của nó



Lập phương và đối ngẫu của nó



Khối bát diện và đối ngẫu của nó



Khối mười hai mặt và đối ngẫu của nó



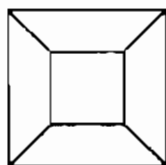
Khối hai mươi mặt và đối ngẫu của nó

Để tạo ra đối ngẫu của một khối đa diện, người ta tìm tâm của mỗi mặt đa diện, sau đó nối tâm của các mặt có chung cạnh lại với nhau. Các hình vẽ phía trên cho thấy đối ngẫu của tứ diện là một tứ diện, đối ngẫu của hình lập phương là một bát diện, trong khi đối ngẫu của bát diện lại là một lập phương. Đối ngẫu của khối mười hai mặt là khối hai mươi mặt, còn của khối hai mươi mặt lại là khối mười hai mặt. Không có đối ngẫu nào của 5 khối Platon là hình gì khác ngoài chính khối Platon.

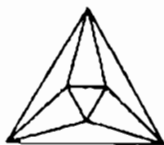
CÁC ĐA DIỆN HẠ CẤP BIỂU ĐỒ SCHLEGEL



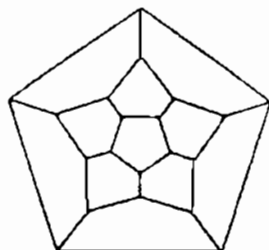
Tứ diện



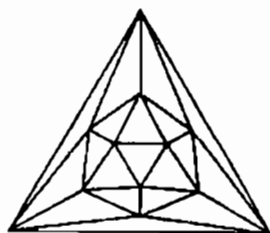
Lập phương



Khối bát diện



Khối mười hai mặt



Khối hai mươi mặt

Trong hình bên là các khối Platon. Chúng được gọi là biểu đồ Schlegel theo tên nhà toán học người Đức Viktor Schlegel, người đã phát minh ra những biểu đồ đặc biệt này vào năm 1883. Chúng làm chúng ta liên tưởng đến các hình ba chiều chiếu xuống mặt phẳng. Tuy nhiên, về thực chất, các khối đa diện này được vẽ nội tiếp trong hình cầu và chiếu xuyên qua một điểm nằm trên đường thẳng đi qua điểm cực bắc của hình cầu. Hình chiếu này có thể thay đổi tùy theo vị trí nội tiếp của nó trong hình cầu. Các biểu đồ Schlegel có tính chất đặc biệt là mỗi mặt của đa diện chứa hình chiếu của tất cả các đỉnh còn lại. Ngoài ra, biểu đồ cho chúng ta thấy tất cả các đỉnh, cạnh và các mặt của đa diện dù kích thước và hình dáng của chúng đã thay đổi.

TOÁN HỌC VÀ NGHỆ THUẬT CỦA M.C. ESCHER

Các quy luật toán học không phải là phát minh hay sáng tạo của con người. Chúng đơn giản là vốn có, chúng tồn tại hoàn toàn độc lập với trí tuệ của con người. Điều lớn nhất mà một người thông minh có thể làm được, là tìm ra và ghi chép lại chúng.

—M.C. Escher

Và quả thật M.C. Escher đã ghi chép lại. Bạn thật sự sẽ rất hứng thú khi ngắm nhìn các tác phẩm của ông dưới góc nhìn toán học.

Hầu hết chúng ta đều quen thuộc với các sáng tác huyền bí về biến hình trên mặt phẳng của Escher. Chúng vượt xa so với lát mặt phẳng truyền thống. Ông đã đưa chuyển động và thổi hồn sống vào các bức họa nổi tiếng như *Metamorphosis* (Biến hình), *Sky and Water* (Bầu trời và mặt nước), *Day and Night* (Ngày và đêm), *Fish and Scales* (Cá và vảy), *Encounter* (Đụng độ). Ngoài biến hình trên mặt phẳng, các hình bị biến đổi còn có sự thay đổi trong chính bản thân chúng.

Một phần trong tác phẩm Metamorphosis III (Biến hình III) của Escher, 1994.



Qua chúng, người xem có thể thấy được sự tinh thông của ông về các khái niệm toán học như tịnh tiến, phép quay và phép đối xứng trong kĩ thuật lát mặt phẳng tuần hoàn.

Escher cũng sử dụng cả các đối tượng và khái niệm trong lĩnh vực tô pô. Dải Möbius đóng vai trò chính trong bức tranh khảm gỗ *Möbius I*, *Möbius II* và trong bức *Horse-man* (Người ngựa). Ông tạo ra các nút ba lá một cách tài tình trong tác phẩm *Knots* (Nút) của mình. Và mặc dù Escher có thể không có chủ định này khi sáng tác, nhưng bức tranh *Snakes* (Những con rắn) của ông quả là một tác phẩm nghệ thuật hoàn hảo minh họa cho chủ đề lí thuyết nút. *Print Gallery* (Phòng triển lãm ảnh) và *Balcony* (Ban công) cũng là những ví dụ tuyệt vời về biến dạng tô pô. Các bản in đá này trông như là được in trên các tấm cao su bị làm méo đi một cách kì diệu nhờ tô pô.



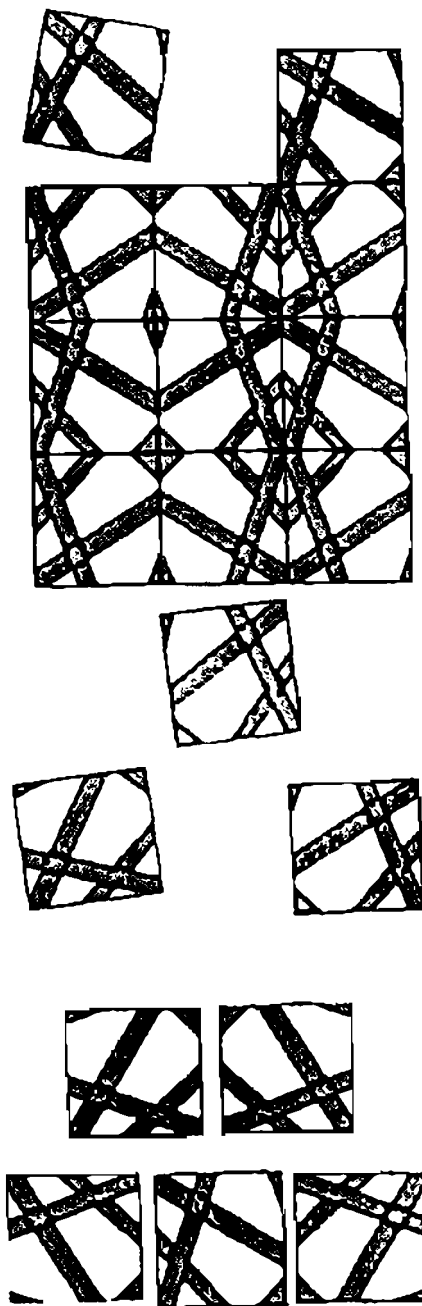
Bức Phòng triển lãm ảnh của Escher mô tả biến dạng tô pô.

Trộn lẫn các chiều không gian cũng là chủ đề toán học trong nhiều tác phẩm của Escher. Trong *Reptiles* (Những con thần lằn), Escher đã đưa những con thần lằn hai chiều trở nên sống động hơn rất nhiều trong tư thế trườn bò ở không gian ba chiều. Các biến đổi tương tự cũng tìm thấy ở *Magic Mirror and Cycle* (Chiếc gương và vòng tròn thần kì). Việc sử dụng các khái niệm từ hình học xạ ảnh, các phép phối cảnh, điểm ảo⁽¹⁾, điểm ảo cong chính là bí quyết tạo nên cảm giác về chiều sâu và các chiều không gian khác trong *St. Peters Rome* (Thành Rome của Thánh Peter), *Tower of Babel* (Tháp ở Babel), *High and Low* (Cao và thấp).



Bức *Reptiles* (Những con thần lằn) minh họa việc sử dụng các cách lát mặt phẳng của Escher cũng như sự tinh thông của ông về chuyển động giữa các thế giới hai chiều và ba chiều.

(1). Điểm mà các đường song song trong một mặt phẳng có vẻ như gặp nhau.



Hình tròn, elip, xoắn ốc, đa diện và các khối hình khác cũng là những đối tượng hình học xuất hiện trong sáng tác của Escher. Bức *Three Spheres* (Ba hình cầu) tạo nên một ảo ảnh ba chiều về hình cầu dù nó được tạo thành hoàn toàn từ các đường tròn và elip. Trong *Stars* (Những ngôi sao) chúng ta thấy rất nhiều hình khối, bao gồm cả khối Platon, trong khi hình tứ diện lại là tiêu điểm của *Tetrahedral planetoid* (Hành tinh bốn mặt). Ở *Gravity* (Trong lực), tiêu điểm là hình sao mười hai mặt.

Escher đã khiến các khái niệm về vô cùng đi vào cuộc sống. Không cần

M.C. Escher đã làm chủ nghệ thuật biến hình. Ông cũng đã biến dụng ra một con tem bưu hình. Người ta vẽ hình lên sơn mài của hình lập phương ở sau và in khác nhau. Khi trải con tem trên mảnh giấy, các hình sẽ biến đổi. Thuật vẽ mô phỏng ở đây không phải thực hiện trên con tem mà thay vào đó người ta dùng máy tính để xoay và lật các hình vẽ.

lời giới thiệu, các tác phẩm của ông tự nói lên ý nghĩa của nó. Trong *Whirlpools* (Vòng xoáy nước), các vòng xoáy đưa mắt chúng ta đi trên một hành trình vô tận. *Square Limit* (Giới hạn vuông) lại phản ánh cảm giác về chuỗi vô hạn tiến dần đến biên của nó. *Circle Limit* (Giới hạn tròn) sẽ là mẫu hình lí tưởng cho hình học hữu hạn của Henri Poincaré nhưng lại là phi Euclid vô hạn. Còn trong *Cubic Space Division* (Phép chia không gian lập phương) chúng ta nhận thấy các khái niệm về vô cùng và lát hình không gian.

Ở lĩnh vực ảo ảnh quang học, Escher cũng là một hiện tượng. Ông sử dụng các hình không thể như tam giác Penrose để đánh lừa mắt nhìn và làm chúng ta bối rối. Tác phẩm *Waterfall* (Thác nước) khiến chúng ta thấy như thể có nước thật chảy ngược dòng thành một vòng lặp vô hạn, trong khi ở *Ascending and Descending* (Lên và xuống) lại có hai đoàn người, một cứ mãi trèo lên cầu thang, còn một thì đi xuống, tất cả trong một vòng lặp không bao giờ dừng. Các hình không thể cũng là công cụ để ông tạo ra ảo ảnh trong *Belvedere* (Tháp lầu) và *Relativity* (Tương đối). Với *Concave and Convex* (Lõm và lồi), Escher lại là bậc thầy vẽ ảo ảnh động. Mắt và tâm trí chúng ta cứ bị cuốn về sau rồi về trước ở bên trong và bên ngoài của một cấu trúc thật đáng kinh ngạc hòa quyện cùng các sắc thái của các nhân vật. Mới đây thôi ta còn thấy vòm cong là mái nhà, vậy mà thoáng chốc nó đã lại là trần nhà.

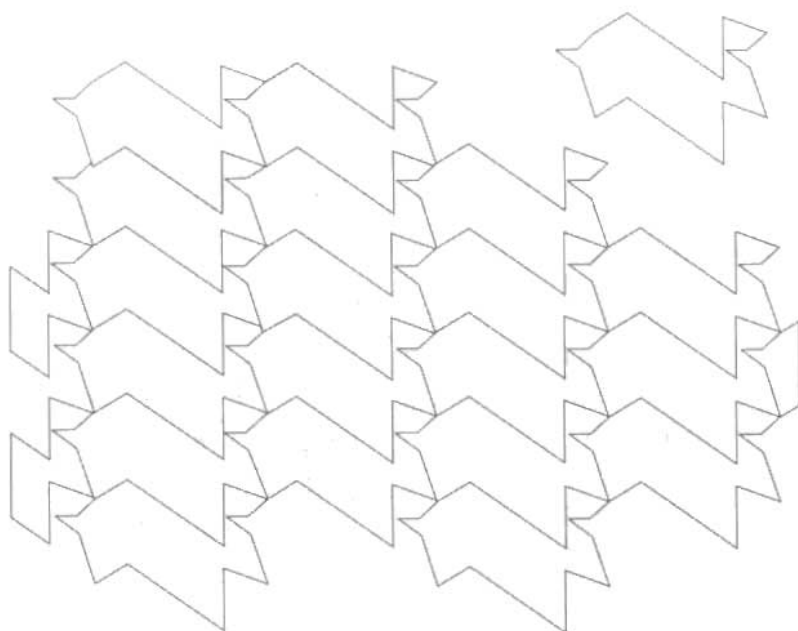
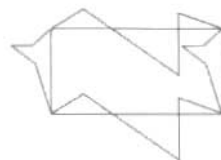
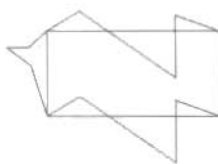
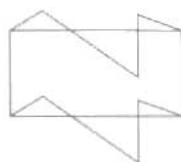
Sẽ thật hài lòng nếu có thể khám phá các tác phẩm của Escher ở nhiều mức độ khác nhau. Phần giới thiệu này của chúng tôi chỉ có thể điếm qua sự phong phú toán học được tìm thấy trong sáng tác của ông mà thôi.

LÁT MẶT PHẪNG BẰNG MỘT HÌNH CHỮ NHẬT BIẾN DẠNG

Bắt đầu bằng việc biến đổi một cạnh dài của hình chữ nhật. Sau đó biến đổi tương tự với cạnh dài còn lại.

Bây giờ, biến đổi một trong hai cạnh ngắn. Cạnh ngắn kia cũng biến đổi tương tự.

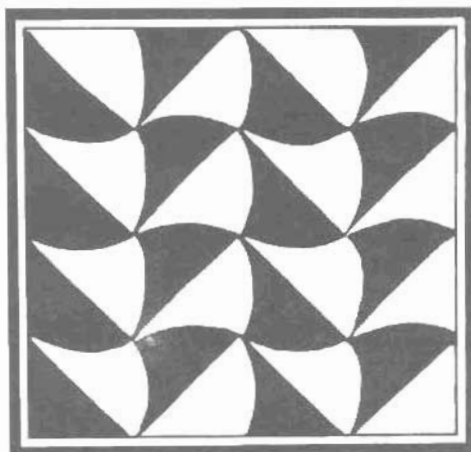
Cuối cùng, lấy hình nhận được để lát mặt phẳng.



LÁT MẶT PHẪNG THỜI CỔ XƯA

Từ cấu trúc của tổ ong trong tự nhiên tới các đồ khảm thời La Mã, lát mặt phẳng thời Hy Lạp cổ đại, các mẫu họa tiết tuyệt vời của các nhà nghệ thuật Hồi giáo, phép biến hình lạ thường của M.C. Escher và cho đến sự đơn giản của lát mặt phẳng Penrose, nghệ thuật lát mặt phẳng (ghép hình) đã trải qua nhiều thế kỉ và nền văn hóa khác nhau.

Trong hình vẽ chúng ta có một mẫu ghép dùng đến ngũ giác và hình bình hành của tác giả Albrecht Dürer. Nó ra đời từ thế kỉ XV.



Sân nhà khảm thời La Mã có rất nhiều mẫu thiết kế. Họa tiết đơn giản nhưng trang nhã này có tại các phòng tắm công cộng Caracalla ở Rome.



HÌNH HỌC XẠ ẢNH VÀ NGHỆ THUẬT

Hình học xạ ảnh là lĩnh vực toán học nghiên cứu các vấn đề về tính chất và tương

quan không gian của các hình khi chúng được chiếu xuống, và do đó giải quyết các bài toán về phối cảnh. Nhiều họa sĩ của thế kỷ XV nghiên cứu và làm việc trong nhiều lĩnh vực khác nhau, chẳng hạn như Giotto di Bondone (1266? - 1337), Leon Battista Alberti (1404 - 1472), Piero della Francesca (1410 - 1492), Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, đều nghiên cứu đồng thời kỹ thuật, toán học, khoa học kiến trúc trong quá trình theo đuổi nghệ thuật của mình. Hệ quả là các họa sĩ thời Phục hưng đã kết hợp các khái niệm toán học, như hình học xạ ảnh, với các sáng tác của mình. Họ phát triển các kỹ thuật để vẽ cảnh thực ba chiều trên tranh sơn dầu hai chiều, phân tích cách mọi vật biến đổi khi nhìn từ các khoảng cách và vị trí khác nhau nhằm hiện thực hóa các ý tưởng về phối cảnh. Họ suy luận rằng nếu ta có thể nhìn được quang cảnh bên ngoài qua cửa sổ, thì cũng có thể chiếu những gì ta nhìn thấy lên trên cửa sổ đó như là một tập hợp các điểm nhìn nếu giữ mắt ở một tiêu điểm nhất định. Cửa sổ sẽ đóng vai trò như một bức tranh sơn dầu. Quang cảnh đương nhiên bị ảnh hưởng bởi

vị trí quan sát của người họa sĩ và vị trí của bức tranh. Một số họa sĩ còn phát minh ra các dụng cụ cơ học trợ giúp cho việc vẽ tranh phối cảnh như bạn có thể thấy trong hai hình minh họa.



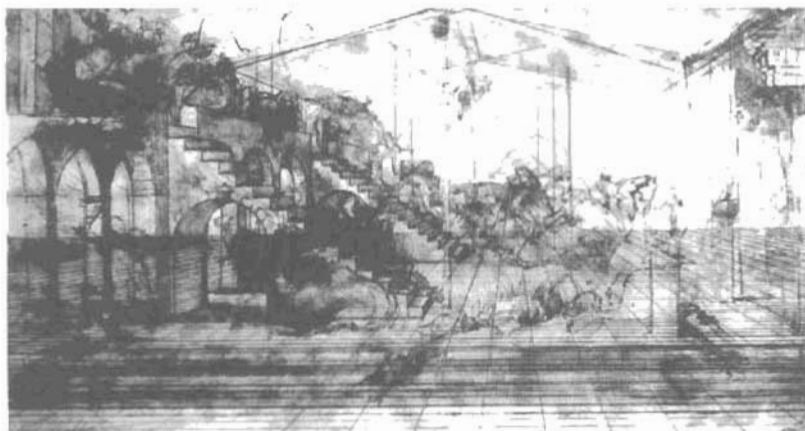
Một dụng cụ trợ giúp vẽ phối cảnh của Albrecht Dürer.

Các tác phẩm phối cảnh của các họa sĩ cũng tác động ngược lại đến sự phát triển của hình học xạ ảnh. Giống như tô pô nghiên cứu những tính chất không thay đổi của vật thể khi nó bị biến đổi, hình học xạ ảnh nghiên cứu tính chất



Máy quang phổ của Leonardo da Vinci.

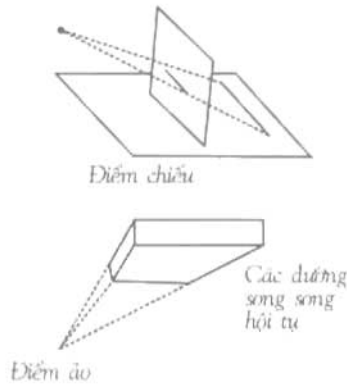
không thay đổi của các hình phẳng khi chúng bị chiếu. Ví dụ: Khi một đường tròn được nhìn từ phía bên, trông nó giống như là elip. Tương tự như thế, hình vuông sẽ trở thành một tứ giác có dạng khác. Bị ảnh hưởng bởi phép phối cảnh trong nghệ thuật thời Phục hưng, đồng thời cũng mong muốn làm gì đó



Nghiên cứu của Leonardo da Vinci về tác phẩm The Adoration of the Magic (Sứ sinh bài Phép thần) cho thấy ông đã dùng đến phối cảnh song song và điểm ảo.

trợ giúp cho các họa sĩ, kiến trúc sư - kĩ sư - nhà toán học thế kỉ XVII Girard Desargues đã bắt tay vào nghiên cứu hình học xạ ảnh. Ông viết một loạt các định lí (định lí Desargues) mà cho đến giờ vẫn vô cùng thiết thực trong việc nghiên cứu hình học xạ ảnh. Công trình của ông tác động đến các nhà toán học

về sau trong lĩnh vực này, đặc biệt là Blaise Pascal (1623 – 1662) và Jean Victor Poncelet (1788 – 1867). Để tạo ra các bức họa ba chiều trung thực, các họa sĩ Phục hưng phải sử dụng đến các khái niệm của hình học xạ ảnh, đó là *điểm chiếu*, *đường song song hội tụ*, *điểm ảo*.



Tác phẩm này của nhà tu Jesuit Andrea del Pozzo (khoảng năm 1685) được vẽ trên trần nhà hình bán trụ của nhà thờ St. Ignasio tại Rome. Bức bích họa là ví dụ xuất sắc về phối cảnh, thể hiện các khái niệm của hình học xạ ảnh về điểm ảo đơn. Thực tế, ta có thể nói là nó quá chính xác. Một dấu được vẽ trên nền nhà thờ chỉ ra vị trí mà người xem nên đứng để có thể quan sát hết toàn bộ hiệu ứng mà họa sĩ muốn thể hiện. Tại điểm đứng này, người xem thực sự cảm thấy trần nhà cao vô cùng, như thể đang đứng giữa khung cảnh thật của St. Ignatius Carried into Paradise (Thánh Ignatius bay lên Thiên đường) vậy. Ngắm nhìn bức họa từ bất kỳ vị trí nào khác sẽ gây ra cảm giác méo mó và thiếu tự nhiên.

PHA TRỌN NGHỆ THUẬT - TOÁN HỌC CỦA ALBRECHT DÜRER

... hình học là nền tảng
của toàn bộ hội họa.
—Albrecht Dürer

Albrecht Dürer (1471 - 1528)

là một họa sĩ đa tài. Trong số 18 người con, cha Dürer hi vọng ông sẽ là người nối nghiệp thợ kim hoàn của mình. Do đó, Dürer được gửi tới học việc cùng Michael Wohlgemut, một nghệ nhân kim hoàn, nhưng đồng thời cũng là một họa sĩ. Sau ba năm học việc, Dürer đã chu du và làm việc khắp châu Âu, học vẽ, chạm trổ, in ấn và học làm tranh khảm gỗ. Tất cả những điều đó sau này đều ảnh hưởng lớn tới công việc của đời ông. Ông cảm thấy rằng nghiên cứu toán học, đặc biệt là hình học, các phép phối cảnh, các ý tưởng của hình học xạ ảnh sẽ phát huy các sáng tạo nghệ thuật. Ông cũng tìm hiểu rất nhiều về tỉ lệ trên cơ thể con người. Ngoài ra, ông còn viết sách



Một bức khảm gỗ từ tác phẩm *Treatise on Geometry* (Luận về hình học) của Dürer, về những kết quả toán học mà mình đã sử dụng. Một số nghiên cứu của ông về toán là hoàn toàn thuần lý thuyết và cho kết quả chính xác⁽¹⁾, trong khi một số nghiên cứu khác và các phép

(1). Dürer tạo ra epicycloid bằng cách theo dõi đường đi của một điểm cố định trên đường tròn khi nó lăn trên một đường tròn khác, nhưng vì thiếu nền tảng đại số nên ông không phân tích được đường cong này. Cũng như vậy, ông tạo ra đường xoắn ốc từ phép chiếu đường đỉnh ốc trong không gian, nhưng không nghiên cứu nó bằng con đường toán học.

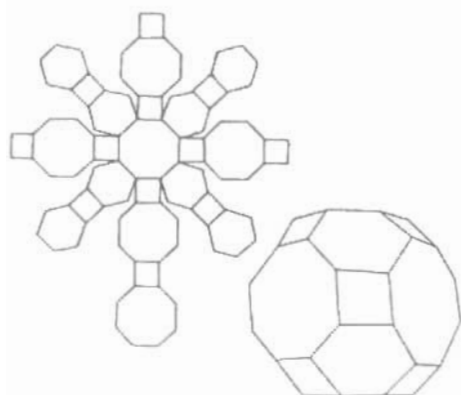
dựng hình lại chỉ là tương đối và được dùng để phục vụ các yêu cầu nghệ thuật của ông.

Phần tiếp theo sẽ thể hiện phần nào âm hưởng toán học trong các tác phẩm của Dürer, cái âm hưởng đã giúp đỡ ông rất nhiều trong sáng tác hội họa và các sáng tạo nghệ thuật khác.



Trong bức khắc gỗ *Melencolia* của Dürer chúng ta thấy một ma phượng trên phông nền. Các khối hình học và tia nắng mặt trời có vai trò như các đường thẳng chiều trong bức họa phối cảnh này.

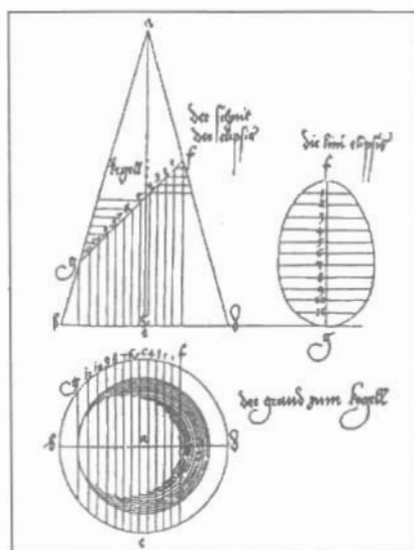
KHỐI CUBOCTAHEDRON CỤT



Ngoài rất nhiều kĩ thuật mới mà Dürer phát triển, ông còn được ghi nhận là đã mô tả các khối hình trên mặt phẳng ở dạng chưa lắp ráp. Bên cạnh đây là chỉ dẫn của Dürer về một trong các khối hình mà khi cắt ra rồi hợp lại thì hình thành khối cuboctahedron cắt.

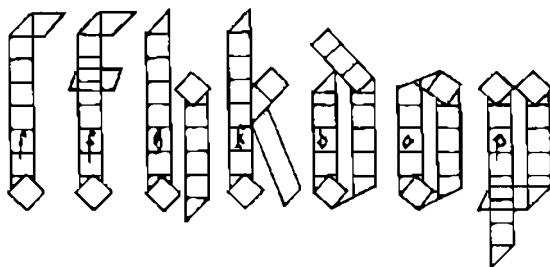
ĐƯỜNG CỦA DÜRER

Hình minh họa này của Albrecht Dürer cho thấy cách giải thích của ông về một tiết diện conic. Hình elip trông giống như quả trứng, có vẻ như ông nghĩ khi mặt phẳng nghiêng cắt hình nón, nó sẽ làm cho đường giao tuyến hẹp hơn ở đỉnh, hoặc là ông đã nhầm chút ít khi tính toán. Tuy nhiên, các nghiên cứu của ông về elip vẫn rất thú vị.

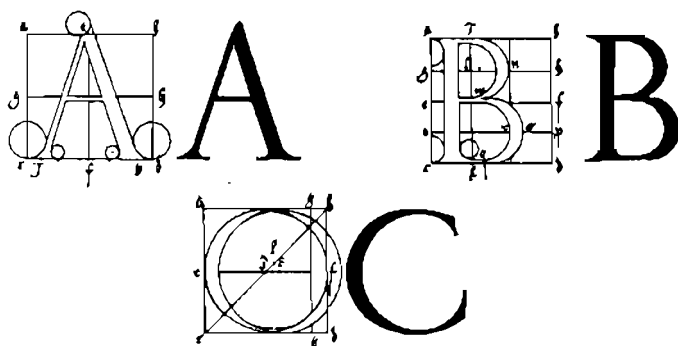


Trích từ *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit* (một chuyên luận về các phép dựng hình) của Albrecht Dürer.

ĐIỂM ẢNH



Có thể coi Dürer là người khởi đầu cho khái niệm tô pô. Trong một cuốn sách của mình, ông đã miêu tả cách dựng hình các chữ cái La Mã. Ông tìm ra cách dựng của riêng mình cho các chữ cái Gô-tích nhờ sự kết hợp các hình vuông, tam giác, hình thang và hình bình hành. Ông hệ thống hóa cấu trúc các chữ cái Gô-tích bằng cách sử dụng các khối dựng nhỏ, có gì đó tương tự như cách các chữ cái hình thành trên màn hình máy tính từ những điểm ảnh⁽¹⁾.



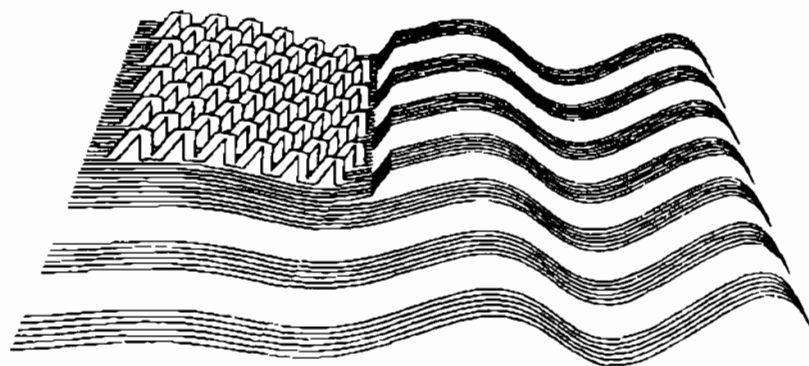
Các cách dựng hình này được tìm ra trong thời kỳ Phục hưng, mặc dù chúng không hề được công bố vào thời đó.

(1) Pixel (Điểm ảnh) là vực tích của từ *picture element* (có nghĩa là phần tử của ảnh). Nó là biểu diễn thụt lùi của một bit trên màn hình máy tính. Một bit tương đương cho một chữ số nhị phân — đơn vị thông tin nhỏ nhất mà máy tính có thể lưu trữ được. Giá trị của bit là các số 0 hoặc 1, tương ứng với trạng thái của dòng điện là “bật” hay “tắt” và tương ứng cho chu kỳ đặt ra trên màn hình một hình vuông trắng hoặc đen.

NGHỆ THUẬT MÁY TÍNH

Trải qua nhiều thế kỉ, các dụng cụ vẽ của một họa sĩ đã đi từ cái que, bút vẽ, cho

tới những máy móc hiện đại như máy ảnh hay cửa phối cảnh. Ngày nay, các họa sĩ đang khám phá một hình thức nghệ thuật trung gian mới có liên quan với toán, đó là máy tính. Cho đến gần đây thì nghệ thuật máy tính⁽¹⁾ đã được tạo ra bởi các nhà toán học, các nhà khoa học, kĩ sư và hầu như bất cứ ai, ngoại trừ các họa sĩ. Nghệ thuật máy tính mới chỉ đang ở bước khởi đầu, vậy mà xung quanh ta đã tràn ngập các họa tiết giống như khi thêu đường cong, các hình tạo từ đoạn thẳng và ảo ảnh quang học.

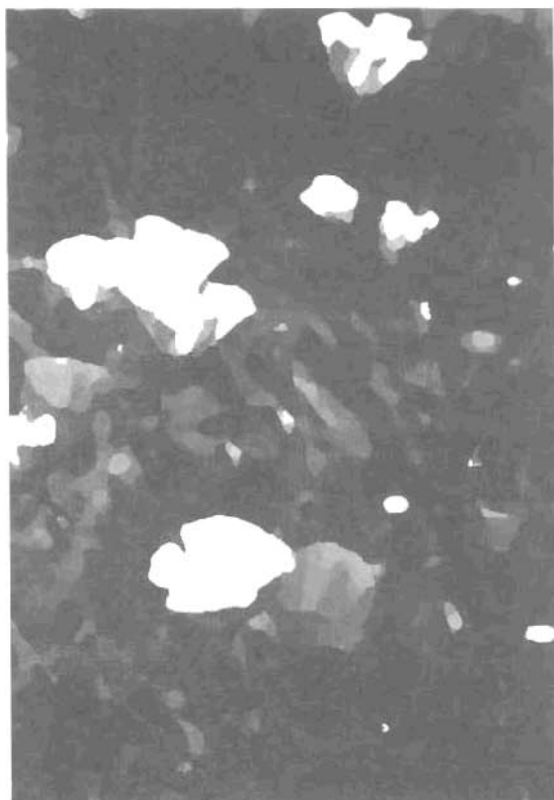


Hình ảnh trên tạo bởi máy tính. Sao lại từ tác phẩm Computer Graphics (Đồ họa máy tính) của Melin L. Pruitt với sự giúp đỡ của Nhà xuất bản Dover

Ngày nay, máy tính đóng vai trò chính trong nghệ thuật thương mại. Một họa sĩ thành thạo máy tính và các phần mềm tiên tiến có thể biến các ý tưởng đồ họa quảng cáo thành rất nhiều phiên bản khác nhau bằng cách thay đổi kiểu chữ, tô màu, thay đổi kích thước, quay, lật các vật thể, hay cắt dán các phần khác nhau của bức hình chỉ trong vòng vài phút. Ngày

(1). Một từ phổ biến được dùng để chỉ nghệ thuật tạo trên máy tính hay tạo bởi máy tính.

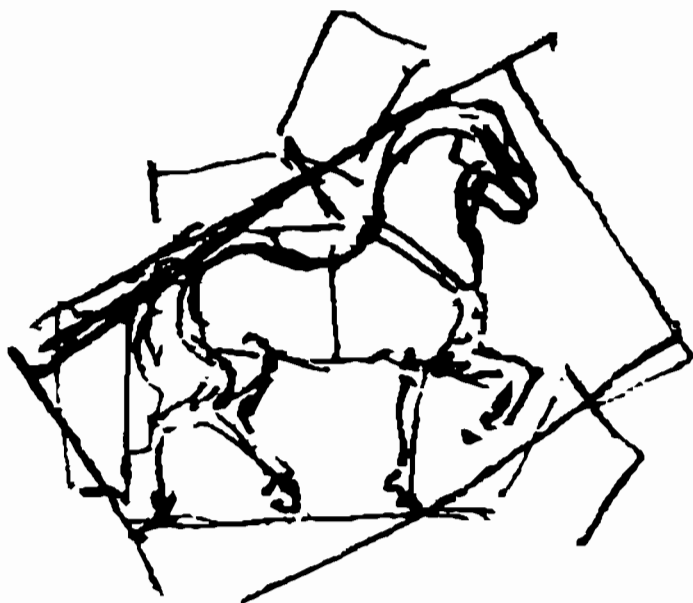
xưa, tất cả những thao tác này khiến người họa sĩ phải mất hàng tiếng đồng hồ, nếu không nói là nhiều ngày.



Hiệu ứng tranh sơn dầu này được tạo bởi một ảnh quét đã qua chuyển đổi trên máy tính.

Các kĩ sư, kiến trúc sư và các nhà thiết kế đã không ngần ngại ứng dụng máy vi tính vào công việc sáng tạo của mình. Chỉ với một vài cú nhấn chuột, bản thiết kế một tòa nhà có thể dễ dàng bị thay đổi, một mặt phẳng có thể xoay theo nhiều hướng để hiển thị tất cả các phép phối cảnh, các mặt cắt được hình thành, nhiều phần có thể thêm vào hay xóa đi mà không hề tổn chút công sức nào. Trong quá khứ, công việc này tốn rất nhiều thời gian và đòi hỏi sự tỉ mỉ cao độ.

Các họa sĩ từ nhiều thế kỷ nay đã sử dụng các chất liệu như màu nước, sơn dầu, màu acrylic, phấn,... để làm nên tác phẩm của mình. Một số họa sĩ cảm thấy máy tính là phương tiện nhân tạo khiến họ bị gò bó trong việc thể hiện tính tự nhiên. Họ thích thể hiện tác phẩm trực tiếp bằng đôi tay, nét bút với loại chất liệu mà họ lựa chọn hơn là làm việc bằng đồng điện, bàn phím, màn hình hay với bút ghi và bảng điện tử. Một số khác thì phản đối hoàn toàn việc dùng máy tính.



Với các máy tính và phần mềm tiến tiến của thời nay, Leonardo da Vinci có thể đưa bức phác thảo này lên máy tính như một bản phác dưới đây

Với các phần mềm và phần cứng được cải tiến, các màu có thể trộn lẫn với nhau trên màn hình máy tính. Có thể dễ dàng làm mềm lại các đường thẳng cứng nhắc ở máy tính theo hình dáng của một đường cong bất kỳ. Các thay đổi hiệu ứng có thể thực hiện được với cả tranh sơn dầu hay màu nước và mọi thứ diễn ra chỉ trong nháy mắt. Các vùng nhỏ bé được phóng to và sửa chữa dễ dàng hơn. Các phần của hình có thể được xóa hoặc

cất, dán tại bất kì chỗ nào trên bức tranh. Người họa sĩ hoàn toàn tự do sáng tạo theo ý của mình. Kết quả sau đó có thể in ra hoặc đưa vào video, giấy hay phim ảnh với kích cỡ lớn tùy ý. Có lẽ trong tương lai gần, một máy in với khả năng nắm bắt họa tiết của tác phẩm do các họa sĩ vẽ nên sẽ được tạo ra. Hoặc có lẽ chúng ta nên coi các họa tiết do máy tính thu nhận được cũng là một hình thức mới của họa tiết.

Các họa sĩ nổi tiếng đã tổ chức trưng bày các tác phẩm tạo bởi máy tính trong các triển lãm quốc tế nổi tiếng, nhưng chúng vẫn phải mang tên gọi nghệ thuật máy tính. Những tác phẩm đó vẫn chưa được gọi là nghệ thuật.

Liệu Leonardo da Vinci sẽ nghĩ gì về việc dùng máy tính để sáng tác nghệ thuật? Giả sử ông yêu thích sự đổi mới⁽¹⁾, chúng ta có thể nghĩ rằng ông sẽ không lạnh nhạt với việc này. Ông đã nói: “... không nhu cầu nào của con người có thể gọi là khoa học nếu nó không theo đuổi con đường của mình thông qua các phát biểu và biểu diễn toán học”. Các tác phẩm của ông phản ánh rằng ông đã thể hiện hết mức quan điểm này trong các sáng tác nghệ thuật của mình, ví dụ như việc sử dụng rất tài tình tỉ lệ vàng trong nhiều tác phẩm và sử dụng các khái niệm của hình học xạ ảnh trong kiệt tác *The Last Supper* (Bữa ăn tối cuối cùng) của mình.

Có lẽ chúng ta không nên xem một loại hình nghệ thuật là tốt hơn hay kém hơn loại hình nghệ thuật khác, mà chỉ nên nhìn nhận đơn giản là chúng khác nhau. Các họa sĩ luôn cần được tự do khi chọn lựa phương tiện và chất liệu sáng tác cho riêng mình.

(1) Các ghi chép và rất nhiều cái tên của ông được các họa sĩ sử dụng để tăng cường và thuận tiện hóa công việc sáng tác. Xu hướng toán học của Leonardo đã đưa ông đến việc phát minh rất nhiều loại computer đặc biệt có thể vẽ parabola, elip và các hình tỉ lệ. Ông cũng được ghi nhận là đã phát minh ra máy phôi cảnh trợ giúp các họa sĩ khi vẽ tranh phối cảnh.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{1}$$

$$= e^{\pi i} = 1 \div 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 1 \times 1 = \text{googol}^0 = 1^{99}$$

$$= \frac{1000-1}{999} = \int_0^1 3x^2 dx$$

$$\sin(\pi/2) = -\left(\frac{x-y}{y-x}\right)$$

VỚI $x \neq y$

SỰ KÌ DIỆU CỦA CÁC CON SỐ

KHÁM PHÁ SỰ KÌ DIỆU CỦA CÁC CON SỐ
QUATERNION & ĐẠI HỘI CÁC CON SỐ
CANTOR & CÁC SỐ CARDINAL VÔ HẠN
SỰ THẦN KÌ CỦA CÁC CON SỐ
THẾ CÒN CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG THÌ SAO?
CHUYỆN CỦA SỐ π
SỰ QUYẾN RŨ "NGUYÊN TỐ"
CANTOR VÀ CÁC SỐ THỰC KHÔNG ĐẾM ĐƯỢC
CHỨNG MINH CỦA EUCLID VỀ TÍNH VÔ
HẠN CỦA TẬP CÁC SỐ NGUYÊN TỐ
ẢO THUẬT VỚI SỐ
CÙNG CHƠI VỚI CÁC CON SỐ

Toán học thuần túy, trong sự phát triển hiện đại
của nó, có thể nói là sản phẩm trí tuệ
nguyên bản nhất của con người.

— A.N. Whitehead

Một số người nghĩ rằng các phép tính trên các con số và kết quả nhận được dường như ẩn chứa một tính chất thần kì trong đó. Có lẽ cảm giác thần kì càng được tăng lên khi có rất nhiều loại số khác nhau, những loại số dường như được các nhà toán học nghĩ ra một cách tình cờ.

Ở cấp phổ thông chúng ta học về các số tự nhiên đầu tiên. Nhiệm vụ của chúng ta là học đếm và sau đó là học làm các phép tính với chúng. Ngay khi ta tưởng rằng mình đã thành thạo với các con số thì bỗng từ đâu phân số, số thập phân, số nguyên... xuất hiện.

$\sqrt{8}$ e 0 -7 4 π googol -2+3i 0,625 1 238 901

1

3/8

$\sqrt{-1}$

ϕ

+67

220

χ

19

SỐ HỮU TỈ **SỐ SIÊU HẠN**

Số hữu nghị

SỐ PHỨC Số nguyên tố

SỐ NGUYÊN KHÔNG ÂM **SỐ ĐỎ**

Số âm *Số dương*

Số thập phân *Số thứ tự*

Số lẻ *Số chẵn*

Số tự nhiên **SỐ NGUYÊN**

Số thực

SỐ VÔ TỈ **SỐ ĐẾM**

Số đếm *Số cardinal*

35,7898989... 284 - $\sqrt{4}$ 0,333

Đôi khi chúng chỉ xuất đầu lộ diện khi có những bài toán tưởng như không giải được. Chúng hiện ra như thể cứu cánh cuối cùng, ví như khi chúng ta không biết 7 chia 2 bằng bao nhiêu, không phải 3 mà cũng chẳng phải 4, thì chúng ta biết đến số $3\frac{1}{2}$.

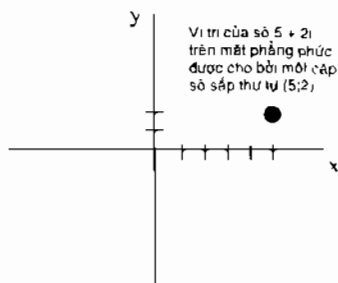
Điều lí thú ở đây chính là có bao nhiêu loại số và có tất cả bao nhiêu cách phân loại chúng theo những đặc điểm riêng của mình. Đường như các con số lại tự sinh ra các số khác. Sau đây là danh sách các loại số với một vài mô tả về chúng: số đếm (còn gọi là số tự nhiên) $\{1; 2; 3; \dots\}$, số nguyên không âm (bao gồm số đếm và số 0), số nguyên $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$, số hữu tỉ (gồm phân số, hợp số, phân số không thực sự, phân số thực sự, số thập phân và số thập phân vô hạn tuần hoàn), số vô tỉ (gồm số thập phân vô hạn không tuần hoàn, căn số, π , e , ϕ), số thực, số ảo, số phức, số siêu việt, số siêu hạn, số hoàn hảo...

Trong phần này chúng tôi xin giới thiệu đến các bạn một vài con số cùng với các tính chất, đặc điểm của chúng mà có thể các bạn chưa biết, đồng thời cùng các bạn tìm hiểu tường tận hơn về những số mà các bạn đã biết lâu nay.

QUATERNION VÀ ĐẠI HỘI CÁC CON SỐ

Thật khó để một người bình thường hiểu thấu đáo cách thức mô

tả con số khi nó có các chiều khác nhau. Xưa nay số là số, vốn dùng để biểu diễn một lượng cụ thể nào đó. Vậy số có nhiều chiều là như thế nào? Chúng ta hãy dành câu hỏi này cho các nhà toán học, những người đưa ra các đặc điểm mới cho các con số. Họ xem số thực hay số ảo là những số 1 chiều, bởi chỉ có một thành phần nói lên giá trị của chúng. Hơn nữa chúng có thể biểu diễn được trên đường thẳng – một đối tượng một chiều. Nhưng số phức lại là số hai chiều bởi chúng được tạo nên từ số thực và số ảo. Khi cần biểu diễn, số $5 + 2i$ sẽ nằm trên một mặt phẳng, gọi là mặt phẳng phức (một đối tượng hai chiều). Đến đây có lẽ bạn sẽ thắc mắc những số hai chiều dùng để làm gì và vì sao người ta lại cần đến những số còn nhiều chiều hơn thế? Có nhiều trường hợp các ý tưởng toán học được phát minh hôm nay, nhưng ứng dụng của chúng chỉ trở nên sáng tỏ nhiều năm sau đó. Số phức cũng nằm trong hoàn cảnh tương tự. Ngày nay, người ta sử dụng chúng để mô tả dòng hình thủy động trong thủy động học, mô tả dòng điện và hình dáng của cánh máy bay. Số phức hữu ích và hiệu quả trong việc giải quyết nhiều bài toán khác nhau đến nỗi người ta đã nghĩ rằng bước tiếp theo cần phải làm đương nhiên là đi



tìm kiếm số ba chiều. Mặc dù việc tìm kiếm này không thành công, song nó lại giúp các nhà khoa học phát hiện ra số bốn chiều – quaternion. Quaternion được William Hamilton tìm ra vào năm 1843. Giống như những số phức, sự tồn tại của chúng gặp phải thái độ hoài nghi của mọi người.

Chúng được tạo nên bởi bốn giá trị, hay còn gọi là bốn thành phần mô tả, bao gồm ba giá trị trên trục x, y, z (những số xác định một điểm trong không gian ba chiều) và một thành phần vô hướng (một đại lượng không phải mô tả hướng như x, y, z). Không giống như tập hợp các số thực và số ảo, tập các quaternion không có tính chất giao hoán đối với phép nhân, thứ tự nhân thay đổi sẽ cho ta các kết quả khác nhau. Vậy, người ta ứng dụng các số bốn chiều này như thế nào? Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của chúng là truyền thông tin đồ họa trên máy vi tính bằng việc đưa ra chỉ dẫn về phép quay các hình trong không gian ba chiều. Câu chuyện sau đây sẽ cho chúng ta thấy rằng các quaternion, cũng giống như các số khác, có những đặc điểm của riêng mình.

* * *

Như thông lệ, tại cuộc họp của các con số, các phe phái đã bắt đầu hình thành. Thật đáng xấu hổ cho các con số khi chúng không thể nghĩ về nhau như các thành viên trong một đại gia đình hạnh phúc.

Từ xa xưa, lúc mới chỉ có số đếm, thì những số chẵn và số lẻ đã không ngớt lời cãi nhau xem ai hữu ích hơn ai. Ấy thế nhưng chúng đồng tâm hiệp lực lại với nhau khi tập hợp số nguyên đem các số âm tiến vào hội trường.

Bây giờ thì cuộc họp đã bắt đầu để bàn luận một vấn đề lớn. Đó là ai sẽ chấp nhận số mới đến – quaternion? Các số đếm phản đối đầu tiên, chúng chỉ công nhận các số nguyên lớn hơn hoặc bằng 1 mà thôi. Tất cả các thành viên của số đếm mặc trang phục riêng và đứng theo thứ tự tăng dần, số sau lớn hơn số trước một đơn vị. Chúng phải nghiên cứu kỹ mới đến này và quyết định xem liệu nó có thuộc tập hợp của mình hay không. Số nguyên thì vừa đồng ý

nhưng lại vừa phản đối, trong khi số 0 tỏ thái độ trung lập, không theo phe phái nào, bởi nó vốn không phải số âm mà cũng chẳng phải là số dương.

Chắc chắn là số hữu tỉ sẽ phải xem xét quaternion mới đến này một cách cẩn thận hơn. Nhưng các phân số, như thường lệ, quan tâm tới biểu diễn của tử số và mẫu số còn hơn cả nói chuyện với các số thập phân. Mãi rồi số thập phân cũng quen dần, chúng không còn thấy phiền lòng về thái độ đáng buồn cười này của phân số nữa. Các số thập phân biết rằng làm tính với chúng thuận tiện hơn nhiều so với các phân số, đặc biệt là trên máy tính. Thậm chí số 0,007 còn nói các phân số là đồ lỗi thời. Thấy vậy số 1/7 nhảy vào phát biểu: "Mặc dù mọi người phải tìm mẫu số chung khi muốn cộng hay trừ chúng tôi, phải làm một số động tác khi nhân chia, hay như chúng tôi thích ở dạng tối giản hơn, nhưng một vài số thập phân của các bạn có vẻ còn không được như chúng tôi nữa. Thực tế, một số bộ nhớ máy tính không thể lưu trữ hết biểu diễn thập phân của các bạn". Cứ như vậy, các số hữu tỉ, bao gồm các số tự nhiên, số nguyên, phân số và số thập phân cứ tiếp tục tranh cãi nhau.

Chương kiến cuộc cãi vã giữa các số hữu tỉ, quaternion dĩ nhiên cũng cảm thấy sợ lây nhóm các số đường gần quán bar gồm $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ và $\sqrt{6}$. Quaternion đã nghe nói về việc các số này có thể vô tỉ tới mức nào. Nhưng trái với suy nghĩ của mình, quaternion rất ngạc nhiên khi nhận ra chúng quả thực lại dễ gần. "Là thế này, tôi nghe nói bạn có một số thành phần và được người ta gọi là số bốn chiều", $\sqrt{2}$ nói. "Nhưng mà đáng buồn vì điều đó, bản thân

**Các phân số
đã lỗi thời rồi!**

.007

tôi cũng vô hạn không tuần hoàn nếu viết ở dạng số thập phân. Thật là nặng nề khi phải mang vác ngàn ấy chữ số, nên tôi chỉ thích khoác lên mình chiếc áo căn bậc hai thôi. Có lẽ là bạn cũng nên tìm lấy một cách viết tắt để biểu diễn bản thân mình đi thôi”.

Quaternion hào hứng lên một chút và cảm thấy thư giãn hơn. Không muốn làm cho quaternion hi vọng quá nhiều, $\sqrt{3}$ nói thêm: “Bạn cần phải giải thích rõ với tập hợp các số phức đi. Bởi vì tập hợp này đại diện cho tất cả các tập hợp chúng tôi: số đếm, số nguyên, số vô tỉ, số thực và số ảo nữa”.

“Nhưng theo như tôi biết thì tập số phức có tính cách chia hai và thay đổi thất thường giữa số thực và số ảo”. – Quaternion nói.

Đứng lúc đó số phức 3 – 5i đứng lên và nói: – Bạn đứng đấy, nhưng mặt phẳng phức cho mỗi số chúng tôi một điểm để ở. Khi mọi thứ trở nên tối tệ nhất, tôi luôn có thể ẩn mình nơi đó. Tôi biết đó là điểm của riêng tôi, không ai

có thể ở đó được, vì thế tôi sẽ được riêng tư một mình để mọi thứ tĩnh lại, để nghỉ ngơi và suy ngẫm. Chúng tôi mỗi một số đều có một nơi để gọi là nhà.

– Bạn hình như có một tính chất phức tạp với các vector và đại lượng vô hướng của mình. – Số 3 – 5i nói với quaternion. – Tôi chắc chắn là mặt phẳng phức không có chỗ nào dành cho bạn đâu.

– Tôi hi vọng là tôi có thể tìm thấy điểm và nhà của riêng mình. – Quaternion nói. Và với giọng buồn bã, nó tiếp tục. – Tôi



không biết phải đi tiếp con đường nào, hay nói đúng hơn, là phải đi tìm tập hợp số nào.

– Điều này đương nhiên là khó khăn rồi! – Một giọng nói trầm ấm bỗng từ đâu cất lên. Quaternion quay lại và thấy số π . – Tôi đã gặp phải rất nhiều khó khăn mới được số thực chấp nhận đây. Mặc dù tôi cũng là số vô tỉ như $\sqrt{2}$ và những số khác, họ vẫn không cho tôi vào tập số thực ngay với lý do là không có cách nào để xác định được chính xác vị trí của tôi trên đường thẳng thực, không giống

**Tôi nghe nói tập
số phức có một
tính cách chia hai.**

quaternion

như $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... có thể sử dụng định lý Pythagoras để tìm ra chính xác vị trí của họ. Vậy, tôi đã giải quyết vấn đề này thế nào? Tôi đã phải có vài buổi nói chuyện với số thực và cuối cùng thì số thực cũng hiểu ra tôi là một số vô tỉ quan trọng đến thế nào, bởi tất cả các đường tròn đều dựa vào tôi để tính chu vi, diện tích và vẽ bản chất thì tôi là một số siêu việt.

π

**Các số thực
cuối cùng cũng
nhận ra tôi là một
số vô tỉ quan trọng
đến mức nào.**

**Tôi khác với
tất cả các bạn.
Tôi có nhiều
chiều hơn.**

Quaternion

Một quaternion được biểu diễn như sau: $q = a + xi + yj + zk$, trong đó "a" là thành phần vô hướng (một hằng số), còn " $xi + yj + zk$ " là một vector, x, y, z là các số thực.

– Ô, số π , bạn nói cỡ như thế chỉ có mình bạn là số siêu việt ấy. – Số e , vốn được biết đến như một kẻ khoe khoang, lên tiếng. – Tôi cũng là một số siêu việt, là cơ sở của phép lấy lôgarit tự nhiên và ngoài việc được sử dụng trong tính toán, tôi còn được tìm thấy rộng khắp trong tự nhiên nữa cơ!

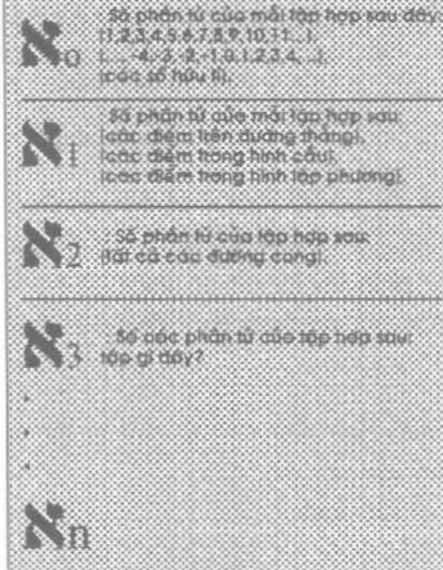
Quaternion bắt đầu cảm thấy đau đầu và mệt mỏi vì tất cả những trò trên chọc, cãi vã đang xảy ra.

– Có lẽ là tôi không thuộc về nơi đây!

– Đứng đấy. Có lẽ là bạn không thuộc nơi đây đâu! – Tất cả các số phức đồng thanh thốt lên. – Thế thì bạn thuộc về đâu? – Chúng hỏi tiếp Quaternion.

– Tôi khác với tất cả các bạn. Tôi có ý nghĩa sâu xa hơn, nhiều chiều hơn các bạn. Có lẽ tôi thuộc về một tập hợp riêng của mình. Phải, chính là như thế! Tôi là một thành viên của tập các quaternion, tập các số bốn chiều, bởi hình dạng chung của tôi là $q = a + xi + yj + zk$. Vừa nói quaternion vừa đường dẫy khỏi sân đại hội và rồi vụt biến mất, y như thể đã bay vào một chiều không gian khác.

CANTOR VÀ CÁC SỐ CARDINAL VÔ HẠN



Chúng ta đã làm quen với các số tự nhiên, số nguyên không âm, số nguyên, nhưng chúng đã được dùng để đếm cái gì và dùng như thế nào?

Còn các số siêu hạn của Georg Cantor thì sao? Có bao nhiêu số như vậy và chúng biểu diễn những gì? Số siêu hạn biểu diễn số lượng các phần tử của một tập hợp. Nếu ta có tập $A = \{\text{táo, cam, lê}\}$

có 3 phần tử, thì *hạng* (số lượng các phần tử) của tập A là 3, 3 khi đó là một số cardinal. Từ năm 1874 đến năm 1895, Cantor đã đi sâu tìm hiểu và phát triển lý thuyết tập hợp. Có rất nhiều tập hợp số chứa vô số các phần tử khác nhau, nên Cantor nhận thấy rất rõ ràng là cần phải có một tập các số cardinal để miêu tả số lượng phần tử của các tập vô hạn. Do đó, ông tạo ra tập số siêu hạn. $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, $\aleph_4$, ... Kí hiệu $\aleph$ tượng trưng cho chữ Do Thái cổ "aleph". $\aleph_0$ (aleph không) kí hiệu số lượng các số đếm. Bất kì tập hợp nào có thể hình thành tương ứng 1-1 với tập các số đếm đều được gọi là có $\aleph_0$ phần tử. Biểu đồ trong hình minh họa phía trên chỉ ra một số tập hợp có số lượng các phần tử là aleph không $\aleph_0$, aleph một $\aleph_1$, aleph hai $\aleph_2$. Cho đến nay vẫn chưa ai tìm ra được ví dụ về tập hợp có số lượng phần tử $\aleph_3$, $\aleph_4$ hay cao hơn nữa.

SỰ THẦN KÌ CỦA CÁC CON SỐ

Tính chất và các phép tính số đôi khi cứ như là một phép lạ. Bạn hãy chọn một số có ba chữ số bất kì, trong đó chữ số hàng đơn vị và chữ số hàng trăm khác nhau. Ví dụ số 285. Đảo ngược vị trí các chữ số. Với ví dụ ta nhận được số 582. Lấy số lớn hơn trừ số nhỏ hơn: $582 - 285 = 297$. Trong kết quả chữ số hàng chục sẽ luôn là 9, tổng chữ số hàng đơn vị và hàng trăm cũng luôn là 9. Giờ chúng ta

285

Lấy một số có ba chữ số với hàng đơn vị và hàng trăm khác nhau.

582

Đảo ngược vị trí các chữ số (562-286)

(582-285)

= 297

Tìm hiệu của chúng

729

Đảo ngược kết quả vừa nhận được.

729 + 297

1089

Tìm tổng của chúng. Kết quả luôn là 1089

hãy đảo ngược kết quả vừa nhận được: 792, rồi cộng hai số này với nhau: $792 + 297 = 1089$. Kết quả cuối cùng sẽ luôn luôn là 1089.

THẾ CÒN CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG THÌ SAO?

Số chính phương là số bằng bình phương của một số tự nhiên. Ví dụ 36 bằng 6 nhân 6 và 49 bằng 7 nhân 7.

1
4
9
16
25
36
49
64
81
100

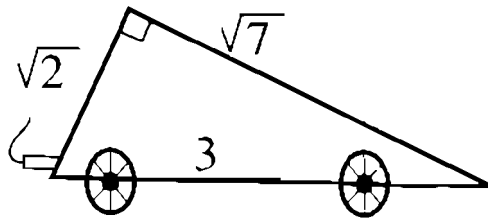
Bạn có biết?

- Tổng của n số lẻ đầu tiên là một số chính phương.
 $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$
Ví dụ: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.
- Mọi số chính phương đều có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6 hoặc 9.
- Mọi số chính phương đều hoặc chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 1.
- Mọi số chính phương đều hoặc chia hết cho 4 hoặc chia 4 dư 1.
- Mọi số chính phương đều hoặc chia hết cho 5 hoặc chia 5 dư 1 hoặc chia 5 dư 4.

121 144 ...

CHUYỆN CỦA SỐ π

Nhiều năm về trước, một bữa tiệc đặc tổ chức dành cho những con số thời bấy giờ. Số 1 có mặt trong suốt bữa tiệc. Số 2 xuất hiện với tất cả các số chẵn khác theo sau. Tất cả các số nguyên tố được biết đến cũng đều đến dự. Thậm chí có cả một vài phân số như $1/2$, $1/4$ và $2/3$. Một số ít căn số đã xuất hiện, còn $\sqrt{2}$ và $\sqrt{7}$ thì đang cười trên các cạnh của một tam giác vuông đến cùng với số 3.



$\sqrt{2}$ và $\sqrt{7}$ cười trên các cạnh của một tam giác vuông đến cùng với số 3.

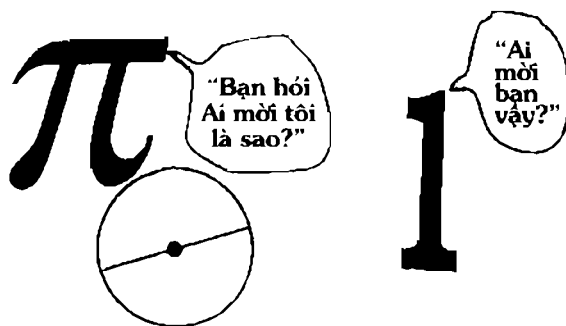
Nhưng khi số π lăm vào, tất cả các số đều hỏi: "Ai mời bạn đến đây vậy?". "Các bạn hỏi vậy là sao? Ai mời tôi ư?", Số π ngạc nhiên, "Tôi cũng là một con số mà". "Đúng vậy, bạn là một số. Nhưng vị trí của bạn trên trục số là ở đâu vậy?". "Thế còn $\sqrt{2}$ thì sao?", π hỏi lại. "Cảm ơn bạn, như định lý Pythagoras và chiếc compa, tôi biết chính xác tôi nằm ở đâu trên trục số", $\sqrt{2}$ trả lời.

π cảm thấy bị tổn thương và bối rối, nhưng nó vẫn nói: "Tôi đứng sau số 3 một chút".

"Nhưng chính xác là ở đâu?", Tất cả đồng thanh.

Là ước số của mọi số khác, số 1 cảm nhận được nỗi đau của π . Nó lên tiếng: "Chúng ta hãy cho π cơ hội để mô tả chính mình".

Và thế là π bắt đầu kể câu chuyện về mình. "Như các bạn đều biết, người Babylon có lẽ là những người đầu tiên tìm ra tôi. Một học giả



có đai nào đo đủ về những hình tròn có bán kính khác nhau. Ông lấy đường kính (bằng cách nhân đôi bán kính) của mỗi hình tròn đặt chồng lên đường tròn của nó chỉ để cho vui. Nhưng ngạc nhiên thực, ông nhận thấy rằng không phụ thuộc vào kích thước của đường tròn, đường kính của nó luôn phủ được gần một phần ba đường tròn. Đây quả là một phát hiện rất đáng phấn khởi. Tin tức lan đi nhanh chóng trên khắp thế giới, từ Ai Cập cho tới Hy Lạp, Trung Quốc. Đâu đâu mọi người cũng biết về tôi. Chính nhờ mối quan hệ đặc biệt này của tôi với các đường tròn mà cho đến nay con người đã phát minh ra nhiều cách để tính diện tích và chu vi của hình tròn trong tính toán. Họ nóng lòng muốn tìm ra giá trị chính xác của tôi. Tôi không có ý làm méch lòng, nhưng quả thực họ biết tôi không phải là một số bình thường, hơn nữa họ còn chưa bao giờ gặp phải một số như tôi. Họ không thể tìm ra tôi từ bất kì phương trình đại số thông thường nào mà họ biết. Do đó, sau này họ đặt cho tôi cái tên là số siêu việt. Các bạn có thể nghĩ rằng con người đã từ bỏ ý định đi tìm giá trị chính xác của tôi. Tôi hài lòng với π . Nó rất phù hợp với tôi. Nhưng không, các bạn biết là một số nhà toán học bướng bỉnh đến mức nào, họ cứ muốn chính xác và chính xác hơn nữa. Vì vậy, trải qua nhiều thế kỉ cho tới nay, nhiều công cụ và phương pháp mới đã được phát triển để tìm ra các xấp xỉ càng gần tôi hơn.

Nhà toán học nổi tiếng Archimedes đã tìm ra tôi nằm giữa $3\frac{10}{71}$ và $3\frac{1}{7}$. Trong Kinh Thánh tôi xuất hiện hai lần và giá trị của

tôi trong đó là 3. Các nhà toán học Ai Cập cho tôi bằng 3,16. Còn Ptolemy ước tính tôi bằng 3,14 vào năm 150 sau Công nguyên.

Các nhà toán học hiểu họ sẽ không bao giờ tìm được giá trị chính xác của tôi, nhưng họ vẫn cứ tiếp tục kéo dài tôi thêm với nhiều chữ số hơn nữa sau dấu phẩy. Các bạn không thể tưởng tượng được mang vác đồng số này nặng nề đến thế nào đâu. Đến khi vi phân, tích phân và máy tính ra đời thì tôi được tính ra tới hàng triệu chữ số.

Họ nói rằng tôi rất cần thiết khi tính toán nhiều thứ khác nhau như thể tích, diện tích, chu vi và mọi thứ khác có liên quan tới đường tròn, hình trụ, nón và hình cầu. Tôi cũng đóng vai trò quan trọng trong xác suất. Với hàng triệu chữ số sau dấu phẩy, các máy tính sẽ dựa vào tôi để xem xét tính vượt trội và kiểm tra độ chính xác cũng như tốc độ của chúng."

2, 4, 6, 8
10, 12, 14, 16, 18, 20, ...
Số 2 xuất hiện cùng với tất cả số chẵn khác theo sau.

"Không cần nói nữa đâu". Số 1 la lên. Rồi nó nói tiếp: "Tôi tin là tất cả đều đồng ý một con số nổi tiếng như π phải được công nhận là một phần trong số chúng ta. Dù sao thì chúng ta đều hiểu rằng mỗi chúng ta có một điểm của riêng mình trên trục số. Không số nào có thể có điểm của số khác. π cũng có điểm của riêng bạn ấy. Chúng ta không nhất thiết phải biết vị trí chính xác của một số trên trục số là ở đâu."

"Đồng ý", Số 3, một trong số những con số bí ẩn, kêu lên. "Tôi nghĩ là π đủ làm bữa tiệc hôm nay thêm phần bí ẩn, phong phú và có ý nghĩa đấy", $\sqrt{2}$ tiếp lời Số 3. "Chào mừng bạn!", Các số khác cũng đồng thanh. "Vậy thì hãy cùng khởi động bữa tiệc của chúng ta đi thôi. Chúng ta cùng đếm nào!", π vui vẻ kết lời.

SỰ QUYẾN RŨ “NGUYÊN TỐ”

Chúng tôi thích nghĩ về mình như là những số tự nhiên	
2	3
5	7
Chúng tôi có thể biểu diễn một số nguyên dương bất kỳ theo một cách duy nhất	
11	13
17	
Chỉ cần nhân tích số đo bất kỳ	Chỉ cần phân tích số đo
	số nguyên không âm
thành tích các thừa số nguyên tố	
Không có hai số nào có cùng tập các số nguyên tố	
Chúng tôi bao gồm vô số các số, nhưng chỉ 1 trong số	2 là
chúng tôi là số nguyên tố chẵn	số nguyên tố chẵn duy nhất
Còn lại thì chúng tôi	đều là số lẻ
Các ước số duy nhất của số nguyên tố	
là 1	và chính nó
Không ai có thể chia tách chúng tôi ra được	Không ai có thể phân tích chúng tôi thành tích được nữa
Chúng tôi không phải hợp số	
Chúng tôi là số nguyên tố	Chúng tôi là số nguyên tố

Một cách để phân loại các số là chia chúng thành số nguyên tố và hợp số. Số nguyên tố chỉ có các ước số là 1 và chính nó. Nó không chia hết cho số nào khác cả. Trong khi đó, hợp số có các ước số khác ngoài 1 và chính nó (ví như 12 không phải số nguyên tố, vì nó có các ước là 1, 2, 3, 4, 6 và 12). Hơn nữa, mỗi số đều có thể phân tích một cách duy nhất thành tích của các số nguyên tố ($12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$).

Không có số nào khác ngoài 12 được tạo thành bằng cách nhân hai số 2 với nhau, rồi nhân tiếp với 3. Vào những năm 1700, Christian Goldbach đã viết cho Leonhard Euler rằng ông tin tưởng có thể chứng minh được mỗi số tự nhiên chẵn khác 2 là tổng của hai số nguyên

tô (ví dụ: $8 = 5 + 3$; $28 = 17 + 11$ hay $23 + 5$). Phát biểu đơn giản này cho đến nay vẫn là một trong số những bài toán chưa giải được của toán học. Cặp số nguyên tố sinh đôi⁽¹⁾, số nguyên tố Mersenne, số nguyên tố Sophie Germain là một vài số nguyên tố thú vị khác mà các nhà toán học tìm ra.

(1) Cặp số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị, ví dụ 3 và 5. Năm 1993, cặp số nguyên tố sinh đôi lớn nhất mà chúng ta biết được cho đến nay đã được Harvey Dubner tìm ra: $(1692923232x10^{12} + 1)$ và 4030 chữ số.

CANTOR VÀ TẬP SỐ THỰC KHÔNG ĐẾM ĐƯỢC

Lí thuyết tập hợp và các số siêu hạn của Georg Cantor là những thành tựu sáng chói. Chứng minh của ông

về tính đếm được của các số hữu tỉ quả thật là rất khéo léo. Tuyệt vời không kém là chứng minh trong đó ông chỉ ra rằng tập các số thực là không đếm được. Một tập vô hạn được gọi là đếm được nếu các phần tử của nó có tương ứng 1-1 với các số tự nhiên. Với các số hữu tỉ⁽¹⁾, ông nghiên cứu ra phương pháp liệt kê tất cả các phân số có thể có và phương pháp để lập ra tương ứng 1-1 giữa nó và các số tự nhiên. Ông thử cách tương tự với tập số thực, nhưng nhận thấy rằng chúng là không đếm được. Vì vậy, ông bắt tay vào việc chứng minh tập số thực là không đếm được bằng cách giả sử chúng là đếm được, rồi đi tìm mâu thuẫn xảy ra khi đó. Đầu tiên, ông giả sử có một danh sách các số thực sắp xếp theo thứ tự nào đó. Ví dụ, các số nằm giữa 0 và 1 với danh sách như sau

•	0	0	1	2	3	4	8	6	7	...
•	0	0	1	1	2	9	8	7	8	...
•	1	9	7	3	0	4	8	3	9	...
•	0	2	8	3	7	1	6	8	4	...
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

(1). Những số có thể biểu diễn dưới dạng phân số hay số thập phân tuần hoàn.

Sau đó, ông nhìn vào các số nằm ở đường chéo của danh sách này. Từ đó, tạo nên một số mới bằng cách lấy các chữ số trên đường chéo và thay thế mỗi chữ số trên đó bằng một chữ số khác (chẳng hạn như ông có thể cộng mỗi chữ số trên đó với 1). Đưa số này về nằm giữa 0 và 1 bằng cách thêm dấu phẩy thập phân ở phía trước nó. Cantor chứng minh rằng danh sách giả sử ban đầu chứa tất cả các số thực giữa 0 và 1, nhưng nó lại không chứa số mới tìm được. Đây chính là mâu thuẫn cần tìm: số mới này phải nằm trong danh sách, nhưng mọi số trong danh sách đều có ít nhất một chữ số nằm trên đường chéo không giống với nó nên nó không thể nằm trong danh sách. Chính vì thế danh sách đã có là không đầy đủ. Chứng minh tương tự có thể áp dụng cho bất kì tập con nào của tập số thực. Vì tập con của tập số thực không đếm được, nên tập số thực cũng là không đếm được.

CHỨNG MINH CỦA EUCLID VỀ TÍNH VÔ HẠN CỦA TẬP CÁC SỐ NGUYÊN TỐ

2, 3, 5, 7,
11, 13, 17,
19, 23, 29,
31, 37, 41, 43, 47, 53,
59, 61, 67, 71, ...

Có vẻ như khi các số tự nhiên càng lớn dần lên, thì số nguyên tố ngày càng ít đi. Chúng ta có thể nghĩ rằng vì chúng dần xuất hiện ít hơn, nên có lẽ một lúc nào đó chúng sẽ dừng lại. Nhưng ngay từ khoảng năm 300 tr.CN, Euclid đã đưa ra chứng minh đầu tiên rằng tập các số nguyên tố là vô hạn. Ông lý giải điều này như sau:

Giả sử n là số nguyên tố lớn nhất.

- Gọi N là tích của tất cả các số nguyên tố hơn bé hoặc bằng n :
 $N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times n$.
- Cộng 1 vào N , gọi tổng là số k : $k = N + 1$.
- k hoặc là số nguyên tố, hoặc là hợp số.
- Nếu k là số nguyên tố, thì k là số nguyên tố lớn hơn số nguyên tố lớn nhất là n vì $k = N + 1$.

Nếu k không phải số nguyên tố, thì k phải có một ước số nguyên tố. Ước số nguyên tố này của k không thể nhỏ hơn hoặc bằng n , vì N chia cho mỗi số này dư 1. Vậy, k phải có một ước số nguyên tố khác lớn hơn n . Ở cả hai trường hợp ta đều nhận được kết quả mâu thuẫn với giả thiết n là số nguyên tố lớn nhất. Vậy, giả thiết của chúng ta là không đúng và do đó tập các số nguyên tố là vô hạn.

Theo thống kê, giữa 1 và 1000 có tất cả 168 số nguyên tố, giữa 1000 và 2000 có 135 số nguyên tố, giữa 2000 và 3000 có 127 số nguyên tố và giữa 3000 và 4000 có 120 số nguyên tố.

ẢO THUẬT VỚI SỐ

NĂM SINH: 1953

1953

SỰ KIỆN QUAN TRỌNG:
NĂM 1980. TÔI ĐÃ
BAY VÀO VŨ TRỤ

1980

+

SỐ TUỔI VÀO NĂM
1994: 41

41

SỐ NĂM TRÔI QUA TỪ
KHI XẢY RA

SỰ KIỆN QUAN TRỌNG
TỚI NĂM 1994: 14

14

3988

Hãy lấy năm sinh của bạn. Cộng nó với năm xảy ra một sự kiện quan trọng trong đời bạn. Sau đó cộng tổng vừa tìm được với số tuổi của bạn vào năm 1994. Cuối cùng cộng thêm số năm trôi qua kể từ khi sự kiện quan trọng xảy ra cho đến năm 1994. Kết quả sẽ luôn là 3988!

CÙNG CHƠI VỚI CÁC CON SỐ

Bất cứ ai yêu thích toán học cũng đều có lúc phải bất ngờ trước những thủ thuật

kỳ lạ của các số. Dưới đây là hai ví dụ dành cho các bạn để tìm hiểu và hi vọng các bạn sẽ thấy thú vị với chúng.

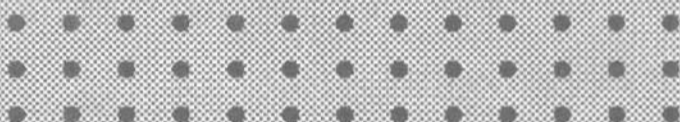
TỔNG VÀ BÌNH PHƯƠNG

$$1+2+1=2^2$$

$$1+2+3+2+1=3^2$$

$$1+2+3+4+3+2+1=4^2$$

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2$$



KIM TỬ THÁP CỦA 1

$$1^2=1$$

$$11^2=121$$

$$111^2=12321$$

$$1111^2=1234321$$

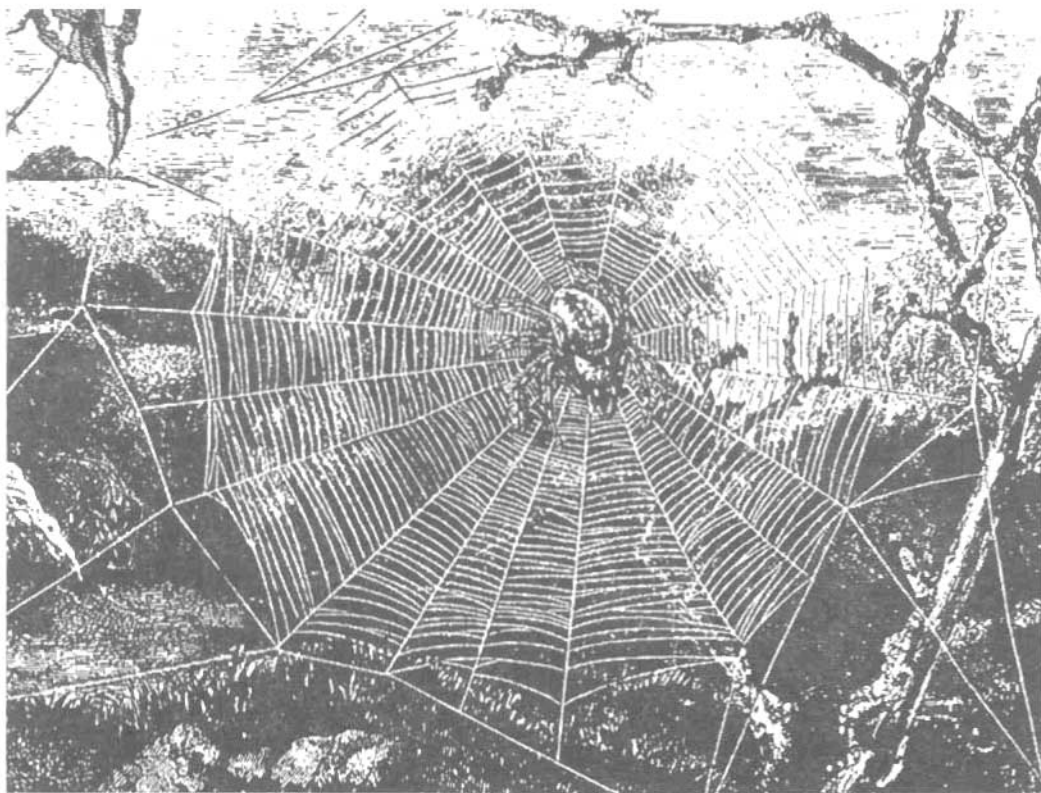
$$11111^2=123454321$$

$$111111^2=12345654321$$

$$1111111^2=1234567654321$$

$$11111111^2=123456787654321$$

... khi nào thì kết thúc?



SỰ KÌ DIỆU CỦA TOÁN HỌC TRONG TỰ NHIÊN

ÔNG MẶT NÓI GÌ VỀ TOÁN HỌC
CÁC HÌNH LỤC GIÁC

SỰ HỒN LOẠN LÀ DÀNH CHO LOÀI CHIM
MỘT CÁI NHÌN CẬN CẢNH VỀ FRACTAL &
TỰ NHIÊN

FRACTAL HÓA BỀ MẶT TRÁI ĐẤT
KHU VƯỜN TOÁN HỌC

TOÁN HỌC TRÊN ĐẦU NGỌN SÓNG

*Tất cả các lĩnh vực của toán học, dù trừu tượng đến
mấy, sớm muộn rồi cũng sẽ ứng dụng được vào
các hiện tượng của thế giới thực.*

—Lobachevsky

*Khi ta cố tách riêng bất kì thứ gì, ta đều nhận ra rằng
nó liên quan đến mọi thứ khác trong vũ trụ.*

—John Muir

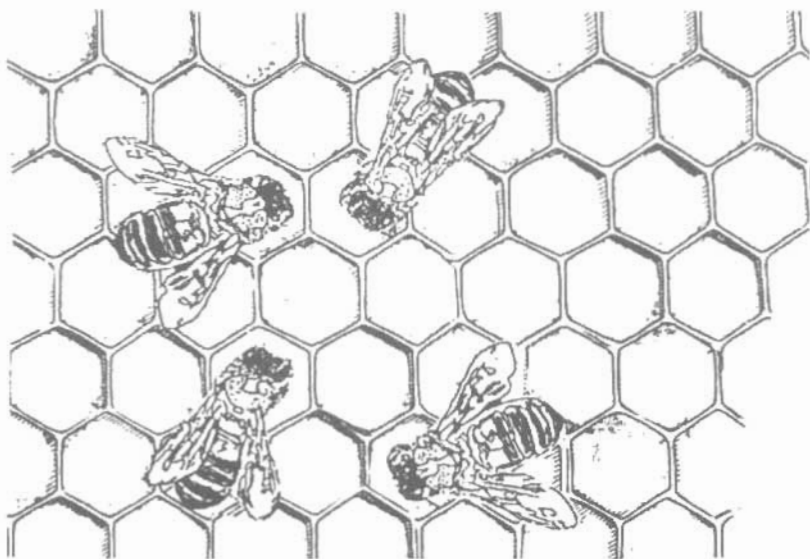
Đã bao giờ bạn ngắm nhìn một chiếc lá và tự hỏi tại sao nó lại có hai nửa giống nhau đến vậy, hoặc để ý nhìn hình ngôi sao rất cân đối ở nhiều bông hoa khác nhau cùng hoa văn hình xoắn ốc trên vỏ sò, quả thông, xoáy trên đầu chúng ta, trên cành nhánh và ở vỏ của các cây gỗ đổ chưa? Tự nhiên chứa đựng đầy rẫy những hiện tượng có liên quan đến toán học. Trong công cuộc tìm hiểu và giải thích cách thức mọi thứ hình thành như thế nào, chúng ta luôn đi tìm những mẫu hình và sự tương đồng có thể đo đạc, phân loại được. Đó chính là lí do vì sao toán học được dùng để giải thích các hiện tượng tự nhiên.

Trong khi tạo hóa vẫn tiếp tục sản sinh ra những kì quan của mình, thì hầu hết chúng ta lại hoàn toàn không biết về khối lượng tính toán và công việc toán học to lớn cần thiết phải làm để giải thích điều gì đó vốn rất bình thường với tự nhiên. Ví như mạng nhện của loài nhện orb trông thật đơn giản, nhưng nó lại là một sáng tạo tự nhiên thật tài tình. Khi cấu trúc đẹp đẽ này được phân tích về mặt toán học, các khái niệm hiện diện trên đó quả thực rất đáng ngạc nhiên: bán kính, dây cung, các đoạn song song, tam giác, góc đồng dạng, hình xoắn ốc lôgarit, đường móc xích và số siêu việt e . Một ví dụ khác là hình dạng các hoa văn trên mai rùa. Để giải thích chúng, toán học về điểm nổi ba, xếp hình lục giác và nhiều tính toán cần được dùng đến. Chương này của cuốn sách sẽ giới thiệu với các bạn một vài kì quan tự nhiên và những khía cạnh toán học ẩn chứa trong đó.

ONG MẬT NÓI GÌ VỀ TOÁN HỌC

Những con ong... nhờ những
suy tính tự nhiên về hình
học... biết rằng lục giác lớn
hơn hình vuông hay hình tròn rất nhiều và sẽ chứa
được nhiều mật hơn với cùng một lượng nguyên vật liệu xây tổ.
—Pappus ở Alexandria

Loài ong không được học lý thuyết lát mặt phẳng, nhưng con nhện orb cũng không biết gì về xoắn ốc lôgarit cả. Nhưng giống như rất nhiều thứ khác trong tự nhiên, những công trình kiến trúc của các loài côn trùng và động vật nhiều khi có thể phân tích được theo toán học. Tự nhiên luôn sử dụng các hình thức có hiệu quả cao nhất, những hình thức đòi hỏi ít sức lực và



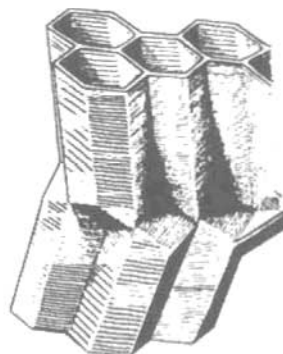
nguyên vật liệu hơn. Liệu có phải đây chính là sợi dây liên kết tự nhiên và toán học? Tự nhiên đã nắm vững nghệ thuật giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, các bài toán đại số tuyến tính và tìm ra lời giải tối ưu nhất cho các bài toán có điều kiện.

Chỉ cần chú ý quan sát loài ong mật bạn sẽ thấy cả một thế giới toán phong phú mở ra trước mắt.

Hình vuông, tam giác và lục giác là ba loại đa giác đều duy nhất có thể lát kín mặt phẳng. Trong số ba loại đó thì với cùng một diện tích đã cho, lục giác có chu vi nhỏ nhất. Điều này rất có ý nghĩa với loài ong khi chúng xây dựng tổ của mình theo hình lăng trụ lục giác, sẽ tốn ít sáp và mất ít công sức hơn để bao kín cùng một không gian so với xây theo hình lăng trụ vuông hay lăng trụ tam giác. Các bức tường của mỗi ngăn tổ ong dày khoảng $1/80$ inch ($1 \text{ inch} = 2,54\text{cm}$), nhưng lại có thể chịu được một khối lượng gấp 30 lần khối lượng của chúng. Điều này giải thích vì sao hình tổ ong nhìn lại có vẻ nặng nề như vậy. Mỗi tổ ong kích thước khoảng $14,5 \text{ inch} \times 8,8 \text{ inch}$ có thể chứa hơn 5 pound mật ($1 \text{ pound} = 0,454\text{kg}$), trong khi chỉ cần khoảng 1,5 ounce ($1 \text{ ounce} = 28,35\text{g}$) sáp để xây dựng nó. Những chú ong xây các lăng trụ lục giác với ba loại mặt cắt hình thoi, còn các bức tường của mỗi ngăn tạo với nhau một góc đúng 120° . Chúng xây tổ cùng một lúc trên các vùng khác nhau, nhưng cuối cùng ghép lại thành một tổ ong vừa khít, không có chút sai lệch nào. Tổ được xây thẳng đứng từ trên xuống dưới, các chú ong sử dụng chính các phần thân thể của mình như là dụng cụ để đo đạc. Thực tế, chúng dùng đầu mình như là những dây dọi.

Một “dụng cụ” tuyệt vời khác của loài ong là “com pa”. Định hướng của ong chịu ảnh hưởng của từ trường trái đất. Chúng có thể cảm nhận những thay đổi rất nhỏ của từ trường trái đất mà chỉ những từ kế rất nhạy cảm mới phát hiện ra. Điều này giải thích vì sao những con ong trong cùng một đàn tìm ra một vị trí mới và cùng nhau bắt đầu xây tổ từ nhiều hướng khác nhau mà không cần bất kỳ một con ong nào đứng ra chỉ đạo. Tất cả ong trong đàn sẽ định hướng tổ mới giống như tổ cũ của chúng vậy.

Trong hình minh họa, các ngăn của tổ ong xếp sát với nhau. Những chú ong đã bịt các đầu của lỗ ong bằng nửa khối mười hai mặt hình thoi. Ngoài ra, chúng xây tường của mỗi ngăn nghiêng đúng 13° để ngăn cản mật chảy ra ngoài trước khi các đầu được bịt kín bởi các mái làm bằng sáp.



Giao tiếp giữa các chú ong cũng là một điểm quan tâm thú vị nữa. Các ong thợ quay về tổ sau khi đi trinh sát sẽ thông báo hướng của nguồn thức ăn mà chúng tìm ra bằng cách gửi các tín hiệu dưới dạng một "điệu bay". Chúng có thể trao đổi thông tin về thức ăn và khoảng cách của thức ăn so với tổ. Hướng của điệu bay so với mặt trời chỉ hướng của thức ăn, còn thời gian bay lượn chỉ ra khoảng cách. Điều ngạc nhiên là các chú ong "biết" rằng *khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm là đoạn thẳng*. Có lẽ đây chính là xuất xứ của từ "beeline"⁽¹⁾. Sau khi ong thợ bay từ bông hoa này tới bông kia một cách ngẫu nhiên để hút đầy mật, chúng biết bay theo con đường thẳng ngắn nhất để về tổ của mình.

Loài ong tiếp nhận sự đào tạo mang tính toán học này thông qua gen di truyền. Thật bất ngờ khi ta phân tích các khía cạnh của tự nhiên từ quan điểm toán học. Những khám phá trên đây về cuộc sống của loài ong cũng không phải là ngoại lệ của tự nhiên. Ở đây chúng ta nhận thấy sự hiện diện của tối ưu hóa vật liệu và công sức, lát mặt phẳng và xếp hình không gian, hình lục giác, lăng trụ lục giác, khối mười hai mặt hình thoi, định lí hình học, từ trường, mã hóa và các kĩ thuật xây dựng tuyệt vời.

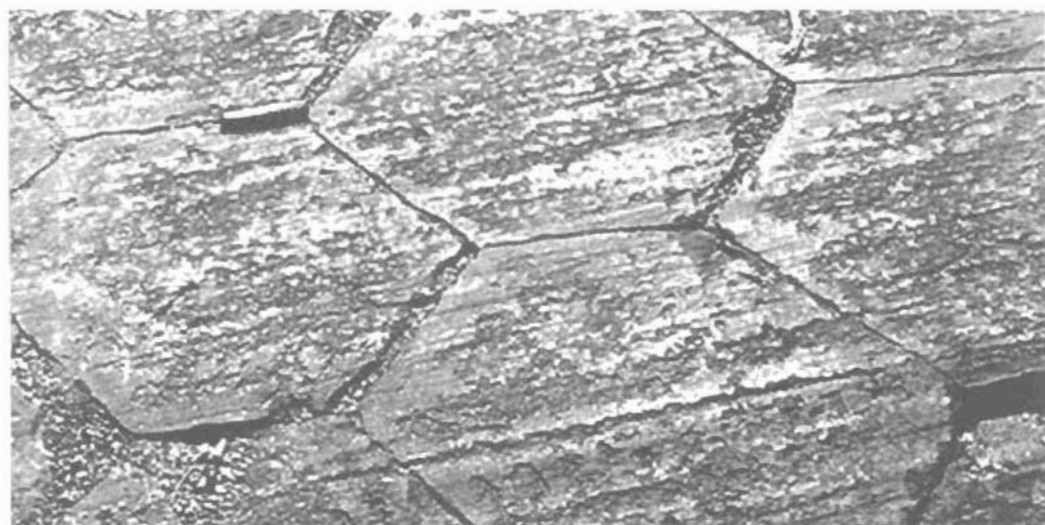
(1). *Đường ong bay*.

CÁC HÌNH LỤC GIÁC

*Thế giới tự nhiên chính là
mảnh đất màu mỡ nhất cho
các khám phá toán học.*

—*Joseph Fourier*

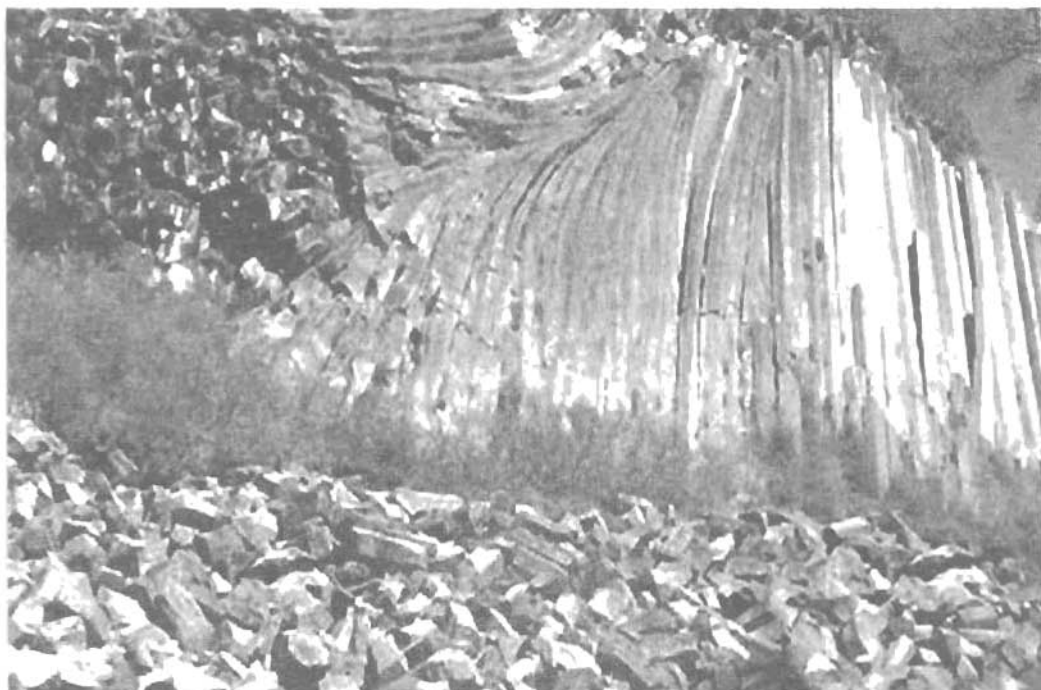
Mối liên hệ giữa toán học và tự nhiên rất đa dạng và phong phú. Các đối tượng, hình thể từ nhiều lĩnh vực khác nhau của toán luôn được tìm thấy trong các hiện tượng tự nhiên xung quanh ta.



Tự nhiên cũng tạo nên các hình lục giác đều trên đá. Viện bảo tàng quốc gia Devils Postpile, hồ Mammoth, California. Ảnh chụp bởi Margaret Goodrich.

Có gì đặc biệt về lục giác đều mà trong các hiện tượng tự nhiên nó cứ lặp đi lặp lại như vậy? Sự hình thành và phát triển của mọi vật luôn bị chi phối bởi không gian và vật chất xung quanh chúng. Hình lục giác đều là một trong ba đa giác đều⁽¹⁾ có thể phủ kín mặt phẳng.

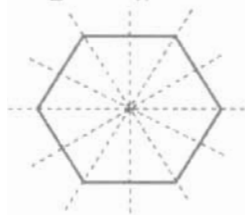
(1). Đa giác đều là đa giác có các cạnh và các góc bằng nhau.



Viện bảo tàng quốc gia Devils Postpile, hồ Mammota, California. Ảnh chụp bởi Margaret Goodrich.

Trong số ba hình đó (lục giác, hình vuông và tam giác đều) thì lục giác đều bao phủ một diện tích lớn nhất với lượng nguyên vật liệu xây dựng cần thiết là nhỏ nhất. Một điểm đặc biệt khác của lục giác đều là nó có 6 trục đối xứng, cho phép nó quay nhiều lần mà không bị biến đổi. Hình cầu, hình bao kín một vùng có thể tích lớn nhất với diện tích bề mặt nhỏ nhất, cũng có liên hệ với lục giác đều. Khi các hình cầu được đặt sát nhau vào trong một chiếc hộp (như trong hình minh họa cuối trang 137), mỗi mặt cầu tiếp xúc với 6 mặt cầu khác. Khi ta vẽ tiếp tuyến của hình cầu tại các tiếp điểm đó thì hình ngoại tiếp mỗi hình cầu là một lục giác đều. Nếu nghĩ về mặt cầu như những bong bóng xà phòng, chúng ta sẽ có một giải thích đơn giản cho câu hỏi vì sao một đám bong bóng lại nối nhau tại nơi

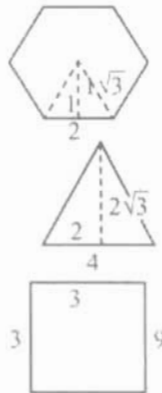
được gọi là điểm nối ba - ba góc 120° . Đây cũng chính là số đo mỗi góc trong của lục giác đều. Điểm nối ba xuất hiện trong nhiều lĩnh vực, như sự hình thành nhân của lõi ngổ, trong quả chuối và các vết nứt trên mặt đất khô hạn. Những khám phá sau này về sự hiện diện của lục giác đều trong tự nhiên cũng không kém phần thú vị so với những phát hiện đầu tiên về chúng trên lưng rùa, tổ ong hay hình dáng của các tinh thể. Ngày nay các nhà khoa học bị cuốn hút vào hình ảnh của lục giác đều ở bên ngoài vũ trụ. Từ năm 1987 các nhà thiên văn học đã tập trung sự chú ý vào Large Magellanic Cloud⁽¹⁾, nơi



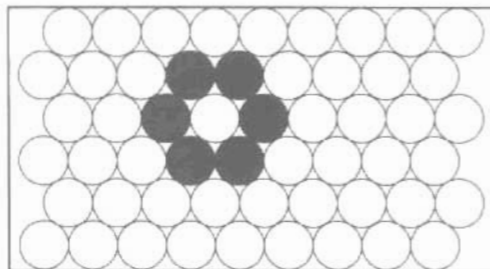
Sáu trục đối xứng của lục giác đều

xuất hiện sao băng 1987A. Đó không phải là lần đầu tiên các bong bóng khí được quan sát thấy cùng với các vụ nổ của những ngôi sao, nhưng đó lại là lần đầu các bong bóng khí xuất hiện thành từng đám dưới dạng tổ ong. Lifan

Wang của trường Đại học Manchester (Anh) đã tính được tổ ong này có kích thước khoảng 30×90 năm ánh sáng và bao gồm khoảng 20 bong bóng có bán kính chừng 10 năm ánh sáng. Wang cho rằng một cụm

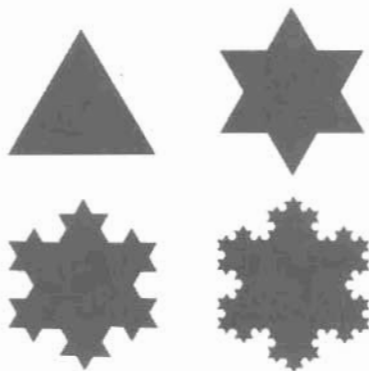


Giá trị chu vi của lục giác đều là 12 đơn vị chiều dài. Khi đó diện tích của lục giác đều là $6\sqrt{3} \approx 10,4$. Tam giác đều có diện tích là $4\sqrt{3} \approx 6,9$, còn hình vuông có diện tích là 9.



(1) Thiên hà vệ tinh của dải Ngân hà.

sao có kích thước như nhau vận động với cùng tốc độ trong vài nghìn năm qua đã tạo ra những cơn bão từ, chúng làm cho các bong bóng khí xếp cạnh nhau như các hình lục giác đều.



Bốn bước đầu tiên hình thành đường bông tuyết. Bắt đầu với một tam giác đều, chia mỗi cạnh của nó thành ba phần đều nhau. Xóa đoạn ở giữa, từ đó vẽ một mũi nhọn tạo với đoạn bị xóa một tam giác đều.

Cuối cùng, khi quan sát một bông tuyết trong tự nhiên, chúng ta nhận thấy nó có đối xứng lục giác và là một minh họa cho hình học fractal. Bông tuyết có hình dạng của lục giác đều. Quá trình vận động, biến đổi của nó được mô phỏng bởi đường bông tuyết Koch. Fractal này được tạo thành từ các tam giác đều như minh họa trong hình vẽ.

Như vậy, mối liên hệ giữa các tam giác đều, lục giác đều và fractal bông tuyết đã kết nối hình học Euclid và phi Euclid với nhau.

Các vật thể trong tự nhiên vẫn luôn chứa đựng rất nhiều điều thú vị khiến ta bị lôi cuốn mà bắt tay vào khám phá toán học. Tự nhiên có cách riêng để đạt đến sự hài hòa và cân bằng tinh tế trong quá trình sáng tạo vạn vật. Chia khóa để tìm hiểu các công trình của tự nhiên chính là toán học và khoa học. Galileo Galelei đã thể hiện điều đó rất rõ ràng khi ông phát biểu: “Vũ trụ được ghi lại bởi... ngôn ngữ của toán học”. Các công cụ toán cho chúng ta phương tiện tìm hiểu, giải thích và mô phỏng lại các hiện tượng tự nhiên. Khám phá này sẽ dẫn ta tới khám phá khác. Liệu phát hiện về lục giác đều ở bên ngoài vũ trụ sẽ dẫn chúng ta tới đâu? Chỉ thời gian mới có thể trả lời được.

Bạn đã từng bị mê hoặc khi ngắm nhìn đàn chim chao lượn trên bầu trời hay nhịp nhàng sà từ nơi này qua nơi khác chưa?

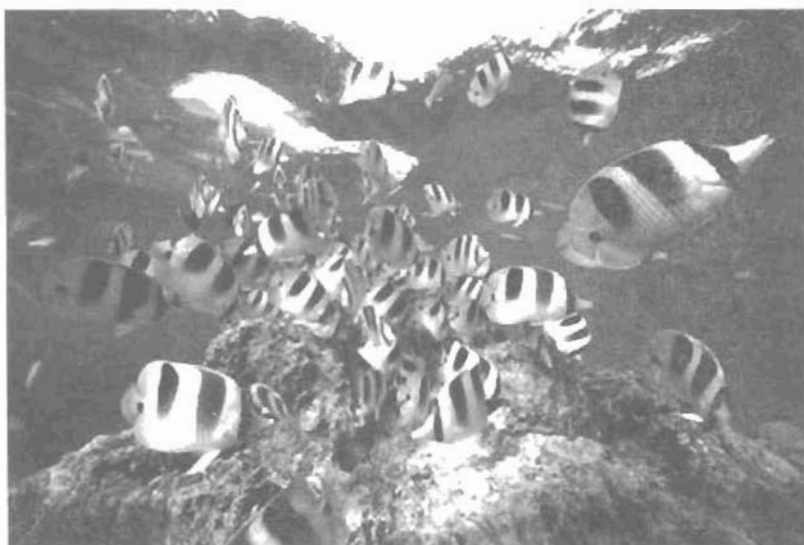
SỰ HỖN LOẠN LÀ DÀNH CHO LOÀI CHIM



Một đàn mòng biển. Aptos, California.

Tại sao chúng lại không va vào nhau? Nhà động vật học Frank H. Heppner muốn có câu trả lời cho những câu hỏi đó. Sau khi vất vả quay phim và nghiên cứu các đoạn phim về rất nhiều đàn chim, Heppner kết luận rằng loài chim không có con đầu đàn. Chúng bay trong trạng thái cân bằng động với những con ở mép ngoài và luôn thay đổi luân phiên vị trí phía ngoài này với nhau sau một khoảng thời gian ngắn. Trước khi biết đến lý thuyết hỗn loạn và máy tính, ông đã không thể giải thích được chuyển động trong đàn của loài chim.

Với những khái niệm từ lý thuyết hỗn loạn, Heppner giờ đã phát minh ra một chương trình máy tính mô phỏng các chuyển



động có thể có của đàn chim. Ông lập ra 4 quy tắc đơn giản⁽¹⁾ dựa trên hành vi của chúng và dùng các hình tam giác tượng trưng cho đàn chim bay. Khi độ mạnh của mỗi quy tắc thay đổi thì trên màn hình máy tính đàn chim đang bay theo hình tam giác cũng sẽ thay đổi cách bay theo một số hình dạng quen thuộc nào đó. Heppner không nói rằng chương trình của ông là cần thiết trong mô phỏng cách thức chuyển động của đàn chim, nhưng nó quả thực cho chúng ta một cách giải thích về việc các đàn chim chuyển động như thế nào và tại sao lại như vậy. Có vẻ như lời giải đáp một lần nữa lại chính là lí thuyết hỗn loạn.

(1). (a) Những con chim bị thu hút vào một tiêu điểm hoặc chỗ trú ngụ; (b) Các con chim thu hút lẫn nhau; (c) Chúng muốn duy trì một tốc độ cố định; (d) Đường bay của chim bị thay đổi bởi các hiện tượng tự nhiên, ví dụ như gió mạnh.

CÁI NHÌN CẬN CẢNH VỀ FRACTAL VÀ TỰ NHIÊN

Fractal giờ đã được nhắc đến như là hình học của tự nhiên. Mặc dù có vô số ví dụ về các hình thuộc hình học Euclid xuất hiện trong tự nhiên (lục giác đều, vòng tròn, lập phương, tứ diện, hình vuông, tam giác...), nhưng sự thất thường của tự nhiên dường như luôn tạo ra những vật thể vượt quá tầm mô tả của Euclid. Trong số các vật thể đó, fractal là minh chứng rõ ràng nhất. Chúng ta biết rằng hình học Euclid rất hiệu quả trong việc mô tả những vật thể kiểu như tinh thể và tổ ong, nhưng lại bị hạn chế khi mô tả bắp ngô,

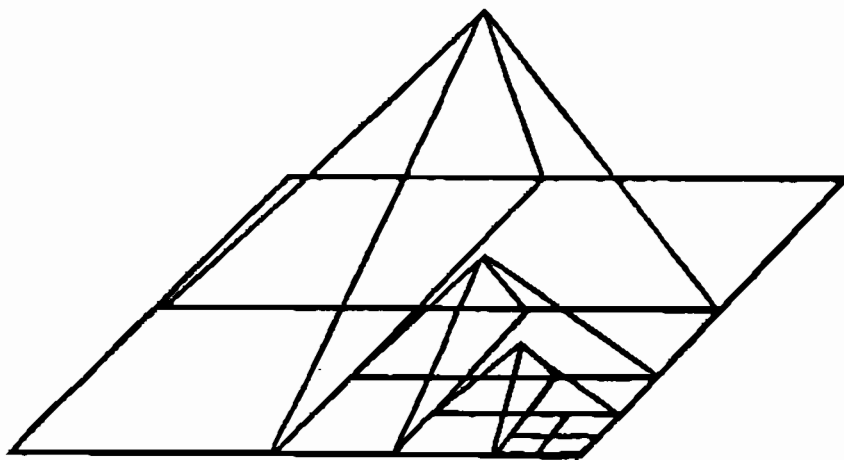


Dòng dung nham từ núi lửa Kilauea, Hawaii.

vân gỗ, đám mây, rễ gừng hay những đường bờ biển. Trong khi fractal hình học được dùng để miêu tả những đối tượng như lá dương xỉ hay bông tuyết, thì các fractal ngẫu nhiên được mô

phỏng trên máy tính để miêu tả dòng dung nham của núi lửa và địa hình của những ngọn núi.

Hình học Euclid bắt nguồn từ thời Hy Lạp cổ đại - khoảng năm 300 tr.C.N với bộ *Elements* (Cơ bản) của Euclid - trong khi fractal mới chỉ ra đời vào những năm 1800. Trên thực tế, thuật ngữ "fractal" còn chưa được nghĩ ra cho đến năm 1975 Benoit Mandelbrot đặt ra từ này. Cùng với sự ra đời của fractal, chúng ta đã có một hình học đủ khả năng miêu tả vũ trụ không ngừng biến đổi này.



Fractal được coi là có số chiều phân số. Trong hình học Euclid, điểm có 0 chiều, đường thẳng có 1 chiều và mặt phẳng có 2 chiều. Vậy còn đường răng cưa thì sao? Trong lĩnh vực fractal, số chiều của đường răng cưa được xem là nằm giữa 1 và 2. Bắt đầu từ một đoạn thẳng, chia nó thành 3 phần và dựng lên một mũi nhọn như đã làm với đường bông tuyết, số chiều của nó sẽ ở giữa 1 và 2. Nếu chúng ta bắt đầu với một hình chữ nhật, một vật thể 2 chiều, chia nó thành 4 phần và dựng lên trên phần nằm giữa một hình chóp, chúng ta sẽ thu được một fractal có số chiều nằm giữa 2 và 3.

FRACTAL HÓA BỀ MẶT TRÁI ĐẤT

Hãy chọn một châu lục, như Nam Mỹ chẳng hạn, làm ví dụ. Giả sử chúng ta muốn đo chiều dài đường bờ biển của Nam Mỹ. Trong toán học, chúng ta biết rằng độ dài có thể đo bằng bất kì đơn vị độ dài nào mà chúng ta muốn như foot, inch, mét, dặm, ki-lô-mét. Không phụ thuộc vào đơn vị được chọn, chúng vẫn biểu diễn cùng một độ dài, chỉ có điều trong các đơn vị đo khác nhau. Nhưng nếu đo đường bờ biển của Nam Mỹ bằng ki-lô-mét, và sau đó đo bằng mét, kết quả nhận được sẽ khác nhau nếu chúng ta coi bờ biển về bản chất là fractal. Khi đơn vị đo ngày càng nhỏ, ta có thể đo được nhiều vịnh và bán đảo hơn. Nói cách khác, về lí thuyết chúng ta có thể nhận được nhiều chi



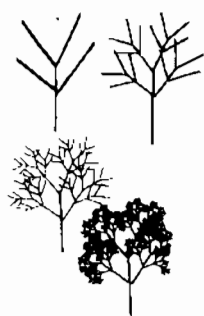
tiết hơn nếu giảm liên tục độ lớn của đơn vị đo và cũng có nghĩa là chiều dài của đường bờ biển sẽ dần tăng lên.

Đường bờ biển trong hình học fractal được xem là có

chiều dài vô tận bởi mỗi vịnh nhỏ, mỗi đơn vị của cát trên đó và số lượng các đơn vị của cát luôn luôn thay đổi, cũng giống như sự hình thành của đường bông tuyết vậy (xem trang 138).

KHU VƯỜN TOÁN HỌC

FRACTAL có thể hiện diện như các vật thể biến đổi một cách đối xứng hoặc không đối xứng ngẫu nhiên. Trong cả hai trường hợp, fractal biến đổi theo các quy tắc toán học hoặc các mô hình về chúng được xây dựng để mô tả và điều khiển sự biến đổi của vật thể ban đầu. Bạn hãy nghĩ về



Fractal hình cây

fractal hình học như một mô hình phát triển không ngừng, nó tái tạo liên tục nhưng với kích thước nhỏ hơn.

Chính vì thế khi một phần của fractal hình học được phóng to, trông nó giống y như lúc ban đầu. Trái lại, khi một phần của vật thể trong hình học Euclid, như đường tròn chẳng hạn, được phóng to, nó trở nên ít cong hơn. Cây dương xỉ là một ví

“Xin chào buổi sáng tốt lành”, cô làm vườn cất tiếng chào bình minh và cây cỏ. Cô không biết nhiều về những điều lạ lùng đang tiềm ẩn trong những chiếc lá và đất đai màu mỡ. Ở sâu dưới rễ cây là những **fractal** và **mạng lưới** và từ những cây hoa cúc vạn thọ, iris, cúc, các con **số Fibonacci** đang nhìn chăm chăm vào cô.

Cô bắt đầu công việc hàng ngày của mình ở khu vườn. Tại đó, chỗ nào cũng có một điều kì lạ xuất hiện, nhưng cô hoàn toàn không hay, chỉ say mê ngắm nhìn những vẻ đẹp rực rỡ mà thiên nhiên ban tặng đang tỏa hương, khoe sắc.

Đầu tiên cô đi phát quang các cây dương xỉ, bỏ hết đi những lá già héo úa, để phơi ra những chồi non, cô không nhận thấy những **xoắn ốc đẳng giác** đang mím chồi chào cô và những chiếc lá non dạng **fractal** trên thân cây dương xỉ. Từ đầu một cơn gió nhẹ phảng phất mang mùi hương của cây kim ngân. Nhìn lên, cô thấy chúng đã vươn um tùm trên bờ rào và len lỏi cả vào

dụ điển hình về tính tự tái tạo của fractal. Nếu bạn chỉ nhìn vào một phần của fractal dương xỉ, trông nó y hệt như lá dương xỉ lớn ban đầu. Mô hình fractal dương xỉ có thể xây dựng được trên máy vi tính.

ĐỒ THỊ: Là những biểu đồ toán học dùng để biểu diễn hình ảnh đơn giản của một vấn đề hay hoàn cảnh. Các đồ thị đã được Euler sử dụng trong bài toán Bảy cây cầu Königsberg (xem mục "Sự cuốn hút của logic, giải trí và các trò chơi"). Ông đưa bài toán về một đồ thị đơn giản để phân tích rồi mới tiến hành giải. Ngày nay, đồ thị là công cụ dùng trong tô pô.

CÁC SỐ FIBONACCI

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... Fibonacci (Leonardo da Pisa) là một trong những nhà toán học hàng đầu thời trung cổ. Mặc dù ông có đóng góp đáng kể trong lĩnh vực số học, đại số và hình học, nhưng ngày nay ông lại nổi tiếng nhờ dãy số nghiệm của một bài toán ít được biết đến trong cuốn sách **Liber Abaci**

đám cây đậu Hà Lan. Cô quyết định cần phải xén tỉa một chút. Cô không biết rằng chính những xoắn đing ốc đã gây ra việc này, các dây leo xoắn về bên trái của cây kim ngân cuộn quanh các dây xoắn về phía phải của cây đậu Hà Lan. Cần phải có đôi bàn tay khéo léo của cô mới có thể không làm tổn thương tới những mầm đậu non xinh xắn.

Tiếp đến cô đi tới đám cỏ dại dưới cây cọ mà cô trồng với ý định đem lại cho khu vườn một vẻ mới lạ. Cành cọ đu đưa đu đưa khê khằng trong gió, nhưng cô không biết rằng những đường thân khai đang nhẹ nhàng cọ lên vai cô.

Cô
nhìn qua
những
cây ngô.
"Ha!", Cô
reo thầm.
Cô đã
từng băn
khoăn khi
quyết định
trồng ngô,
nhưng



(Sách tính toán) của mình. Vào thế kỉ thứ XIX, nhà toán học người Pháp Edouard Lucas xuất bản một cuốn



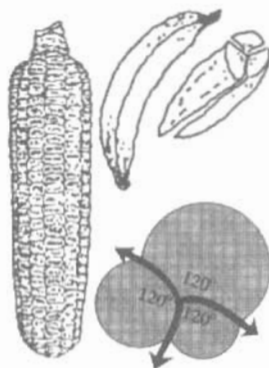
sách toán giải trí, trong đó có nhắc đến bài toán này. Đó là lần đầu tiên cái tên “Fibonacci” được đặt cho dãy số. Trong tự nhiên dãy số này hiện diện ở các loài cây:

- Những bông hoa với số cánh là một số

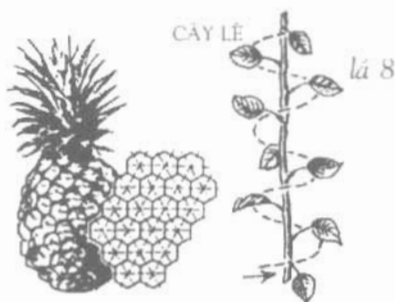
Fibonacci (trillium, hoa hồng đại, bloodroot, cúc vạn thọ tây, columbine, hoa ly, iris).

- Sự sắp xếp của lá cây, cành cây và các cuống lá, gọi là **phyllotaxis** (có nghĩa là “kiểu sắp xếp lá”). Chọn một chiếc lá ở trên cành và đếm các lá (giả sử không lá nào bị rụng) cho đến khi bạn chạm vào điểm gần nhất trên cành nằm thẳng với điểm có lá ban

giờ đây cô cảm thấy rất vui sướng khi nhìn đám ngô non lớn lên tươi tốt. Không hay biết gì về cô cả, các **điểm nổi ba** của lõi ngô vẫn sẽ dẫn thành hình bên trong bắp ngô.

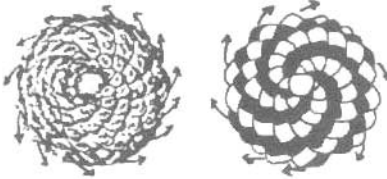


Ồi, khu vườn mới tươi tốt làm sao! Cây cỏ như bừng lên một sức sống mới! Ngắm những chiếc lá non trên cây gỗ thích, cô biết rằng có gì đó vốn rất dễ chịu trong hình dáng của chúng,





đầu đã chọn. Số lượng lá vừa đếm được (không tính chiếc lá đầu tiên bạn chọn) trên rất nhiều loại cây là một số Fibonacci, như ở cây du, anh đào, cây lê chẳng hạn.



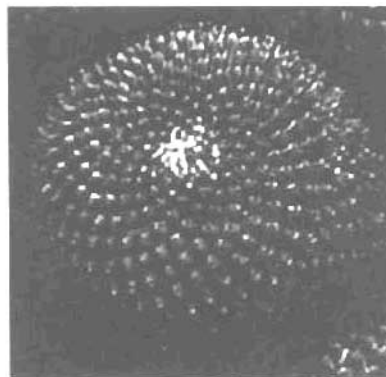
- **Số nón thông:** Nếu đếm số đường xoáy về phía trái và phía phải trên quả thông, thì hai số này thường là hai số Fibonacci liên tiếp. Điều này đúng với cả hạt hoa hướng dương và các loài hoa khác. Điều tương tự cũng xảy ra với quả dứa. Nhìn vào tâm của quả dứa và đếm số vòng xoáy phải và trái tạo bởi các hình lục giác. Chúng sẽ là hai số Fibonacci liên tiếp.

ĐƯỜNG XOẮN ỐC VÀ ĐƯỜNG ĐỈNH ỐC: Đường xoắn ốc là hình toán học xuất hiện ở rất nhiều mặt trong tự nhiên, như đầu cong của lá dương xỉ non,

những **trục đối xứng** của tự nhiên đã hoàn thành công việc một cách hoàn hảo.

Còn những **kiểu sắp xếp lá** trong đám lá mới đâm chồi thì có lẽ chỉ những con mắt tinh tế mới nhìn ra được.

Nhìn ra xung quanh, cô hướng về luống cà rốt. Cô cảm thấy rất tự hào vì chúng mọc lên tươi tốt, và nhận thấy cần phải tỉa thưa đi một chút để cà rốt lớn lên đều như nhau. Cô không muốn để mặc cho tự nhiên điều chỉnh, **sắp xếp** đều đặn những củ cà rốt trên luống đất.



Cô cũng không hay biết rằng khu **vườn** đầy những xoắn ốc đẳng giác. Chúng hiện diện ở đài

lá nhỏ, vỏ sò, ốc xoắn, bão, quả thông, dải ngân hà, xoáy nước. Có nhiều loại xoắn ốc như đường xoắn ốc phẳng, xoắn ốc trong không gian ba chiều, xoắn về bên phải và bên trái, xoắn ốc đẳng giác, xoắn ốc lôgarit, hyperbolic, xoắn ốc Archimedes. Đường đinh ốc chỉ là một ví dụ trong vô số các loại đường xoắn ốc mà toán học mô tả. Đường xoắn ốc đẳng giác xuất hiện ở những sinh vật trong tự nhiên như vỏ ốc, đài hoa hướng dương, mạng của loài nhện orb. Một vài tính chất của đường xoắn ốc đẳng giác là: các góc tạo bởi tiếp tuyến và bán kính của nó bằng nhau. Vì thế mà nó có tên là “đẳng giác”; độ dài các đoạn tiếp tuyến này tăng theo cấp số nhân nên một bán kính bất kì bị chia thành các đoạn có độ dài tăng theo cấp số nhân; hình dáng của đường xoắn ốc đẳng giác không đổi khi nó lớn lên.

ĐƯỜNG THÂN KHAI: Khi chiếc dây thừng bị quấn

hoa hoa hướng dương và nhiều loài hoa khác. Rất nhiều loài lớn lên tạo thành hình xoắn này bởi chúng giữ nguyên được hình dạng trong quá trình phát triển.

Trời trở nên ấm hơn, vì thế cô làm vườn quyết định sẽ tiếp tục công việc trồng trọt khi mặt trời lên. Trong khi làm việc, cô nhìn ngắm lại toàn bộ khu vườn lần cuối, những cụm hoa, rau củ và cây cối khác mà cô đã mất bao công lao chọn lựa. Nhưng một lần nữa, có điều gì đó lại thoát khỏi ánh mắt cô. Khu vườn này của cô đầy rẫy những hình cầu, nón, đa diện và những khối



Có rất nhiều kiểu đối xứng hiện diện trong khu vườn. Chẳng hạn như trong hình này, chúng ta có thể nhìn thấy tâm đối xứng trên hoa của cây cải xanh và trục đối xứng trên lá của nó.

hoặc tháo quần xung quanh một đường cong khác (ở đây là đường tròn), nó sẽ mô tả một đường thân khai. Đường thân khai là hình dáng được tìm thấy ở mỏ chim đại bàng, vây cá mập và mép lá cọ.



ĐIỂM NỐI BA: Điểm nối ba là điểm đồng quy của ba đoạn thẳng, góc giữa các đoạn đều là 120° . Rất nhiều hiện tượng trong tự nhiên là kết quả của các giới hạn gây ra bởi các đường biên và lợi ích không gian. Điểm nối ba là điểm cân bằng mà mỗi hiện tượng tự nhiên đều hướng tới. Ngoài ra người ta còn thấy nó trong các đám bong bóng xà phòng, trong sự hình thành hạt ở lõi ngô và các vết nứt trên mặt đất hay hòn đá.

ĐỐI XỨNG: Đối xứng là trạng thái cân bằng hoàn hảo mà người ta thấy và cảm nhận được khi nhìn vào thân thể

hình học khác, nhưng cô không nhận ra chúng.

Khi thiên nhiên phô bày những kỳ quan của chúng trong khu vườn, hầu hết mọi người đều không nhớ tới vô số những phép tính và khái niệm toán học đã trở nên rất bình thường ở trong tự nhiên. Tự nhiên rất biết cách đối phó với sự hạn chế của nguyên vật liệu và không gian mà vẫn tạo nên những hình dáng hài hòa nhất. Và cứ thế, mỗi ngày xuân, cô gái lại bước vào khu vườn với niềm hi vọng trong ánh mắt.

Cô sẽ ngắm nhìn trăm cây nở tốt, muốn hoa đua nở mỗi ngày mà không hề biết đến những vẻ đẹp toán học đang nở hoa trong chính khu vườn của mình.

của một con bướm, chiếc lá, cơ thể con người hay như khi ngắm nhìn sự hoàn hảo của một hình tròn. Xét từ quan điểm toán học, một vật thể gọi là có tâm đối xứng nếu người ta có thể tìm thấy một đường thẳng chia nó ra làm hai phần giống nhau sao cho nếu gấp vật thể lại dọc theo đường thẳng đó thì hai phần vừa chia sẽ trùng khít lên nhau. Vật thể được gọi là có tâm đối xứng nếu nó có vô số các trục đối xứng chứa cùng một điểm xác định, ví dụ hình tròn có

tâm đối xứng với tâm đối xứng là tâm hình tròn.

LÁT MẶT PHẲNG: Để xếp hình phủ kín một mặt phẳng, người ta sử dụng các viên gạch có hình dạng nào đó sao cho khi lát không có khe hở nào và không có hai viên gạch nào xếp chồng lên nhau, ví dụ như hình lục giác đều, hình vuông, hay các hình khác. Đối với không gian thì người ta xếp hay làm đầy nó bằng các vật thể ba chiều như khối lập phương hay khối bát diện cụt.

TOÁN HỌC TRÊN ĐẦU NGỌN SÓNG

Nếu bạn là một vận động viên lướt sóng thì hẳn sẽ biết đôi khi thật khó mà đoán trước được khi nào con sóng sẽ nổi lên. Thỉnh thoảng, chúng xuất hiện từ phía xa của biển khơi, nhưng khi bạn lại gần thì chúng đã tan đi. Vì thế có lúc bạn phải chờ con sóng đến hàng giờ liền nhưng cũng có lúc chúng ào ạt kéo đến, và thế là bạn lại có quá nhiều con sóng để lựa chọn. Có lẽ không cần thiết phải nhắc lại rằng lý thuyết sóng và hoạt động của sóng là một hệ thống phức tạp. Rất nhiều yếu tố tác động lẫn nhau tạo nên sóng biển. Gió, động đất, đường rẽ nước của



Sóng biển, Aptos, California.

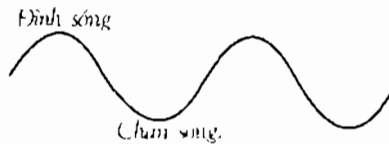
các con tàu và dĩ nhiên là cả sức hút của Mặt Trăng, Mặt Trời tạo nên thủy triều, tất cả những yếu tố này đều ảnh hưởng đến đại dương. Sóng biển chỉ lan truyền trên mặt nước. Những hình dạng sóng nhấp nhô này ít nhiều cũng có tính ngẫu nhiên khi mà rất nhiều các nhiễu loạn và yếu tố như thế tác động lẫn nhau.

Nhiều nghiên cứu và tính toán về sóng biển đã được tiến hành vào những năm 1800. Các quan sát trên biển và trong phòng thí nghiệm đã đưa các nhà khoa học đến những kết luận thú vị. Mọi thứ bắt đầu từ năm 1802 khi Franz Gertner trình bày lí thuyết sóng ở Cộng hòa Séc. Trong các quan sát của mình, ông ghi lại cách thức các phân tử nước của một con sóng chuyển động theo vòng tròn như thế nào. Nước trên đỉnh sóng (điểm cao nhất của con sóng) chuyển động cùng hướng với con sóng, còn ở chân sóng (điểm thấp nhất của con sóng) thì chuyển động theo chiều ngược lại. Trên bề mặt sóng, mỗi phân tử nước di chuyển theo một quỹ đạo tròn trước khi quay trở lại vị trí ban đầu của mình. Đường tròn này có đường kính bằng chiều cao của sóng. Có rất nhiều vòng tròn sinh ra bởi các phân tử nước dọc khắp độ sâu của nước. Phân tử nước càng ở dưới thì vòng tròn càng nhỏ lại. Trên thực tế, người ta tìm ra ở độ sâu bằng $1/9$ chiều dài sóng (khoảng cách ngang giữa hai đỉnh sóng liên tiếp), đường kính vòng tròn tại đó bằng khoảng một nửa đường kính vòng tròn của phân tử trên mặt nước.

Do các con sóng gắn chặt với những phân tử chuyển động tròn, đồng thời các đường hình sin, đường xiclôit cũng phụ thuộc vào chúng, nên sẽ không có gì ngạc nhiên khi phương trình của các đường cong toán học này được dùng để mô tả sóng biển. Nhưng người ta khám phá ra rằng sóng biển không hẳn là đường hình sin hay bất kì đường cong toán học thuần túy nào khác. Độ sâu của nước, sức gió, thủy triều mới chỉ là một vài biến động phải xem xét khi mô tả sóng. Ngày nay, sóng biển được nghiên cứu bằng cách ứng dụng xác suất, thống kê và khoa học phức hợp. Người ta sẽ xem xét một số lượng lớn con sóng nhỏ cùng lúc, sau đó dự báo sẽ được đưa ra từ những số liệu thu thập được.

Một số tính chất toán thú vị của sóng biển là:

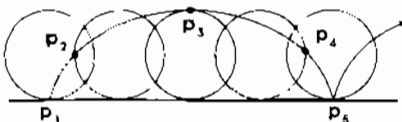
- 1) Chiều dài sóng phụ thuộc vào chu kì.
- 2) Chiều cao của sóng không phụ thuộc vào chu kì hay chiều dài (có một vài ngoại lệ, trong đó sự chi phối của chu kì và chiều dài là rất nhỏ).
- 3) Con sóng sẽ vỡ khi góc tại đỉnh sóng vượt quá 120° . Khi vỡ, hầu hết năng lượng của nó bị tiêu tán.
- 4) Một cách khác để xác định thời điểm sóng vỡ là so sánh chiều cao và chiều dài của nó. Khi tỉ lệ này lớn hơn $\frac{1}{7}$, con sóng sẽ vỡ.



Chiều cao của sóng	khoảng cách theo chiều thẳng đứng từ đỉnh sóng tới chân sóng.
Chiều dài của sóng	khoảng cách theo chiều ngang giữa hai đỉnh sóng liên tiếp.
Chu kì của sóng	số giây để một đỉnh sóng di chuyển đến vị trí của đỉnh sóng tiếp theo nó.



Đường hình sin là đồ thị của một hàm lượng giác tuần hoàn là hàm sin (có hình dạng lặp lại).



Đường xicloit là đường cong vẽ ra bởi một điểm cố định trên đường tròn khi đường tròn lăn đều trên một đường thẳng.



Trong cuốn sổ ghi chép của Leonardo da Vinci có rất nhiều phác thảo và bản viết về sông và động lực nước. Bản phác thảo này trích từ cuốn *Codex Madrid II* trên khổ 24, nó minh họa tác động xoáy của sông khi tràn vào bờ biển. Ông viết: "Không có gì trên bờ biển bị sông mang đi. Biển sẽ trả lại cho bờ tất cả những gì còn lại do ngoài khơi. Mặt nước giữ lại dấu vết của sông trong một thời gian ngắn". Miêu tả của ông về quá trình sông vỗ vào bờ rồi bật nảy lên trên những con sóng tiếp sau là những phỏng đoán chính xác, phù hợp với quy luật chuyển động của sóng được tìm ra sau đó: mỗi điểm mà sông đánh vào trở thành điểm nhiều mới và tất cả các nhiễu này tác động đến hình dạng của những con sóng.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	B	Γ	Δ	E	ς	Z	H	Θ	I	IA	
א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י	יא	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011

ẤN ĐỘ - Ả-RẬP • BABYLON • HY LẠP

CHỮ TƯỢNG HÌNH AI CẬP

• CHỮ TRUNG QUỐC

DO THÁI • QUE TÍNH TRUNG QUỐC

LA MÃ • CHỮ THẤY TU AI CẬP

MAYA • SỐ NHỊ PHÂN

SỰ KÌ DIỆU CỦA TOÁN HỌC TRONG LỊCH SỬ

NGƯỜI BABYLON & CÁC CĂN BẬC HAI
THANG SỐ TÌM GIÁ TRỊ XẤP XỈ CỦA $\sqrt{2}$
PHƯƠNG PHÁP XẾP CHỒNG CÁC HÌNH
VUÔNG CỦA NGƯỜI TRUNG QUỐC
BỘ TẠO SỐ NGẪU NHIÊN SỚM NHẤT
PHÉP NHÂN CỦA NGƯỜI AI CẬP
PHÒNG THÍ NGHIỆM KHOA HỌC ĐẦU TIÊN
PLATO NHÂN ĐÔI HÌNH VUÔNG
NGƯỜI LA MÃ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH
TRÒN NHƯ THẾ NÀO?
DÙNG Ê-KE ĐỂ CHIA BA MỘT GÓC NHƯ
THẾ NÀO?
NHỮNG BÍ ẨN TOÁN HỌC CHƯA LỜI GIẢI ĐÁP
ĐỊNH LÝ FERMAT CUỐI CÙNG
GALILEO & TỈ LỆ
TOÁN HỌC & NHỮNG CHIẾC BÌNH
HÌNH HỌC - XƯA & NAY
ĐIỀU GÌ QUA MỘT CÁI TÊN?
CÔNG THỨC KÌ DIỆU CỦA EULER - $F + V - E = 2$

Trong hầu hết các ngành khoa học, thế hệ sau làm sụp đổ những gì thế hệ trước đã xây dựng và xóa bỏ đi những gì đã hình thành. Chỉ riêng trong toán học, mỗi thế hệ bổ sung một câu chuyện mới vào những cái cũ.

— **Hermann Hankel**

Trong thời đại mâu thuẫn giữa nghiên cứu cổ điển và nghiên cứu hiện đại này, phải có điều gì đó để nói về nghiên cứu không bắt đầu bằng Pythagoras, không kết thúc bằng Einstein, nhưng lại là cái cũ nhất và mới nhất trong mọi nghiên cứu.

— **G.H. Hardy**

Việc khám phá những điều kì diệu của toán học không hạn chế trong những gì chúng ta đã có ngày nay. Lịch sử và các ý tưởng tìm tòi nghiên cứu trong quá khứ cũng nắm giữ một kho tàng những điều thần kì của toán học. Người ta thường tự hỏi người xưa sử dụng những khái niệm như số vô tỉ, các chứng minh và đường conic như thế nào. Nếu không phải là để phục vụ trí tò mò và lòng đam mê học hỏi, liệu toán học có tiến triển đến mức như ngày nay không? Trong chương này, chúng tôi xin giới thiệu đến các bạn một vài trong số vô vàn ý tưởng toán học xuất hiện trong suốt nhiều thế kỉ qua.



Tranh cát dán về các ý tưởng toán học và người phát minh ra chúng.

Lịch sử đã chứng minh rằng sáng tạo toán học không dành riêng bất kì nền văn hóa, thời đại, nền văn minh hay giới tính nào. Kho tàng các ý tưởng toán học phát triển hàng thế kỉ qua quả thực là đáng kinh ngạc và vô cùng thú vị.

CÁC HỆ THỐNG SỐ

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
𐎶	𐎵	𐎴	𐎳	𐎲	𐎱	𐎰	𐎯	𐎮	𐎭	<	<𐎵	<𐎴
A	B	Γ	Δ	E	ς	Z	H	Θ	I	IA	IB	
I	II	III	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	⊂	⊂I	⊂II
𐌰	=	≡	𐌲	𐌳	𐌴	𐌵	𐌶	𐌷	𐌸	𐌹	𐌺	𐌻
א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י	יא	יב	
I	II	III	IIII	IIII	T	π	π	π	π	⊖	-I	-II
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
𐌰	𐌱	𐌲	𐌳	𐌴	𐌵	𐌶	𐌷	𐌸	𐌹	𐌺	𐌻	𐌼
●	●●	●●●	●●●●	—	●	●●	●●●	●●●●	=	●	●●	●●●
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100

ÂN-ĐO-Á-RẬP • BABYLON • HYLAP • TƯƠNG HÌNH HAI CẤP • CHỮ TRUNG QUỐC • ĐOTHAI
• QUÊ TỈNH TRUNG QUỐC • LA MÃ • CHỮ THÁY TỰ AICÁP • MAYA • SỐ NHỊ PHÂN

Quan tâm tìm hiểu đến chúng, độc giả sẽ bước vào những chuyến du ngoạn vượt thời gian và xuyên các quốc gia trên thế giới. Chuyến du lịch đó sẽ cho bạn thấy một số ý tưởng toán học được tìm ra gần như đồng thời trên các quốc gia khác nhau, như trong trường hợp hình thành và phát triển hình học hyperbolic. Chúng ta biết rằng số và một vài dạng hệ thống số thuộc sở hữu của tất cả mọi người. Giá trị hàng của chữ số và số 0 được phát triển ở rất nhiều vùng trên thế giới, đầu tiên là người Babylon với hệ đếm 60, sau đó là người Maya với hệ đếm 20, rồi người Hindu phát triển và đưa vào kí hiệu vị trí cho hệ đếm cơ số 10. Hệ đếm của người Hindu sau này được người Ả-rập cải tiến và tiêu chuẩn hóa. Người Trung Quốc cũng phát

triển hệ thống giá trị hàng của chữ số và số 0 với các que tính, tạo nên hệ đếm cơ số 10 rất công phu.

FERMAT	HYPATIA	POINCARÉ	PYTHAGORAS
EULER	NOETHER	BHASKARA	OMAR KHAYYAM
PLATO	I-HSING	RIEMANN	LOBACHEVSKY
PASCAL	LAGRANGE	LEIBNIZ	ARCHIMEDES
GALOIS	CAUCHY	HILBERT	RAMANUJAN
EUCLID	EUXODUS	DEDEKIND	FIBONACCI
CAYLEY	JACOBI	DESCARTES	KÓVALEVSKAYA
PAPPUS	SOCRATES	BOOLE	KRONECKER
THALES	HAMILTON	SEKI KÓWA	CAVALIERI
CANTOR	SACCHERI	KUMMA	BERNOULLI
BOLYAI	FOURIER	PTOLEMY	APOLLONIUS
AGNESI	GALILEO	GAUSS	WEIERSTRASS
GÖDEL	HERMITE	LEGENDRE	De MOIVRE
NAPIER	LAPLACE	SYLVESTER	ERATÓSTHENES
ZENO	NEWTON	LOVELACE	KEPLER
ABEL	GERMAIN	DIOPHANTUS	ARISTOTLE
RUSSELL	EINSTEIN	SOMERVILLE	AL-KHÓWARIZMI
LUI HUI	BIRKHOFF	du CHATELET	WHITEHEAD

Một số nhà toán học nổi tiếng trong lịch sử

Trong khuôn khổ chương này, chúng tôi chỉ có thể nhắc đến một vài trong số hàng nghìn nhà toán học và ý tưởng toán học đã ghi dấu trong lịch sử ngành này. Đối với những thành tựu mà chúng ta nhắc đến, không có cách nào phủ nhận được tính ưu việt và tầm cỡ của chúng so với những thành tựu chưa nhắc đến. **Chúng tôi thành thực mong các bạn sử dụng những phần tiếp theo trong chương này như là bước đệm cho những tìm hiểu sâu hơn, đồng thời củng cố thêm kiến thức của bạn về những điều kì diệu trong lịch sử nhân loại.** Đó chính là mong muốn của chúng tôi khi giới thiệu danh sách các nhà toán học nổi tiếng, tranh cất dán về các ý tưởng toán học với tác giả của chúng và bảng các hệ thống số. Chúng ta đang ở trong một màn sương mù của những khám phá, phát minh toán học mới. Bạn không nhất thiết phải là nhà toán học để có thể hiểu được ý nghĩa của các ý tưởng này cũng như thưởng thức sự sáng tạo của các nhà toán học. Hãy đọc và tìm ra những điều kì diệu trong quá khứ và hiện tại bạn nhé!

NGƯỜI BABYLON VÀ CÁC CĂN BẬC HAI HỌ DÙNG NHỮNG XẤP XỈ ĐÚNG CỦA CĂN BẬC HAI LÀM GÌ?

Chúng ta thường nghĩ về toán học cổ đại với đúng nghĩa như vậy: cổ đại và xa xưa! Nhưng nếu nhìn lại, sẽ thật ngạc nhiên khi phát hiện ra rằng bạn vẫn đang

dùng một ý tưởng, giá trị hay khái niệm giống như con người đã dùng hàng nghìn năm về trước. Những gì chúng ta biết về toán học Babylon xuất phát từ một vài bản đất sét có khắc chữ hình



nem được tìm thấy trong các cuộc khai quật khảo cổ. Các bản này có niên đại vào khoảng những năm 3000 tới 200 tr.C.N⁽¹⁾.

(1) Bản dịch của O. Neugebauer, *Mathematics Keilschrifttexts*, 1935 – 1937. F. Thureau-Dangin *Textes Mathématiques Babyloniens* 1938 và O. Neugebauer và A. Sachs *Mathematical Cuneiform Texts*. Để tiến hành dịch các số trên các bản đất sét, O. Neugebauer đã phát triển kí hiệu phẩy “,” để phân tách các giá trị hàng của chữ số và “;” để kí hiệu điểm chia sáu mươi. Ví dụ



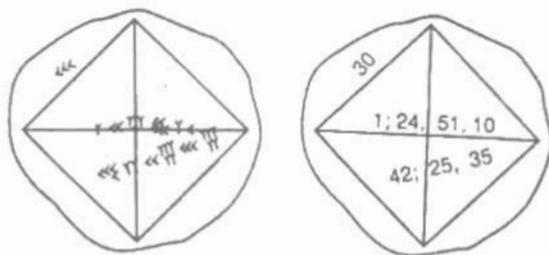
dịch là 11, 1, ; 10, 3 và có nghĩa là $11(60) + 1 + (10/60) + (3/3600)$.

Chúng tôi nói lên rằng người Babylon đã bàn luận về các khái niệm toán học sau:

- Phương trình một biến
- Hệ phương trình hai biến, bảng xấp xỉ⁽¹⁾
- Thể tích và diện tích
- Tính toán diện tích của tam giác và hình thang
- Xấp xỉ của số π , số 3 được dùng để xác định diện tích của vòng tròn là $3\pi^2$
- Tính thể tích của lăng trụ và hình trụ bằng cách nhân diện tích đáy với chiều cao
- Định lý Pythagoras
- Các khía cạnh về lý thuyết số, ví dụ:

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^p = 2^p + (2^p - 1)$$

Ở mặt trước tấm đất sét của người Babylon⁽²⁾ là một xấp xỉ chính xác đến lạ lùng của $\sqrt{2}$. Bạn sẽ phải ngạc nhiên về độ chính xác mà người Babylon đạt được khi dùng hệ đếm theo vị trí cơ số 60 của mình để xấp xỉ $\sqrt{2}$. Người Babylon đã cải tiến hệ đếm Sumer thành hệ đếm theo vị trí cơ số 60.⁽³⁾



(1) Các tấm đất sét chỉ ra nhiều bảng xấp xỉ các giá trị toán học khác nhau. Ví dụ bảng các giá trị nghịch đảo dùng trong phép chia có dục bằng giá trị căn bậc hai và căn bậc ba cũng đã được khai quật.

(2) Tấm đất sét trong minh họa là từ tấm YBC7289 của bộ sưu tập về Babylon tại Yale.

(3) Người Babylon dùng hai kí hiệu để viết số: ∇ cho một và $\blacktriangleleft$ cho mười. Vị trí của các kí hiệu này xác định giá trị của chúng.

Nó là hệ đếm theo vị trí đầu tiên thời đó. Ban đầu khi thiếu số 0 và điểm chia sáu mươi, người ta dựa vào ngữ cảnh để xác định giá trị số cần biểu diễn. Ví dụ số sau:



biểu thị $11(60) + 12 = 672$ hoặc $11 + 12/60$.

Sau đó kí hiệu  hoặc  được sử dụng tại vị trí số 0.

Nhưng người Babylon dùng những xấp xỉ của $\sqrt{2}$ có mức độ chính xác đến như vậy để làm gì? Quan sát tấm đất sét kĩ càng, chúng ta thấy trên đó là một hình vuông với các đường chéo. Một phía của hình vuông có kí hiệu , tức là cách họ viết số 30.

Dọc theo đường chéo nằm ngang, họ viết:



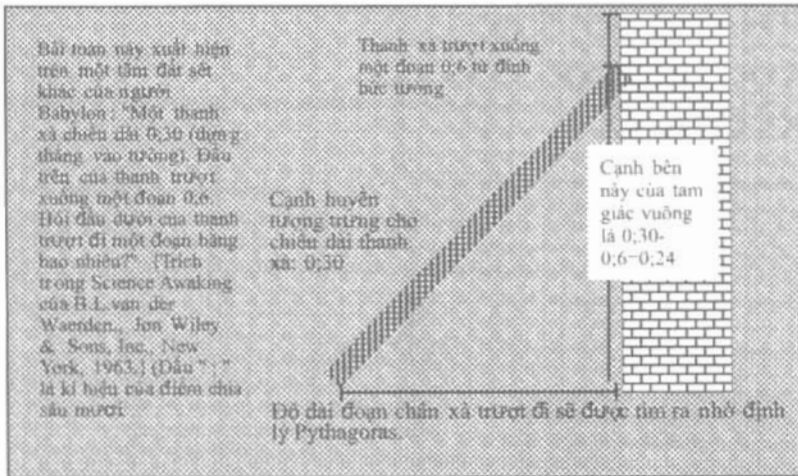
có nghĩa là $1; 24; 51; 10$. Giả sử giữa 1 và 24 là điểm chia sáu mươi, số này sẽ được dịch thành

$$1 + (24/60) + (51/60^2) + (10/60^3) \\ = 1 + (2/5) + (51/3600) + (1/216000) \approx 1,4142129$$

số sánh với $\sqrt{2} = 1,414213562...$ Để có được giá trị xấp xỉ này người Babylon có thể đã dùng phương pháp xấp xỉ liên tiếp thường được sử dụng bởi người Hy Lạp.⁽¹⁾

Chúng ta đã biết rằng người Babylon nghiên cứu rất kĩ về định lí Pythagoras. Giá trị họ tính toán cho đường chéo thẳng

(1) Người Hy Lạp cổ đại dùng phương pháp sau để xấp xỉ các giá trị căn bậc hai: giả sử giá trị xấp xỉ đầu tiên cho 2 là a (ví dụ cho $a = 1$). Ước lượng tiếp theo được xác định bằng cách lấy $2/a$ (tức là $2/1 = 2$). Sau đó lấy trung bình cộng của 2 ước lượng trên: $(1 + 2)/2 = 1,5$. Giá trị xấp xỉ 1,5 bây giờ sẽ được coi là một giá trị xấp xỉ mới. Quá trình cứ thế tiếp tục.



đúng (xem hình trang 161) chính là một xấp xỉ đúng cho độ dài đường chéo hình vuông.

Cụ thể là: các số trên đường chéo là 42; 25; 35 tức là $42 + (25/60) + (35/3600) = 42,4263889$ trong khi $30\sqrt{2} \approx 42,42640687$. Ngoài việc giải toán với các tam giác vuông với cạnh là các số hữu tỉ (như {3; 4; 5}, {5; 12; 13}), họ còn sử dụng định lý Pythagoras cho tam giác vuông có cạnh không phải là số hữu tỉ. Điều này giải thích lí do họ cần đến xấp xỉ của những số vô tỉ như $\sqrt{2}$.

THANG SỐ TÌM GIÁ TRỊ XẤP XỈ CỦA $\sqrt{2}$

Người Hy Lạp cổ đại đã khám phá ra cách xây dựng giá trị của số vô tỉ nhờ định lý Pythagoras. Họ dùng các

đa giác đều nội tiếp, đa giác đều ngoại tiếp và các khái niệm về vô cùng, giới hạn để tính xấp xỉ diện tích của vòng tròn. Họ cũng phát triển một loại thang số học dùng tỉ lệ để xấp xỉ giá trị các số vô tỉ. Ví dụ dưới đây là thang số để tính xấp xỉ $\sqrt{2}$.

1		1
2		3
5		7
12		17
29		41
70		99
⋮		⋮

Bắt đầu bằng hai số 1 ở phía trên cùng của thang, các số còn lại trong cột thứ nhất được tìm bằng cách như sau:

Còn đây là cách tìm các số ở cột thứ 2 từ các số ở cột thứ nhất.

$$1+1=2$$

$$1+2=3$$

$$2+3=5$$

$$2+5=7$$

$$5+7=12$$

$$5+12=17$$

$$12+17=29$$

$$12+29=41$$

$$29+41=70$$

$$29+70=99$$

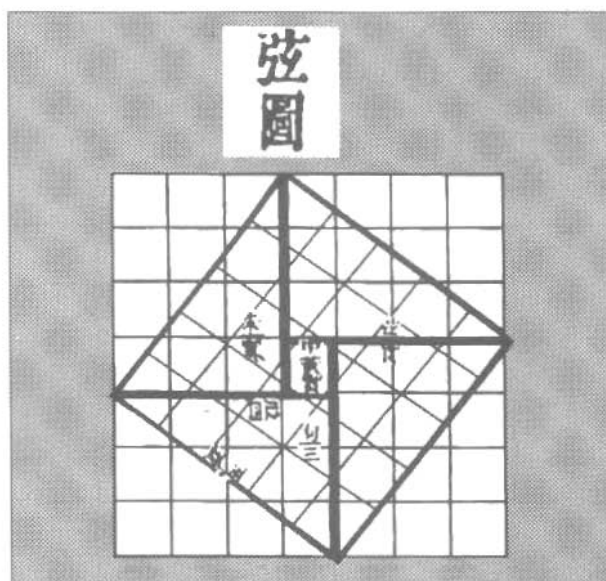
Tỉ lệ $1:\sqrt{2}$ là giới hạn dãy các tỉ lệ của hai số trên cùng một bậc thang. Các tỉ lệ này tiến gần đến $1/\sqrt{2}$, hay nói cách khác giá trị của giới hạn sẽ chính là giá trị của $1/\sqrt{2}$.

CHÚ Ý: Hai số trên cùng một bậc thang là nghiệm của phương trình $y^2 - 2x^2 = \pm 1$. Giá trị x là số nằm ở cột bên trái của thang.

$$\begin{aligned} 1/\sqrt{2} &= 0,707106781... \\ 1/1 &= 1 \\ 2/3 &= 0,666... \\ 5/7 &= 0,71428571429... \\ 12/17 &= 0,70588235294... \\ 29/41 &= 0,70731707317... \\ 70/99 &= 0,7070 \end{aligned}$$

PHƯƠNG PHÁP XẾP CHỒNG CÁC HÌNH VUÔNG CỦA NGƯỜI TRUNG QUỐC

Tìm được những chuyên gia có thể dịch chữ viết Trung Quốc cổ là một việc khó. Vậy tìm một chuyên gia có thể dịch các bản viết tay bằng chữ Trung Quốc cổ với nội dung bàn về toán học hẳn là việc còn khó khăn hơn nhiều. Điều này giải thích vì sao các mô hình toán học của người Trung Quốc rất hiếm thấy. *Hsuan-thu*, phương pháp xếp chồng các hình vuông là một kĩ thuật mà các nhà toán học



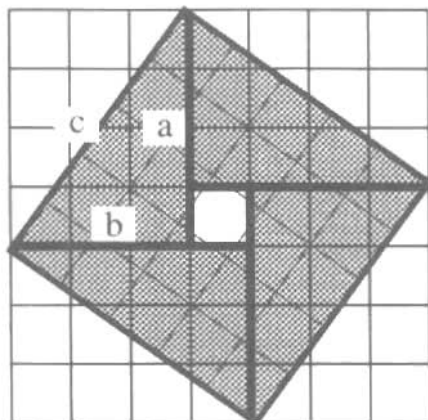
Trung Quốc sử dụng để đưa ra các kết luận đại số dựa vào công cụ hình học và số học. Hình minh họa cụ thể này được lấy ra từ một bản viết Trung Quốc có tên là *Chou Pei*. Niên đại của *Chou Pei* hiện đang còn nhiều tranh cãi, nhưng nó có thể xuất hiện trong khoảng năm 1200 tr.C.N cho đến năm 100 s.C.N. Nếu con số 1200 tr.C.N là chính xác, thì nó sẽ là một trong

những phát biểu sớm nhất của định lý Pythagoras, trước cả thời của Pythagoras và các môn đệ của ông. Định lý Pythagoras xuất hiện ở rất nhiều nền văn minh xuyên suốt tiến trình lịch sử loài người. Trong kiến trúc, nó đảm bảo cho hình dạng chính xác của góc vuông. Trong toán học, nó là công cụ không thể thiếu của rất nhiều quy tắc.

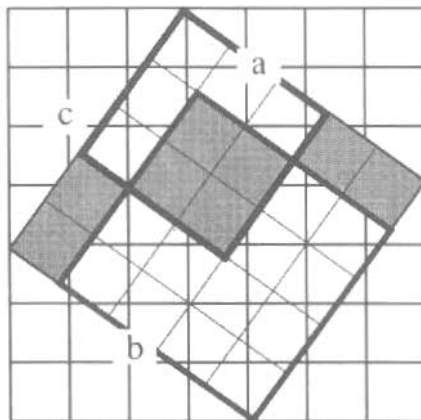


Định lý Pythagoras phát biểu rằng: Đối với bất kì hình tam giác vuông nào, tổng bình phương hai cạnh bên của nó bằng bình phương cạnh huyền ($a^2 + b^2 = c^2$). (Điều ngược lại cũng đúng).

Trong hình bên trái dưới đây, diện tích của hình vuông ở bên trong bằng 5×5 hay $5^2 = 25$ đơn vị diện tích. Nó được chia nhỏ thành 4 tam giác vuông có diện tích là $(1/2)(3 \times 4)$ và một hình vuông nhỏ diện tích 1×1 , tổng cộng là 25 đơn vị diện tích. Trong hình bên phải, hình vuông được chia thành 2 hình vuông nhỏ hơn xếp chồng lên nhau, một hình có kích thước 3×3 và một hình có kích thước 4×4 . Phán hai hình vuông nhỏ này chồng lên nhau có cùng diện tích với phần khuyết của hình vuông 5×5 mà chúng không phủ lên. Điều này chứng tỏ diện tích của hình vuông lớn (5^2) bằng tổng diện tích của hai hình vuông nhỏ, cụ thể là 3^2 và 4^2 .



Hình vẽ này giải thích việc tìm diện tích của hình vuông màu đậm bên trong bằng cách cộng diện tích 4 tam giác và hình vuông đơn vị ở giữa. Cụ thể, ta có:

$$\begin{aligned} c^2 &= 4(1/2)ab + (a - b)^2 \\ &= 2ab + (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$


Tổng diện tích hai hình chữ nhật màu đậm bằng diện tích hình vuông màu đậm (là vùng mà hai hình vuông trắng chồng lên nhau). Cho 5, 4, 3 là giá trị của c , a và b , ta có:

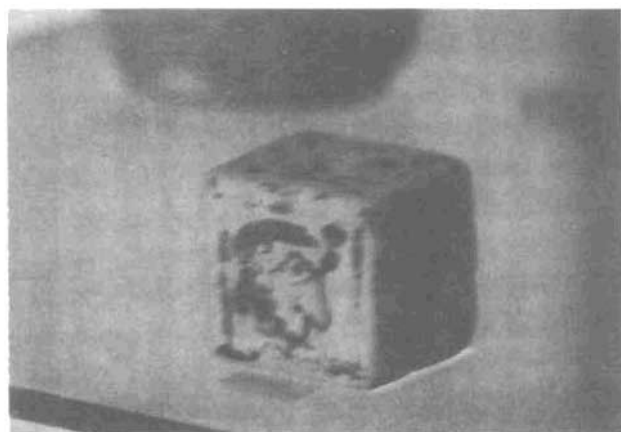
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

BỘ TẠO SỐ NGẪU NHIÊN SỚM NHẤT

Mặc dù con xúc xắc (hình dưới) không được nhắc đến như là một bộ

tạo số ngẫu nhiên trong thời Hy Lạp cổ đại, nhưng nó vẫn được công nhận là một trong những con xúc xắc ra đời sớm nhất còn lại cho đến nay. Hiện nay, nó được lưu giữ trong Viện Bảo tàng Khảo cổ Quốc gia Aten, Hy Lạp. Xúc xắc giữ nhiều vai trò trong các thế kỉ qua. Chúng được dùng để báo trước tương lai, thực hiện các nước đi trong nhiều trò chơi như trò cờ thỏ cáo, cờ tỉ phú, hoặc trong trò tung xúc xắc thì chúng là yếu

tố chính của trò chơi. Các nhà toán học từ lâu đã bị xúc xắc cuốn hút từ khía cạnh xác suất. Trên thực tế, có thể coi chính xúc xắc đã thu hút sự chú ý của Blaise Pascal và Pierre



de Fermat đối với xác suất. Trong khi đánh bạc, một người bạn hỏi Pascal làm thế nào để chia tiền thưởng cho những người chơi nếu ta dừng cuộc chơi trước khi nó kết thúc theo luật. Pascal viết thư hỏi Fermat về bài toán trên. Năm 1654, hai người đã cùng tạo ra lí thuyết xác suất bằng việc trao đổi thư từ và từ đó đặt nền móng cho toán học một chuyên ngành mới. Ngày nay, xúc xắc và các bộ tạo số ngẫu nhiên được sử dụng trong công việc giảng dạy rất nhiều khía cạnh khác nhau của lí thuyết xác suất.

PHÉP NHÂN CỦA NGƯỜI AI CẬP

Phương pháp nhân của người Ai Cập đã tồn tại và lan rộng khắp các nền văn

minh trong nhiều thế kỉ. Tại các trường học thời Hy Lạp cổ đại, phương pháp này được giảng dạy với tư cách là một môn học riêng với tên gọi *phép tính Ai Cập*. Vào thời trung cổ, các kĩ thuật của phương pháp được giảng dạy và nhắc đến dưới những cái tên riêng, như *duplatio* đối với phép nhân đôi và *mediatio*

đối với phép chia đôi. Một ví dụ lấy từ bản viết trên giấy cói Rhind cho chúng ta hiểu cách các học giả Ai Cập nhân 12 với 12 như thế nào. Đầu tiên, họ bắt đầu với số 12. Nhân đôi nó thành 24, sau đó lại nhân đôi thành 48 và rồi thành 96. Hai dấu phết vẽ bên cạnh số 4 và 8 ám chỉ tổng

của chúng bằng 12. Sau đó, các giá trị tương ứng ở hàng có dấu phết được cộng lại, cho ta kết quả 144. Phương pháp nhân Ai Cập đã loại bỏ việc phải ghi nhớ bảng tính nhân vì nó dựa chủ yếu vào phép cộng.

$$\begin{array}{r}
 \text{IIII} \quad 1 \quad 12 \\
 \text{IIIIIIII} \quad 2 \quad 24 \\
 \text{IIIIIIIIII} \quad 4 \quad 48 \\
 \text{IIIIIIIIIIII} \quad 8 \quad 96 \\
 \hline
 \text{IIIIIIIIIIIIII} \quad 12 \quad 144
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{IIIIIIII} \quad 1 \quad 80 \\
 \text{IIIIIIIIIIII} \quad 10 \quad 800 \\
 \text{IIIIIIII} \quad 2 \quad 160 \\
 \text{IIIIIIIIII} \quad 4 \quad 320 \\
 \hline
 \text{IIIIIIIIIIIIIIII} \quad 14 \quad 1120
 \end{array}$$

Phép chia cũng được tính toán tương tự. Để chia 1120 cho 80, bạn tìm số mà khi nhân với 80 cho kết quả là 1120. Tùy theo độ lớn của số bị chia mà số chia hoặc là được nhân đôi, hoặc nhân

$$\begin{array}{r}
 \text{IIIIIIII} \quad 1 \quad 33 \\
 \text{IIIIIIIIII} \quad 3 \quad 11 \\
 \text{IIIIIIIIIIII} \quad 11 \quad 3 \\
 \hline
 \text{IIIIIIIIIIIIIIII} \quad 47
 \end{array}$$

$$1 + 1/3 + 1/11 = 47/33$$

lên 10, 100 hay 1000, ... Các kết quả sau đó có thể nhân đôi cho đến khi tổng tìm được bằng 1120. Nếu phép chia có dư, người Ai Cập dùng phân số. Trong ví dụ bên, họ dùng phân số 47/33.

PHÒNG THÍ NGHIỆM KHOA HỌC ĐẦU TIÊN

Các nhà toán học và học giả Hy Lạp cổ đại luôn được tôn vinh là những lí thuyết gia, triết học gia kiệt xuất.

Ngày nay, các nghiên cứu mới nhất⁽¹⁾ đã làm sáng tỏ rằng phòng thí nghiệm đầu tiên được ghi nhận là do Pythagoras và các môn đệ của ông thành lập vào thế kỉ VI tr.C.N. Chẳng có gì



đáng ngạc nhiên khi không có ghi chép nào của những môn đệ theo Pythagoras về điều này, bởi họ đã thề là sẽ giữ bí mật về hoạt động của tổ chức. Ngoài ra, còn có những bằng chứng thuyết phục khác từ các học giả sau này. Hình minh họa bên được trích từ bản viết tay của học giả La Mã Boethius (thế kỉ V tr.C.N). Nó cho thấy Pythagoras đang thí nghiệm về âm thanh, đặc biệt là

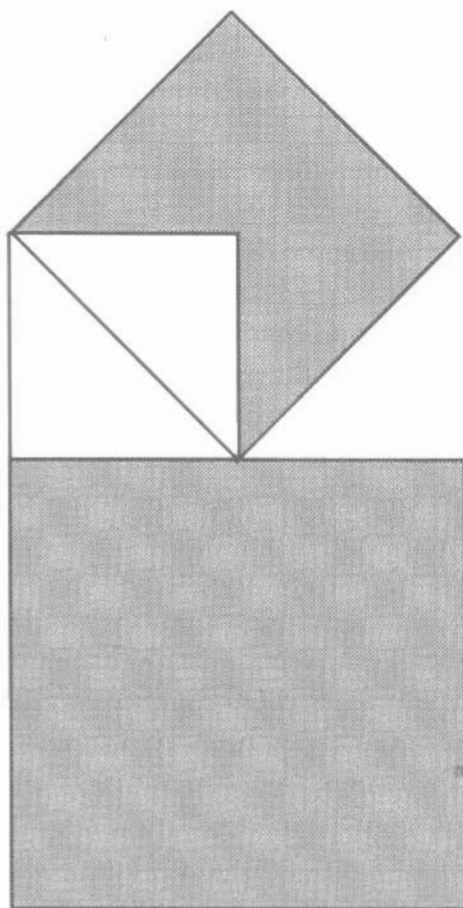
mối liên hệ giữa kích thước của vật (trong trường hợp này là những cái chuông) và âm thanh mà chúng phát ra. Theon ở Smyrna (thế kỉ II s.C.N) cùng với các tác gia cổ đại khác đã viết về các kiểu thí nghiệm tương tự của những người Hy Lạp khác cũng như của các môn đệ Pythagoras. Nếu xem xét các phát minh của nhà toán học Hy Lạp Archimedes (287 - 212 tr.C.N) như nguyên tắc đòn bẩy và ròng rọc, phương pháp so sánh thể tích của các vật bằng cách nhúng chúng vào trong nước, vít Archimedes, máy lăng đá, chúng ta sẽ thấy được sự tồn tại của các thí nghiệm trong lịch sử và tầm quan trọng của chúng.

(1). Các phát hiện mới này được Andrew D. Dimarogonas làm việc tại Đại học Washington ở St. Louis công bố trong Tạp chí về âm thanh và dao động, tháng 5 năm 1990.

PLATO NHÂN ĐÔI HÌNH VUÔNG

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣΜΗΔΕΙΣ
ΕΙΣΙΤΩ

*Không cho bất kì kẻ
dốt nát về hình học
nào bước vào đây.*



Diện tích hình vuông tối đậm phía trên gấp đôi diện tích hình vuông trắng. Hình vuông tối đậm phía dưới có diện tích gấp bốn lần diện tích hình vuông trắng. Chú ý rằng: Dư cạnh của nó gấp hai lần cạnh của hình vuông trắng, nhưng diện tích của nó gấp bốn lần.

Những từ này được dán trên cửa của Học viện Plato ở Aten. Mặc dù Plato (428-48 tr.C.N) không nổi tiếng vì những đóng góp toán học, nhưng ông nổi tiếng vì đã tạo nên một trung tâm nơi ông hướng dẫn, khuyến khích và làm nảy sinh những tư tưởng toán học mới. Phương pháp nhân đôi hình vuông khéo léo này xuất hiện trong tác phẩm đối thoại *Meno* (thảo luận về bản chất của tri thức) của Plato. Hình vẽ bên giúp ta phân biệt dùng cách thức nào mới có thể nhân đôi hình vuông.

Để tìm diện tích của một hình tròn cho trước, người La Mã sử dụng diện tích của một hình vuông có đường chéo dài hơn đường kính của đường tròn $1/4$ lần. Dưới đây là cách tính của họ và mức độ chính xác của phép tính.

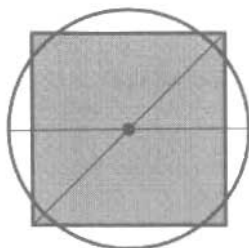
**NGƯỜI LA MÃ
TÍNH DIỆN TÍCH
HÌNH TRÒN
NHƯ THẾ NÀO?**

Giả sử đường kính của đường tròn là d .

Khi đó đường chéo của hình vuông là: $d + 1/4d = 1,25d$.

Sử dụng định lý Pythagoras, ta có chiều dài của cạnh hình vuông là: $1,25d/\sqrt{2}$.

Bình phương cạnh của hình vuông, ta được diện tích của hình vuông là $1,5625d^2/2$.



Vì bán kính đường tròn là $0,5d$; công thức tính diện tích đường tròn là πr^2 nên diện tích thực của đường tròn là $0,25d^2\pi$.

Sử dụng giá trị gần đúng của số π là 3,1416 ta có:

**PHƯƠNG PHÁP CỦA
NGƯỜI LA MÃ**

$$1,5625d^2/2 \approx 0,78125d^2$$

**PHƯƠNG PHÁP TÍNH
DIỆN TÍCH THỰC TẾ**

$$0,25d^2\pi \approx 0,785d^2$$

Cho $0,78125d^2 = 0,25d^2\pi$, chúng ta sẽ suy ra được giá trị xấp xỉ số π của người La Mã, cụ thể là:

$$0,78125d^2 = 0,25d^2\pi$$

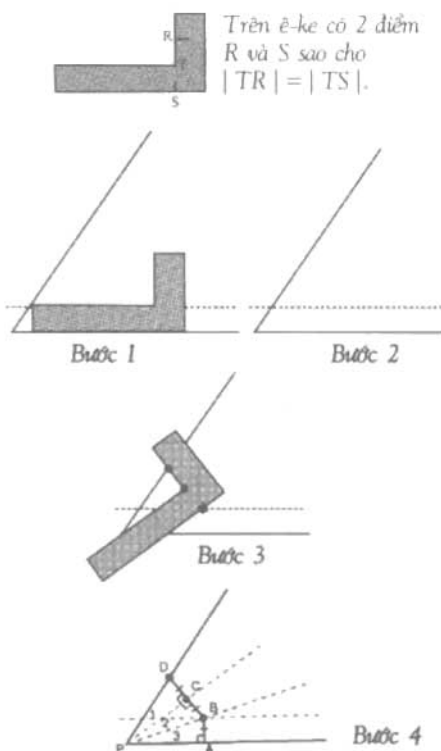
$$\frac{0,78125d^2}{0,25d^2} = 0,25d^2\pi$$

$$3,125 = \pi$$

$$3 + 1/8 = \pi$$

DÙNG Ê-KE ĐỂ CHIA BA MỘT GÓC NHƯ THẾ NÀO?

giúp cho các nhà toán học tìm ra nhiều khám phá mới trong lĩnh vực toán học. Mặc dù một góc không thể chia ba được nếu chỉ sử dụng một compa và một thước kẻ, nhưng sẽ có thể được nếu ta dùng một dụng cụ của người Hy Lạp được biết đến với tên gọi ê-ke. Ê-ke được dùng để dựng và kiểm tra một góc vuông. Nó được người Hy Lạp cổ đại sử dụng để chia ba một góc theo cách sau:



Bước 1: Dùng ê-ke để tạo một đường thẳng song song với một cạnh của góc như trong bước 2.

Bước 3: Dựng ê-ke như trong hình vẽ, một điểm được đánh dấu trên cạnh của góc, điểm đánh dấu còn lại nằm trên đường thẳng song song mới vẽ ở bước 1, thân ê-ke đi qua đỉnh của góc đã cho.

Bước 4: Từ các đường nét đứt, vẽ 3 tam giác. $\triangle PCB = \triangle PAB$ do có chung cạnh huyền và 1 cặp cạnh bên bằng nhau. $\triangle PCB = \triangle PCD$ do có hai cặp cạnh bên bằng nhau.

Do đó: $\triangle PCB = \triangle PCD = \triangle PAB$.

Suy ra: $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$, tức là $\hat{P}$ đã được chia ba.

NHỮNG BÍ ẨN TOÁN HỌC CHƯA LỜI GIẢI ĐÁP

Toán học luôn đưa ra một loạt các bài toán. Thực tế, toán học và các bài toán không thể tách

rời nhau. Lịch sử đã chứng tỏ rằng những khái niệm toán học chính là chất xúc tác tạo nên các bài toán và rồi các bài toán lại là nguồn kích thích để con người tìm ra rất nhiều khái niệm và khám phá mới. Ba bài toán đấng hình không giải được thời cổ đại⁽¹⁾, bài toán Bảy cây cầu Königsberg⁽²⁾ và bài toán Định đề về đường thẳng song song⁽³⁾ là ví dụ về những bài toán hiện đã giải được, nhưng quá trình tìm lời giải cho chúng đã thúc đẩy nhiều ý tưởng, khái niệm và phát minh toán học. Đưa ra các bài toán, câu hỏi và suy ngẫm chúng, nghiên cứu các lời giải, các chứng minh, tất cả vẫn đang là nguồn động lực mạnh mẽ thôi thúc các nhà toán học ngày nay.

Dưới đây là một số bài toán nổi tiếng hiện nay vẫn chưa có lời giải:

(1) Chỉ được dùng thước kẻ và compa hãy chia ba một góc (tức là chia góc cho trước thành ba góc bằng nhau), nhân đôi lập phương (tức là dựng một hình lập phương có thể tích gấp 2 lần thể tích hình lập phương đã cho), cầu phương hình tròn (tức là dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn đã cho). Một số khám phá như ba hình tròn này là đường conicoid Nicomedes, đường xoắn ốc Archimedes và đường quadratrix Hippas

(2) Bài toán Bảy cây cầu Königsberg yêu cầu tìm đường đi qua tất cả bảy cây cầu ở Königsberg mà không đi qua bất kì cây cầu nào 2 lần. Euler đã phát triển khái niệm đồ thị khi giải bài toán này.

(3) Bài toán Định đề về đường thẳng song song bàn về vấn đề định đề Euclid thứ 5 có thực sự là một định đề (thực không là định đề) hay không. Các ý định nhằm chứng minh định đề này dẫn đến sự ra đời các khám phá về hình học phi Euclid

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ ĐẾN NAY CHƯA CÓ LỜI GIẢI

- Có tồn tại hay không một công thức hay cách kiểm tra nào đó có thể xác định một số có phải là số nguyên tố?
- Có đúng là có vô số các cặp số nguyên tố sinh đôi? Một *cặp số nguyên tố sinh đôi* là một cặp gồm hai số nguyên tố liên tiếp hơn kém nhau 2 đơn vị. Ví dụ: số 3 và số 5, vì $5 - 3 = 2$; những cặp khác đó là 5 và 7; 11 và 13; 41 và 43.
- Bí ẩn về số hoàn hảo lẻ. Số hoàn hảo là số có tổng các ước số thật sự bằng chính nó (ước số thật sự của một số là ước số khác với chính số đó). Số 6 là một ví dụ của số hoàn hảo chẵn bởi vì $6 = 1 + 2 + 3$. Những ví dụ khác là những số 28, số 496 và số 8128. Vào khoảng năm 300 tr.C.N, Euclid đã chứng tỏ rằng nếu 2^{n-1} là một số nguyên tố thì $2^n(2^n - 1)$ là một số hoàn hảo. Sau đó, vào thế kỷ XVIII, Leonhard Euler chứng minh rằng bất kỳ một số hoàn hảo chẵn nào cũng phải có dạng như Euclid đã nêu. Ví dụ như: $8128 = 2^6(2^7 - 1)$.

Nhưng những số hoàn hảo lẻ thì vẫn là một điều bí ẩn. Vẫn chưa ai tìm ra một số hoàn hảo lẻ nào, cũng chưa có người nào chứng minh được tất cả các số hoàn hảo đều là số chẵn.



PHÒNG ĐOÁN CỦA GOLDBACH

Có phải mỗi số chẵn lớn hơn 2 đều bằng tổng của hai số nguyên tố không?

Vào năm 1742, nhà toán học người Đức Christian Goldbach (1690 – 1764) viết thư gửi cho Leonhard Euler (1707 – 1783), phỏng đoán rằng mọi số chẵn ngoại trừ số 2 đều bằng tổng của hai số nguyên tố. Ví dụ như: $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 5 + 5$; $12 = 7 + 5$... Mặc dù dự đoán của Goldbach được tin là đúng, nhưng không ai có thể chứng minh được điều đó. Cho đến nay, mới chỉ có những kết quả sau được chứng minh: Vào năm 1931, nhà toán học người Liên Xô L. Schnirelmann chứng minh bất kỳ một số chẵn nào cũng có thể viết được dưới dạng tổng của không quá 300 000 số nguyên tố – một kết quả còn rất xa so với hai số nguyên tố. Ivan M. Vinogradov (1891 – 1983) chứng minh được rằng tất cả các số nguyên lẻ đủ lớn đều là tổng của 3 số nguyên tố. Vào năm 1973, Chen Jing run đã chứng minh mỗi số chẵn đủ lớn bằng tổng của một số nguyên tố với một số nguyên tố hoặc với số có hai ước nguyên tố.

ĐỊNH LÝ FERMAT CUỐI CÙNG

Vào thế kỷ thứ XVII, nhà toán học Pierre de Fermat (1601 – 1665) đã viết bên lề một cuốn sách của ông như sau:

Không thể tách một lũy thừa bậc ba thành tổng hai lũy thừa bậc ba, không thể tách một lũy thừa bậc bốn, hay nói chung là một lũy thừa bất kì bậc lớn hơn 2 thành tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi chắc chắn đã tìm ra một cách chứng minh tuyệt vời, nhưng do lề giấy này quá hẹp nên không thể viết ra ở đây được. Nó được phát biểu lại như sau: Nếu n là một số tự nhiên lớn hơn 2, thì không có một số nguyên dương nào thỏa mãn biểu thức $x^n + y^n = z^n$. Lời ghi chú của Fermat lan truyền đi như một thách thức. Trong nhiều thế kỷ, ngay cả các nhà toán học xuất chúng nhất cũng vẫn chưa tìm ra cách chứng minh định lý này là đúng hay sai.

Phần tiếp sau chúng tôi xin giới thiệu với các bạn kiến thức bổ sung và những thông tin mới nhất về định lí Fermat cuối cùng. Một số khám phá, kết quả nhận được nhờ những nỗ lực chứng minh định lí Fermat, thậm chí còn có ý nghĩa quan trọng hơn cả định lí này.

* * *

Nghiên cứu các bài toán chưa được giải đáp cũng thú vị như đào sâu nghiên cứu những gì ta đã biết. Trên đây chỉ là một vài ví dụ rất nhỏ trong số vô vàn những bí ẩn của toán học. Mặc dù để hiểu đề bài của một vài bài toán trong số chúng, bạn không cần chút kiến thức căn bản về toán nào cả, nhưng lời giải của chúng thì lại rất khó hiểu.

ĐỊNH LÝ FERMAT CUỐI CÙNG

Không có số nào là nghiệm của phương trình: $x^n + y^n = z^n$, trong đó n là một số tự nhiên lớn hơn 2.

Thế kỷ thứ XVII, khi nhà toán học Pierre de Fermat viết ghi chú này bên lề cuốn sách dịch *Arithmetica* (Số học) của tác giả Diophantus, ông không biết rằng nhận xét này của mình đã tác động đến sự phát triển của toán học như thế nào trong suốt 350 năm sau. Có phải thực sự ông đã giải được bài toán đó? Hay là ông chỉ đùa? Không ai biết điều đó cả, nhưng những gì chúng ta chắc chắn đó là nó đã trở thành một trong những bài toán chưa giải được nổi tiếng nhất trong lịch sử toán học. Giống như *Ba bài toán định hình nổi tiếng thời cổ đại*, bài toán *Bảy cây cầu Königsberg* và *Định đề thứ 5 của Euclid*, định lý Fermat cuối cùng đã khơi dậy nhiều ý tưởng và khám phá trong hàng thế kỷ nay.



Cộng đồng toán học đã rất hào hứng và phấn khởi về *Những đường cong elliptic moduli* và định lý Fermat cuối cùng, một công trình dày 200 trang của Andrew J. Wiles, một giáo sư toán học của trường đại học Princeton. Sau khi giới thiệu công trình này ở hội thảo tại Cambridge (tháng 6 năm 1993), ông đã đưa bài phát biểu của mình đến hồi cao trào với thông báo ông đã chứng minh được phỏng đoán Shimura-Taniyama-Weil, một định lý mà các nhà toán học tin rằng chính là chìa khóa để chứng minh định lý Fermat. Toàn bộ giới toán học đều rất tin tưởng rằng công trình của Wiles đã đưa định lý Fermat cuối cùng đến hồi kết thúc.

Nhiều thế kỷ nay, đã có hàng nghìn “chứng minh” cho định lý Fermat, nhưng không chứng minh nào là đúng sau khi

được xem xét, kiểm tra kĩ lưỡng. Vấn đề không phải ở chỗ định lí Fermat quá khác thường, mà như Fermat đã nói: “Tôi đã tìm được một chứng minh thực sự tuyệt vời.” – lời giải (chứng minh) chính là nét tuyệt vời của định lí này. Nó đã làm bùng lên nhiều khám phá, ví dụ như trong lí thuyết số, mật mã và mã hóa.



Andrew Wiles

Wiles đã bị thu hút bởi định lí Fermat từ khi còn là một thiếu niên. Nhưng ông không tập trung vào việc đi tìm chứng minh cho nó cho đến khi ông nhận thấy có một công cụ có khả năng. Wiles coi chứng minh của mình là sự kết hợp của rất nhiều nhà toán học cũng như các nỗ lực trước đó. Trong số những tượng đài lịch sử có đóng góp vào quá trình chứng minh định lí, chúng ta có thể kể đến nhà toán học thế kỉ XVIII Leonhard Euler, người chứng minh cho trường hợp $n = 3$; nhà toán học người Đức Ernest E. Kummer, người chứng minh định lí cho ba số nhỏ hơn 100. Các máy tính ngày nay chứng minh được không có nghiệm nào của bài toán cho 4 triệu số tự nhiên đầu tiên. Năm 1950, YuktakaTaniyama đưa ra phỏng đoán về các đường cong elliptic và cấu trúc của chúng trên một mặt phẳng hyperbolic. Năm 1980, Gerhard Frey tuyên bố rằng nếu phỏng đoán của Taniyama là đúng đối với một loại đường cong elliptic nào đó (được gọi là nửa ổn định), thì định lí của Fermat có thể chứng minh được. Khi Kenneth A. Ribet chứng minh tuyên bố này của Frey, Wiles quyết định bắt tay vào chứng minh định lí Fermat. Từ lúc đó, ông làm việc miệt mài trong suốt 7 năm. Tháng 5 năm 1993, một bài báo của Barry Mazur ở trường Harvard đã lôi kéo sự chú ý của Wiles. Bài báo miêu tả một kĩ thuật số đã tồn tại hơn 100 năm nay, phần quan trọng cuối cùng trong việc hoàn thành chứng minh của Wiles.

GALILEO VÀ TỈ LỆ

Có rất nhiều khái niệm toán học không bị giới hạn chút nào trong bản thân lĩnh vực toán, nhưng lại bị hạn chế khi ứng dụng vào đời sống thực. Ý tưởng về tỉ lệ là một trong số đó, nó cũng là công cụ hữu dụng khi giải quyết nhiều loại bài toán khác nhau. Ví dụ, nếu có 3 hộp giống nhau đựng 42 pound bì ve, thì sẽ cần bao nhiêu hộp để đựng 168 pound bì ve? Lập tỉ lệ là cách để giải bài toán này: $(3 \text{ hộp}/42 \text{ pound} = ?$



hộp/ 168 pound). Nhưng không phải tất cả các bài toán về tỉ lệ đều có thể hiện thực hóa để giải được. Liệu có cây nào có thể lớn nhỏ tùy ý mà vẫn còn sống như một cây thực sự hay không? Liệu có tồn tại con người với kích thước cơ thể bất kì hay không? Kết cấu của một đối tượng, dù là cây hay là xương của cơ thể người, đều đóng vai trò sống còn trong việc quyết định ngưỡng trên và ngưỡng dưới của kích thước bản thân nó. Người 100 chân là không thể có, bởi cấu trúc và vật liệu tạo nên cơ thể người không đủ dùng cho một kích thước đồ sộ như thế. Ngay cả những cây gỗ đồ cổ thụ cũng có giới hạn về chiều cao được quy định bởi hệ thống rễ và tính chất của gỗ. Một trong những ghi nhận đầu tiên về bài toán phóng to hay thu nhỏ một vật là của Galileo vào năm 1638 trong công trình **Hội thoại về hai ngành khoa học mới**.

Ông nói rằng: "...nếu một người muốn duy trì kích thước không lồ với tỉ lệ tay chân như cũ, anh ta phải học là tìm một

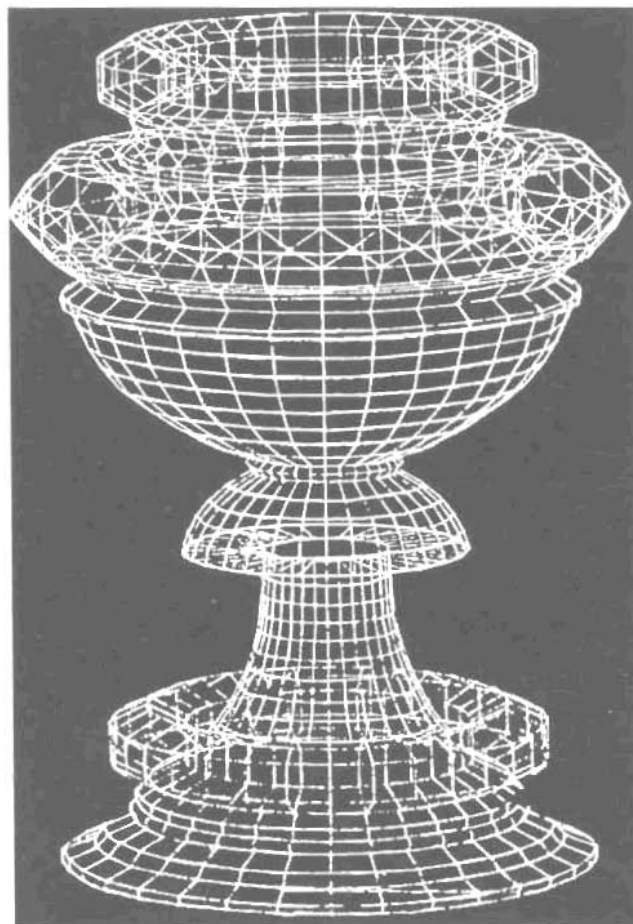
vật liệu cứng và chắc chắn hơn để tạo thành xương, hoặc là chấp nhận giảm cân nặng so với một người bình thường, bởi nếu chiều cao anh ta tăng lên một cách bất thường anh ta sẽ ngã và bị đè nát dưới chính khối lượng cơ thể mình. Ngược lại, nếu cơ thể nhỏ lại, sức mạnh của nó không nhỏ lại theo tỉ lệ; và quả thật là cơ thể càng nhỏ thì sức mạnh tương đối so với kích thước của nó càng tăng.”*

* Hội thoại về hai ngành khoa học mới. Henry Crew & Alfonso De Salv
dịch. Macmillan, 1914.

TOÁN HỌC VÀ NHỮNG CHIẾC BÌNH

Đôi khi chúng ta phải ngạc nhiên đến sửng sốt khi phát hiện ra các đồ vật

và ý tưởng đã được người xưa toán học hóa như thế nào. Có hàng loạt ví dụ về những lọ hoa, bình chứa, cốc chén với các thiết kế kiểu dáng khác nhau. Bản thiết kế của Paolo Uccello (hình bên dưới) được lấy ra từ bộ sưu tập trưng bày tại Bảo tàng Uffizi ở Florence, Ý. Mặc dù được vẽ vào nửa đầu thế kỉ XV, nhưng sự



rõ ràng và chính xác của nó gợi nhắc chúng ta về hình ảnh phân tích một chiếc ly của máy tính, nó minh họa cho phép phối cảnh tuyến tính, những tỉ lệ bất biến và cả việc sử dụng các khối hình hình học.

HÌNH HỌC - XƯA VÀ NAY

Còn đã khám phá ra những
thứ tuyệt vời đến mức phải
sùng sốt... từ không gì cả, con
đũa tạo ra một vũ trụ mới lạ lạ

—*Janos Bolyai*,

(Trích từ bức thư Bolyai gửi cho cha năm 1823)

Khi nghĩ về hình học, hầu hết chúng ta đều liên tưởng đến môn hình học ở trường phổ thông với tất cả những định lý “chết người” mà chúng ta buộc phải ghi nhớ cũng như sự háo hức khi làm những chứng minh đầu tiên, nhớ đến điểm, đường, tam giác, tứ giác, đường tròn, các hình khối, diện tích và thể tích. Nét đẹp của hình học là ở chỗ người ta có thể hình dung ra các phần tử của nó. Có lẽ vì thế mà chúng ta ít nhận ra rằng sự phát triển ngầm của các ý tưởng vẫn luôn diễn ra từ xưa cho tới nay. Những ai đang tiếp bước trên con đường nghiên cứu toán học đều hiểu rằng còn rất nhiều hình học khác nữa ngoài hình học Euclid. Chúng ta đã biết hình học và đại số liên kết với nhau như thế nào qua hệ tọa độ Descartes (Rene Descartes). Chúng ta cũng thấy định đề Euclid thứ 5 (về sự song song) đã thách thức các nhà toán học trong hàng thế kỉ. Nhiều nhà toán học tin rằng định đề song song không phải là một ý tưởng độc lập, nó có thể chứng minh được bằng các kiến thức hình học. Nhưng lịch sử đã chứng minh, định đề song song là độc lập với hình học Euclid, các dự định không thành khi chứng minh nó đã dẫn tới phát hiện về hình học phi Euclid. Không thể tách biệt thực sự một lĩnh vực toán học với các lĩnh vực còn lại, bởi các nhà toán học dựa vào toàn bộ kiến thức về toán của mình để đưa ra ý tưởng. Chỉ nhìn vào chặng đường phát triển của hình học thôi cũng thấy vô cùng lí thú và hấp dẫn. Trong khuôn khổ

hạn hẹp của cuốn sách này, chúng tôi chỉ xin giới thiệu quá trình phát triển của lĩnh vực hình học chứ không đi sâu vào các ý tưởng cụ thể của một hình học nào đó. Hi vọng rằng đây sẽ là tiền đề để các bạn tìm hiểu sâu hơn về hình học.

600 tr.C.N: Thales giới thiệu hình học suy diễn. Nó được phát triển qua nhiều năm bởi các nhà toán học và triết học như Pythagoras, Plato, Aristotle.

300 tr.C.N: Euclid biên soạn, sắp xếp và hệ thống hóa các ý tưởng hình học đã được khám phá thành bộ sách 13 tập với tựa đề *The Elements* (Cơ bản).

140 tr.C.N: Posedonius phát biểu lại định đề Euclid thứ 5.

Thế kỉ thứ III s.C.N: Proclus (410 – 495 s.C.N) là một trong những nhà phân biệt đầu tiên về định đề Euclid thứ 5.

Và sẽ những ý định chứng minh định đề Euclid thứ 5 trong suốt nhiều thế kỉ.

1637: Rene Descartes hình thành hình học giải tích.

Gerolamo Saccheri (1667 – 1733) là người đầu tiên thử chứng minh gián tiếp định đề song song Euclid. Nhưng đáng tiếc ông không chấp nhận các kết quả của mình. Trước khi mất, ông xuất bản cuốn sách *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclid Freed of Every Flaw). Cuốn sách này đã thu hút sự chú ý của Eugenio Beltrami một thế kỉ rưỡi sau đó. Nếu Saccheri không phủ nhận phát hiện của mình, ông đã có thể đẩy nhanh khám phá về hình học phi Euclid cả một thế kỉ.

1639: Girard Desargues (1591 – 1661) xuất bản công trình về hình nón, trong đó ông thảo luận những kết quả mới về hình học xạ ảnh.

1736: Leonhard Euler (1707 – 1783). Nghiên cứu và tìm giải bài toán Bảy cây cầu Königsberg của ông đặt nền móng cho lĩnh vực tô pô.

1795: Gaspard Monge (1746 – 1818) mô tả các cấu trúc bằng các phép chiếu phẳng.

1822: Jean Victor Poncelet (1788 – 1867) làm sống lại hình học xạ ảnh với luận án của mình và thành lập nguyên lý lưỡng tính.

1843: Arthur Cayley (1821 – 1895) bắt đầu nghiên cứu về không gian n chiều trong hình học giải tích.

Georg Cantor (1845 – 1918). Lí thuyết tập hợp của ông cung cấp cơ sở cho lí thuyết tô pô đưa ra bởi Henri Poincaré (1854 – 1912) năm 1895 trong cuốn *Analysis Situs* (Tô pô học). Phát triển tập hợp Cantor và fractal đầu tiên.

1871: Christian Felix Klein (1849 – 1925) với những công trình nghiên cứu sâu rộng về hình học xạ ảnh và tô pô, ông cũng chứng minh tính phù mâu thuẫn của hình học Euclid, hình học elliptic và hình học hyperbolic.

Thế kỉ XIX: Nicolai Lobachevsky (1793 – 1856), Jonas Bolvai (1802–1860) và Carl Gauss (1777–1855) độc lập với nhau phát hiện ra hình học hyperbolic.

1854: G.F.Bernhard Riemann (1826 – 1866) đưa ra hình học elliptic.

1858: August Möbius và Johann Listing độc lập với nhau phát hiện ra mặt phẳng một phía, ví dụ dải Möbius.

1888: Giuseppe Peano (1858 – 1932) tạo ra đường cong lấp đầy mặt phẳng Peano (fractal).

1904: Helge von Koch (1870 – 1924) tạo ra đường bờ tuyết Koch (fractal).

1919: Felix Hausdorff định nghĩa chiều của fractal trong hình học fractal. A.S. Besicovitch tiếp tục công trình của Hausdorff.

1971: Vladimir Arnold liên kết hình học đại số (hình học giải tích n chiều) và tô pô.

1951–1975: Benoit Mandelbrot tạo ra thế giới fractal và phát triển nó gần như độc lập.

600 tr.C.N Hình học
Euclid

1637 Hình học giải
tích, hình học
phi Euclid

1639 Hình học xạ
ảnh

1736 Tô pô

1829 Hình học
hyperbolic

1854 Hình học
elliptic

1860 Hình học
fractal

Hiện tại



ĐIỀU GÌ QUÁ MỘT CÁI TÊN? HÌNH HỌC HYPERBOLIC KHÔNG PHẢI ĐƯỢC ĐẶT TÊN THEO HÌNH HYPEBOL

chẳng hạn. Trong cả hai trường hợp, những người sáng lập đều không có liên quan gì đến tên gọi của chúng cả. Hình học hyperbolic được hai nhà toán học Nikolai Lobachevsky (1793



- 1856) và Janos Bolyai (1802 - 1860) phát minh một cách độc lập. Định đề Euclid thứ 5 phát biểu rằng có một và chỉ một đường thẳng đi qua điểm P không nằm trên đường thẳng L cho trước và song song với nó. Các nhà toán học đã nỗ lực không thành khi cố gắng chỉ ra định đề này là có thể chứng minh được, nhưng bù lại, nó dẫn họ đến khám phá về hình học phi Euclid.

Trong *hình học hyperbolic* người ta phát hiện ra rằng tồn tại hơn một đường đi qua điểm P và song song với L. Hyperbolic xuất phát từ từ Hy Lạp *hyperbole*, có nghĩa là "thừa". Trong trường hợp này nó ám chỉ số lượng các đường đi qua P và song song với L. Lobachevsky ban đầu gọi hình học của mình là *hình học ảo*. Tên gọi của nó ngày nay - *hình học hyperbolic* - được đưa ra bởi nhà hình học nổi tiếng Felix Klein, người sáng tạo ra chiếc bình Klein. Ngoài ra, Klein còn đặt thuật ngữ *hình học elliptic* cho hình học phi Euclid của Georg Riemann, trong đó không có đường nào song song với L mà đi qua điểm P. Thuật ngữ *elliptic* có nguồn gốc từ từ Hy Lạp *elleiptis*, có nghĩa là "thiếu" hoặc "giảm bớt".

Bạn đã từng băn khoăn về tên gọi của các lĩnh vực toán học chưa? Ví dụ như *hình học hyperbolic* hay *hình học elliptic*

CÔNG THỨC KÌ ĐIỀU CỦA EULER

Điều kì diệu của các ý tưởng toán học là ở chỗ một khi chúng được khẳng định là đúng, chúng đúng cho mọi trường hợp. Ví dụ: để cộng k số tự nhiên đầu tiên, $1 + 2 + 3 + \dots + k$, tất cả những gì ta cần làm là tính theo công thức $k(k+1)/2$. Công thức này được chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Chúng ta không thể kiểm tra bằng tay công thức này cho mọi trường hợp các số đếm đầu tiên, bắt đầu từ 1, do đó các chứng minh toán học tuyệt vời ở chỗ chúng không đòi hỏi nhiều sức lực để tính toán, kiểm tra. Nhà toán học Thụy Sĩ Leonhard Euler được tôn vinh bởi rất nhiều phát hiện toán học, đặc biệt trong lĩnh vực tô pô. Lời giải của ông cho bài toán Bảy cây cầu Königsberg được xem là đã đặt nền móng cho lĩnh vực này. Tô pô nghiên cứu các tính chất không thay đổi bất biến của vật thể khi nó bị biến đổi. Chẳng hạn, một hình lập phương có thể bị biến thành tứ diện bằng cách kéo giãn và nén lại, ngược lại tứ diện có thể biến thành hình vuông. Kích thước của nó rõ ràng đã thay đổi, cả số lượng các mặt, cạnh và đỉnh cũng vậy. Vì thế, ta càng băn khoăn: Liệu tính chất nào còn lại mà không thay đổi? Chính là tính chất: bất kỳ điểm nào nằm trong lập phương vẫn nằm lại bên trong tứ diện. Ngoài tô pô, Euler đã chứng minh một định lí tuyệt vời về một loại tính chất của hình đa diện, đó là: Nếu bạn cộng số mặt của đa diện với số đỉnh của nó, sau đó trừ đi số cạnh, kết quả sẽ luôn là 2. $F + V - E = 2$. Hãy thử kiểm tra công thức này đối với các khối Platoníc trong hình vẽ trên. Nếu bạn thấy hứng thú thì hãy kiểm tra trên hình rhombicosidodecahedron.





ci

oia

secula seculi. **D**ñi.

Dominus nobisc.

Et cum spū tuo!

Ergo in corda

remus ad dñm.

Dignas agamus

domino deo nostro.

Dignum et iusti

Urgit. **U**rgit. **U**rgit.

dignum et iusti est

optimum et salutar.

Dignus tibi semper.

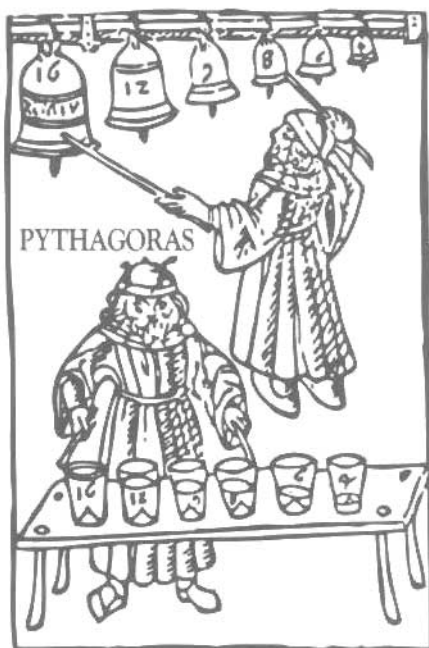
GIAI ĐIỆU CỦA TOÁN

TOÁN HỌC & ÂM NHẠC
TOÁN HỌC & THANG ÂM
TOÁN HỌC & ÂM THANH

Âm nhạc là niềm vui mà tâm hồn con người cảm nhận được từ các phép đếm, nhưng không hay biết gì về nó cả.

—Gottfried Wilhelm Leibniz

Âm thanh, dù là tiếng ồn hay âm nhạc, cũng đều bắt nguồn từ dao động của vật. Khi các vật như dây cao su, mẩu gỗ, dây đàn hay là cột khí trong ống sáo bắt đầu dao động, chúng làm các phân tử không khí xung quanh dao động theo. Các rung



động này lan truyền từ nguồn âm vào không gian ba chiều. Khi chúng tới màng nhĩ chúng ta, các dao động ở màng nhĩ gửi tín hiệu tới não và tạo ra cảm giác nghe. Mỗi dụng cụ âm nhạc đều có cách tạo dao động riêng, sau khi được tạo ra, các dao động tiếp tục tạo ra dao động khác trong suốt cấu trúc và vật liệu cấu tạo của dụng cụ đó. Ví dụ: khi dây đàn ghita được gảy lên dao động của nó làm các dây khác và toàn bộ cây đàn dao động theo.

Từ thời cổ xưa, toán học đã được dùng để giải thích âm nhạc. Ngày nay, sử dụng các kiến thức nghiên cứu được về âm học và cấu trúc âm, kết hợp với sự trợ giúp của các máy tính trong việc mô hình hóa, số hóa và lượng tử hóa âm nhạc, con người vẫn đang tiếp tục bước trên con đường tạo ra những cảm nhận âm thanh mới.

TOÁN HỌC VÀ ÂM NHẠC

*Liệu có thể không mô tả
âm nhạc như toán học của
cảm giác và toán học như
là âm nhạc của lý trí được không?*

—J.J.Sylvester

Âm nhạc và toán học có mối liên hệ với nhau đã hàng thế kỷ nay. Trong suốt thời trung cổ, các chương trình giáo dục luôn bao gồm số học, hình học, thiên văn học và âm nhạc. Ngày nay, các máy tính hiện đại là trung gian duy trì mối liên hệ này.

Khuông nhạc là ví dụ đầu tiên dễ thấy nhất về ảnh hưởng của toán trong âm nhạc. Trong bản nhạc, chúng ta thấy có nhịp độ (nhịp 4:4, nhịp 3:4,...), số phách trên một nhịp, nốt tròn, nốt trắng, nốt đen, nốt móc đôi,... Viết nhạc sao cho khớp số nốt



trong một nhịp gọi cho chúng ta nhớ đến quá trình tìm mẫu số chung, các nốt có độ dài ngắn khác nhau phải vừa vặn trong mỗi ô nhịp theo một nhịp độ nào đó. Người soạn nhạc viết nên bản nhạc thật phù hợp, thật đẹp và mềm mại trong cấu trúc cứng

nhắc của khuôn nhạc. Phân tích một tác phẩm hoàn thiện, ta thấy mỗi ô nhịp phải có một số lượng nhịp bắt buộc, trong khi các nốt lại có độ dài ngắn khác nhau theo ý muốn người soạn.

Bên cạnh mối liên hệ hiển nhiên với toán học, âm nhạc còn có liên hệ với các tỉ lệ, đường hàm mũ, hàm tuần hoàn và khoa học máy tính.

Về mặt tỉ lệ, các môn đệ của Pythagoras (585 - 400 tr.C.N) là những người đầu tiên kết hợp âm nhạc và toán học. Họ khám

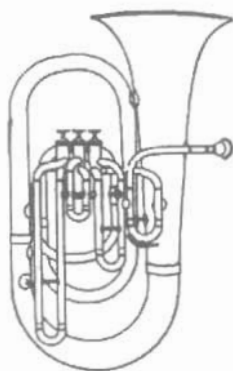
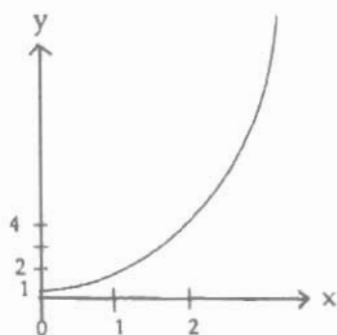


phá ra mối liên hệ giữa hòa âm và các số nguyên dương khi nhận ra rằng âm thanh tạo ra bởi dây đàn phụ thuộc vào chiều dài của dây. Họ cũng phát hiện ra âm thanh du dương là nhờ các dây đàn có cùng độ căng và có chiều dài tỉ lệ theo các số nguyên dương. Thực tế mỗi cách kết hợp phù hợp của các dây đàn có thể được thể hiện như tỉ lệ của các số nguyên dương.

Bằng cách tăng chiều dài dây chính, ta có thể tạo ra toàn bộ thang âm. Ví dụ: bắt đầu với dây cho ra nốt Đô, thì $16/15$ chiều dài của Đô cho ta nốt Xi, $6/5$ chiều dài của Đô cho ta nốt La, $4/3$ chiều dài của Đô cho ta nốt Sol, $3/2$ chiều dài của Đô cho ta nốt Fa, $8/5$ chiều dài của Đô cho ta nốt Mi, $16/9$ chiều dài của Đô cho ta nốt Rê và $2/1$ chiều dài của Đô cho ta nốt Đồ (tức nốt Đô nhưng thấp hơn một quãng tám).

Bạn có bao giờ tự hỏi tại sao chiếc đàn piano cánh lại có hình dạng như thế không? Thực tế, có rất nhiều dụng cụ

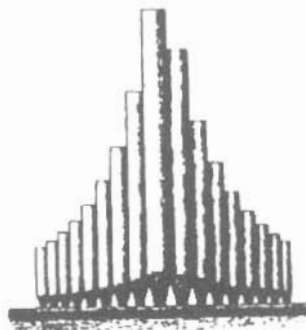
âm nhạc có hình dáng và cấu trúc liên quan đến các khái niệm toán học khác nhau. Hàm mũ và đường hàm mũ là ví dụ. Đường hàm mũ là đồ thị của hàm số dạng $y = k^x$, trong đó $k > 0$. Ví dụ như $y = 2^x$. Đồ thị của nó có hình dáng như hình vẽ dưới đây.



Các dụng cụ âm nhạc từ dây đàn hay từ các cột khí cũng phản ánh hình dạng đường hàm mũ trong cấu trúc của chúng.

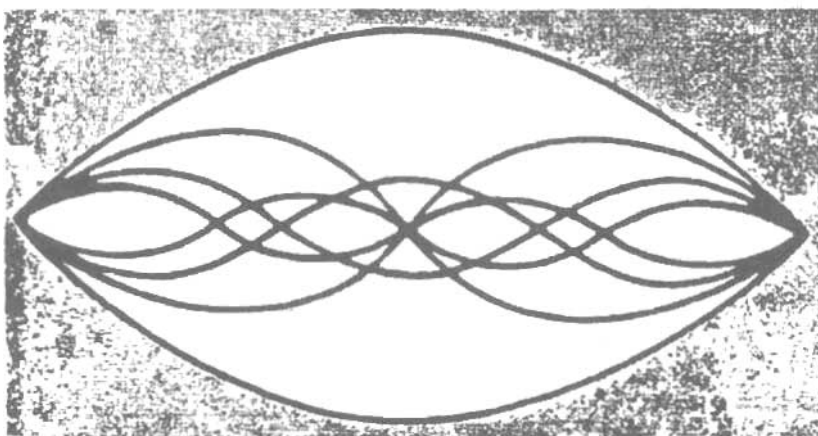
Việc nghiên cứu bản chất của âm trong âm nhạc đạt đến đỉnh cao với công trình của nhà toán học John Fourier vào thế kỷ XIX. Ông chứng minh rằng tất cả các âm của nhạc, trong cả khí nhạc và thanh nhạc, đều có thể mô tả được bằng các biểu thức toán học, cụ thể là tổng của các hàm sin tuần hoàn đơn giản. Mỗi âm thanh có ba đặc tính: cao độ, cường độ và âm sắc – chúng phân biệt các âm trong âm nhạc.

Nhờ có khám phá của Fourier, ba đặc tính của âm thanh đã có thể biểu diễn bằng đồ thị, hơn nữa còn giúp ta phân biệt rõ ràng chúng với nhau. Cao độ liên quan với tần số của đường cong, cường độ liên quan đến biên độ và âm sắc liên quan đến dạng của hàm tuần hoàn⁽¹⁾.



(1). Hàm tuần hoàn là hàm có đồ thị lặp lại sau mỗi đoạn cố định.

Nếu không có hiểu biết về toán học trong âm nhạc thì những tiến bộ trong việc sử dụng máy tính để sáng tác âm nhạc và thiết kế các dụng cụ âm nhạc là điều không thể thực hiện được. Những phát hiện toán học, mà cụ thể là hàm tuần hoàn, là yếu tố căn bản trong việc thiết kế các dụng cụ âm nhạc hiện đại và tạo ra âm thanh từ máy tính. Nhiều nhà sản xuất dụng cụ âm nhạc so sánh đồ thị âm tuần hoàn từ các sản phẩm của họ với đồ thị lí tưởng để phục vụ cho việc thiết kế. Độ trung thực của các âm điện tử cũng gắn bó chặt chẽ với đồ thị hàm tuần hoàn. Trong tương lai các nhạc sĩ và các nhà toán học vẫn tiếp tục đóng những vai trò như nhau trong quá trình sản xuất và tái sản xuất âm nhạc.



Biểu đồ này minh họa một dây đàn đang dao động từng phần và toàn bộ. Dao động lớn nhất xác định cao độ, còn các dao động nhỏ hơn tạo ra sự hòa âm.

TOÁN HỌC & THANG ÂM

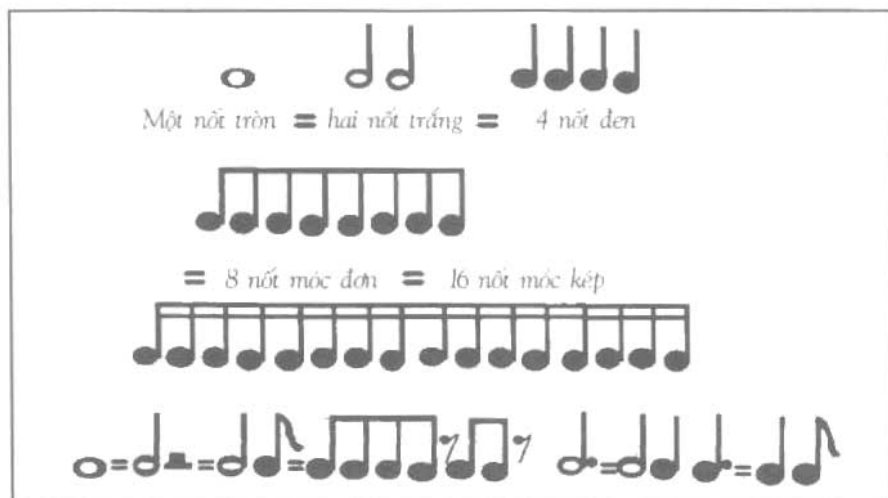
Tốc độ ánh sáng, c , π , e , ϕ và số Avogadro⁽¹⁾ đều là ví dụ về các hằng số trong vũ trụ của chúng ta. Đây là các số có vai trò trọng yếu trong các phương trình và công thức dùng để xác định nhiều đối tượng khác nhau trong thế giới chúng ta, dù chúng là hình học, vật lý, hóa học hay thương mại. Trong số những hằng số nổi tiếng này, có lẽ nên kể đến quãng tám như một hằng số có tính chất đặc biệt. Quãng tám đóng vai trò thiết yếu trong thế giới âm nhạc. Nó hình thành đơn vị, hay khoảng cách của một thang âm. Giống như tỉ lệ của chu vi đường tròn so với đường kính là π , tỉ lệ số lần dao động của dây đàn được gảy và số lần dao động của dây dài bằng nửa nó luôn là $1/2$. Hai dây này tạo nên cùng một loại âm thanh (chỉ khác nhau về cao độ) và hình thành độ dài của một quãng tám⁽²⁾, trong đó dây ngắn hơn có số lần dao động trong một giây gấp hai lần so với dây ban đầu. Số lượng nốt, hay việc chia nhỏ một quãng tám là bất kỳ và chịu



(1) Số lượng nguyên tử có trong 12g cacbon-12.

(2) Thuật ngữ "quãng tám" bắt nguồn từ một từ La-tinh có nghĩa là số tám. Thang âm có 7 nốt khác nhau từ Đô tới Xi, còn Đô - nốt Đô nhưng cao hơn một quãng tám - là nốt thứ 8.

ảnh hưởng của nhiều yếu tố. Hãy cùng xem xét các yếu tố ảnh hưởng đến việc tạo ra một thang âm cụ thể. Âm hay nốt là những thành phần tạo nên một thang âm. Mỗi âm có một tần số riêng.⁽¹⁾ Như đã nói, hai nốt cách nhau một quãng tám nếu tần số của một nốt gấp đôi tần số của nốt kia.⁽²⁾ Tai người được luyện tập có thể nghe khoảng 300 âm hoặc nốt khác nhau trong một quãng tám. Nhưng việc thành lập một thang âm với nhiều nốt như vậy sẽ thật buồn cười, bởi các dụng cụ âm nhạc không thể tạo ra nhiều nốt như thế. Ví dụ: nếu có 300 nốt trong một quãng tám, thì một cây đàn piano có tám quãng tám sẽ cần tới 2400 phím trắng. Bạn có thể tưởng tượng liệu người nhạc công



(1). Tần số là số lần dao động trong một giây. Có một tương ứng 1-1 giữa các âm thanh và các số (tần số của nó), mặc dù vậy tai chúng ta không được cấu tạo để có thể phân biệt tất cả các âm thanh.

(2). Dây đàn được gảy sẽ tạo nên một nốt nào đó, ví dụ nốt Đô có 264 dao động trong một giây. Khi dây đàn ngắn lại một nửa, quãng tám của nó được hình thành và dao động 528 lần trong một giây.

có thể chạy đi chạy lại để chơi trên một bàn phím dài như vậy không? Chính vì thế, số lượng các nốt bị giới hạn bởi sinh lí tai chúng ta và khả năng của các nhạc cụ. Vậy bằng cách nào và lựa chọn những nốt nào cho thang âm trong số 300 âm mà tai

người phân biệt được bây giờ? Chọn nốt cho thang âm cũng tương tự như chọn một hệ số đếm. Dùng cơ sở nào và kí hiệu nào để biểu diễn các số đây? Với thang âm, độ dài của dây tạo nên quãng tám cần phải được lựa chọn và số lượng các độ chia (các nốt tạo thành thang âm) cũng phải được xác định. Cũng như các hệ

số đếm, các thang âm khác nhau hình thành trong những



Bản nhạc trong sách kinh của bản Thánh ca Gregori thế kỉ thứ XIV.

nền văn minh khác nhau. Người Hy Lạp cổ đại dùng chữ cái của họ để kí hiệu bảy nốt trong thang âm. Các nốt này được nhóm lại thành dây bốn âm (bốn nốt), đặt trong các nhóm gọi là điệu. Các điệu chính là xuất thân của gam trưởng và gam thứ ở phương Tây. Người Trung Quốc thì dùng thang ngũ âm (năm nốt). Tại Ấn Độ, âm nhạc đã và vẫn đang được sáng tác trong những khuôn khổ đặc biệt xác định bởi điệu nhạc raga. Quãng tám ở đây được chia thành 66 quãng nhỏ gọi là srutis, mặc dù trong thực tế người Ấn Độ chỉ dùng 22 srutis và từ đó hai thang âm cơ bản 7 nốt được hình thành. Thang âm Ba Tư chia quãng tám thành 17 hoặc 22 nốt. Chúng ta thấy rằng dù quãng tám là bất biến, nhưng tồn tại những hệ thống nhạc khác nhau. Đơn giản là vì các dụng cụ âm nhạc của một nền văn hóa này không cần thiết sử dụng để biểu diễn âm nhạc của một nền văn hóa khác.

Các di vật khảo cổ bao gồm nhạc cụ, bình hoa, tượng và các bức bích họa mô tả cảnh các nhạc công đang chơi nhạc cụ, các ca sĩ đang hát và biểu diễn đã được tìm thấy. Ngoài ra, còn có rất nhiều di vật từ thời cổ xưa về các bản nhạc; các bản đất sét của người Sumer khai quật ở I-rắc cho thấy một thang âm tám nốt (khoảng năm 1800 tr.C.N); các đoạn nhạc khắc trên đá và trên giấy cói từ thời Hy Lạp cổ đại, các sách giáo khoa Hy Lạp (khoảng năm 100 tr.C.N); một bản viết tay của người Hy Lạp, trong đó các nốt được viết dựa theo bảng chữ cái (khoảng năm



Bức bích họa miêu tả các nhạc công được tìm thấy trong lăng mộ của Djoserkara tại Thebes, thành phố Ai Cập cổ đại bên bờ sông Nile.

300 tr.C.N); các bản nhạc viết tay của bài thánh ca đạo Hồi Ả-rập ở Tây Ban Nha thế kỉ VIII.

Trong suốt thế kỉ VI tr.C.N, Pythagoras và các môn đệ của ông là những người đầu tiên kết hợp âm nhạc với toán học. Các môn đồ của Pythagoras tin rằng các số, theo cách nào đó, thống trị

mọi thứ. Hãy hình dung niềm vui sướng của họ khi phát hiện ra quang tám của nốt nhạc, tính tuần hoàn của nốt và tỉ lệ của các nốt trên đàn dây. Ngoài ra, họ còn tin rằng các hành tinh



có âm nhạc của riêng mình, rằng các dân cư của bầu trời cũng sáng tác âm nhạc. Ý tưởng này được biết đến với cái tên “âm nhạc của các thiên cầu”. Kepler cũng tin vào âm nhạc của các thiên cầu và trên thực tế ông đã sáng tác nhạc cho mỗi hành tinh mà con người biết đến lúc bấy giờ. Ngày nay, các nhà thiên văn học thu nhận được các tín hiệu radio truyền đi bởi gió Mặt Trời. Các âm thanh này, bao gồm cả tiếng huýt gió, tiếng nổ lốp đốp, tiếng than, tiếng xuyết, khi được tổng hợp ở tốc độ cao sẽ trở nên du dương hơn. Các nhà khoa học cũng đã quan sát các dao động từ mặt trời mà họ phỏng đoán là chúng sản sinh ra rung động với các chu kỳ khác nhau. Liệu các thang âm có cần thiết trong sáng tác âm nhạc hay không? Nếu cần, thì các loài chim hát như thế nào? Trong giao tiếp bằng ngôn ngữ nói, các thể hiện bằng lời của một câu chuyện hay bản nhạc thường thay đổi rất ít. Vì vậy, để biểu diễn bản nhạc, thang âm là cần thiết. Các thang âm được viết bằng ngôn ngữ của âm nhạc, cũng như phương trình và kí hiệu được viết bằng ngôn ngữ của toán học vậy.

TOÁN HỌC VÀ ÂM THANH

Toán học đã làm đảo lộn và biến đổi âm nhạc cũng như sóng âm trong nhiều thế

kỷ này. Một cuộc đi dạo bên trong Thánh đường St. Peter ở Rome sẽ khiến bạn tin rằng vòm cong trên tường nhà thờ sẽ truyền lời thì thầm của bạn đến người nghe ở phía đối diện. Tham quan một buổi diễn kịch Hy Lạp tại nhà hát cổ đại Epidaurus, chúng ta sẽ hiểu các kiến trúc sư nhà hát đã phải nghiên cứu, thử nghiệm và tính toán về mặt âm học nhiều đến thế nào trước khi thiết kế và xác định vị trí của nhà hát ngoài trời phi thường này. Một khán giả ngồi ở hàng ghế xa nhất cũng có thể

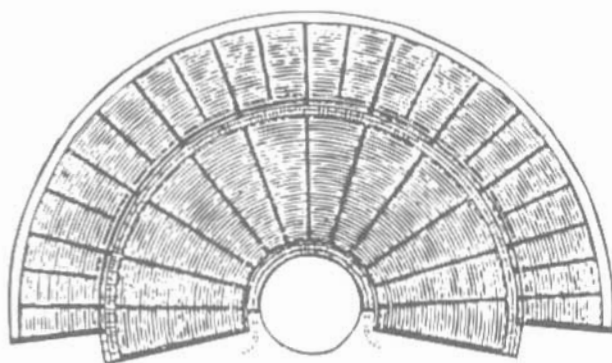


Nhà thờ St. Peter, Vatican.

đễ dàng nghe được tiếng diễn viên đánh rơi chiếc kẹp tóc trên sân khấu. Các hình toán học đặc biệt cũng được sử dụng để thiết kế các vật phản xạ âm thanh treo trên trần tòa nhà phía nam Rotunda của trụ sở Quốc hội Mỹ nhằm phản xạ cuộc nói chuyện của những người đứng tại tiêu điểm của parabol. Trong tòa nhà này, hai người có thể nói chuyện bình thường từ hai tiêu điểm mà không hề bị làm phiền bởi tiếng ồn trong sảnh.



Nếu hai parabol được đặt như trên hình vẽ, âm thanh xuất phát từ một tiêu điểm từ trần nhà parabol, phản xạ lại theo đường song song về phía trần nhà đối diện, tại đó nó tiếp tục phản xạ về phía tiêu điểm còn lại.

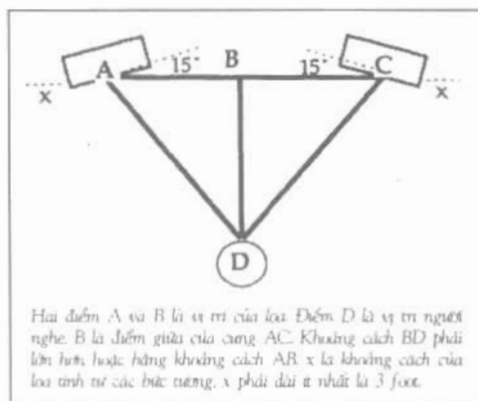


Hình vẽ này là một thiết kế của nhà hát Epidaureus thời Hy Lạp cổ đại. Còn bức ảnh bên dưới là hình ảnh nhà hát ngày nay. Cả thiết kế và vị trí lý tưởng của nó đều giúp cho việc làm tăng độ vang của âm thanh.



Như chúng ta đã thấy, việc tìm các điểm lí tưởng để phát và thu âm thanh không phải là chuyện trùng hợp. Âm học và âm thanh liên kết trực tiếp với các đối tượng và các ý tưởng toán học. Vào thế kỉ XIX, nhà toán học John Fourier đã chỉ ra rằng bản thân các sóng âm là các hàm sin tuần hoàn đơn giản. Ông chứng minh cao độ, cường độ và âm sắc lần lượt có mối liên hệ với tần số, biên độ và hình dạng của hàm sin.

Gần đây nhất, QSound đã được Panny Lowe và John phát minh, họ là các kĩ sư về ghi âm và cũng là những nhà toán học. QSound tạo ra âm thanh trong không gian nhiều chiều. Không giống như âm thanh nổi với nhiều âm phát ra từ các loa khác nhau, QSound truyền âm thanh đến tai bạn từ tất cả mọi hướng. Bạn sẽ được nghe âm thanh thực sự trong không gian ba chiều. Nó không đòi hỏi trang thiết bị nào mới ngoài máy stereo để nghe cassette hay đĩa CD với hiệu ứng QSound.⁽¹⁾ Với một máy nghe nhạc như vậy, bạn chỉ cần tìm một chỗ cho mình và chiếc loa, hãy để toán học về âm thanh lo liệu phần còn lại!



(1). Kể từ tháng 2 năm 1991, album The Immaculate Collection của Madonna và The Soul Cages của Sting là những album thương mại duy nhất có hiệu ứng QSound. Các đĩa sắp ra của Janet Jackson, Paula Abdul, Bon Jovi, Europe, Richie Zamboni, Stevie Nicks, Julian Lennon, Freddie Jackson, và Wilson Phillips đang được xúc tiến để nhận giấy phép sử dụng QSound.

O111000BỐT110101
NHỊ PHÂN 1 MÃ 001
NHỊ PHÂN CÁC SỐ
0110101BIT100BYTE
1010111LỖI01110001
CHIP010CÔNG THỨC
100PHÂN CỨNG 010
0PHÂN MỀM 110001
ĐĨA MỀM Ổ CỨNG
010111001DỮ LIỆU
NHẬP 00RAM01ROM
1010CONCHUỘT010
KILOBYTE10SCII0110
SCSI0110WYSIWYG
1 0 V I R U T 1 1 1
ẢNH ĐIỂM Ổ 01101BOOT
MEGABYTE011CÔNG

CUỘC CÁCH MẠNG MÁY TÍNH MÁY TÍNH - CÔNG CỤ SÁNG TẠO CỦA THẾ KỶ XXI

MỘT CÁI NHÌN VÀO QUÁ KHỨ
NHỮNG MÁY TÍNH CỔ XƯA
MỘT CÁI NHÌN VÀO HIỆN TẠI
MÁY VI TÍNH TRONG CÂY CỐI CỦA CHÚNG TA
TOÁN HỌC TRỞ THÀNH CON MẮT THỨ BA
BÍ MẬT CỦA TÔI LÀ GÌ?
NHẬT SỐ NGUYÊN TỐ
MẬT MÃ, SỰ HỖN LOẠN, DÂN CHƠI XAI-BƠ
& REMAILER
MÁY TÍNH, TƯỞI TIÊU & BẢO TỒN
TÀI NGUYÊN NƯỚC
MÁY TÍNH CHIẾN ĐẤU CHỐNG CHÁY RỪNG
MỘT CÁI NHÌN VÀO TƯƠNG LAI
THỰC TẾ ẢO TRONG KHÔNG GIAN MÁY TÍNH
SIÊU VĂN BẢN
LITTLE FERMAT
MÁY TÍNH & CUỘC SỐNG NHÂN TẠO
MÁY TÍNH QUANG HỌC
LOGIC MỜ & MÁY TÍNH

MỘT CÁI NHÌN VÀO QUÁ KHỨ

NHỮNG MÁY
TÍNH CỔ XƯA

- Mười ngón tay là công cụ đếm đầu tiên của chúng ta.

- Người Trung Quốc phát minh ra một loại hộp nhiều ngăn để tính toán với các số được kí hiệu bằng que tính. Chiếc hộp được dùng để viết ra các hệ phương trình.

- Bàn tính được dùng để tính toán trong rất nhiều nền văn hóa, bao gồm Trung Quốc, Hy Lạp, La Mã và Nhật Bản.

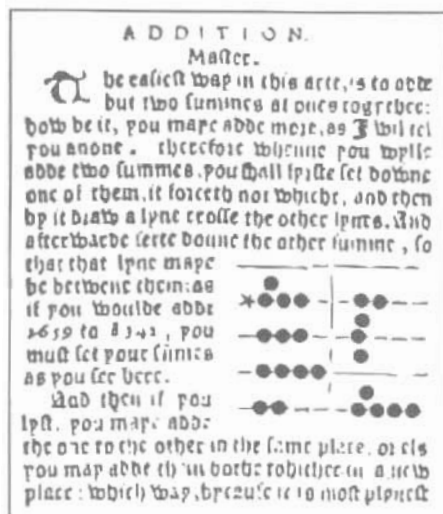
- Người Inca sử dụng dụng cụ có tên gọi là quipu với các nút thắt làm công cụ đếm.

- Thanh Napier được phát minh bởi John Napier vào thế kỉ XVII nhằm hỗ trợ việc tính toán.

- Thước loga phát minh bởi Edmond Gunter vào khoảng năm 1620.

- Vào năm 1642, Blaise Pascal phát minh máy tính cộng đầu tiên. Năm 1673, Wilhelm Gottfried von Leibniz phát minh ra chiếc máy có thể làm cả phép cộng và phép nhân.

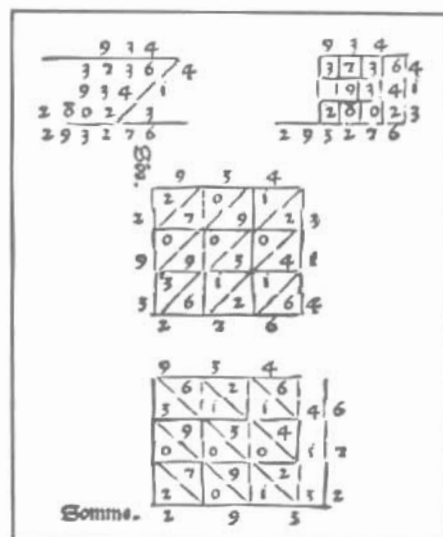
- Đầu thế kỉ XIX, các mô hình thiết kế và nghiên cứu về sai phân và máy phân tích của Charles Babbage đã đặt nền móng cho sự



hình thành máy vi tính sau này.

Hình minh họa này trích từ cuốn sách số học đầu tiên ở nước Anh The Grounde of Artes (Miền đất nghệ thuật) của Robert Recorde. Ngoài những dòng biểu diễn chữ số hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, những chỗ trống giữa các dòng này còn được dùng để biểu diễn các số 5 đơn vị, 50

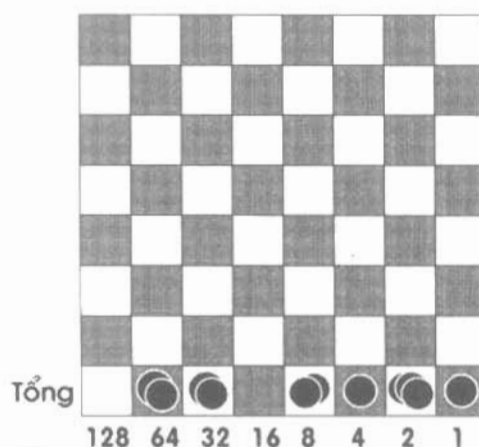
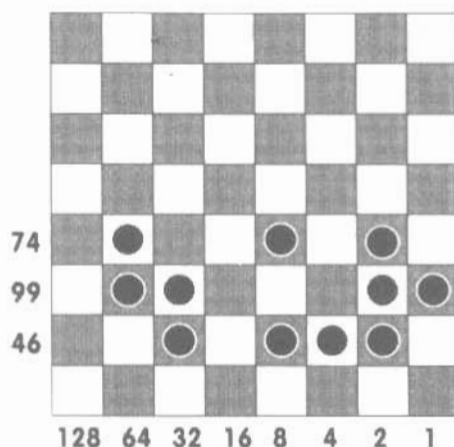
đơn vị, 500 đơn vị. Kí hiệu "x" trên dòng đầu tiên dùng để đánh dấu dòng hàng nghìn, nhưng sau đó nó dùng để chỉ dấu phẩy khi viết những số như 23.650. Khi năm nốt đếm cùng nằm trên một hàng, chúng bị xóa đi và một nốt mới được đưa lên dòng trên. Đó cũng



chính là bắt nguồn của thuật ngữ "nhớ". Ngoài viết cuốn sách này, Robert Recorde (khoảng 1510 - 1558) còn đưa ra kí hiệu "=" để chỉ sự bằng nhau và viết cuốn sách giáo khoa đại số quan trọng có tên gọi The Whetstone of Witte cùng cuốn sách hình học Pathway to Knowledge.

Các bảng này được trích từ một cuốn sách in năm 1478 tại Treviso, Ý. Nó minh họa bốn cách nhân 934 với 314.

BÀN TÍNH HÌNH BÀN CỜ CỦA NAPIER



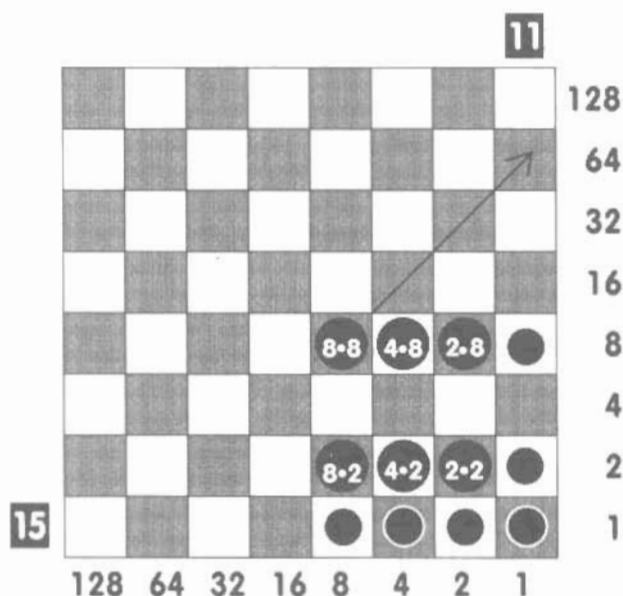
Biểu
diễn
cuối
cùng
của
tổng



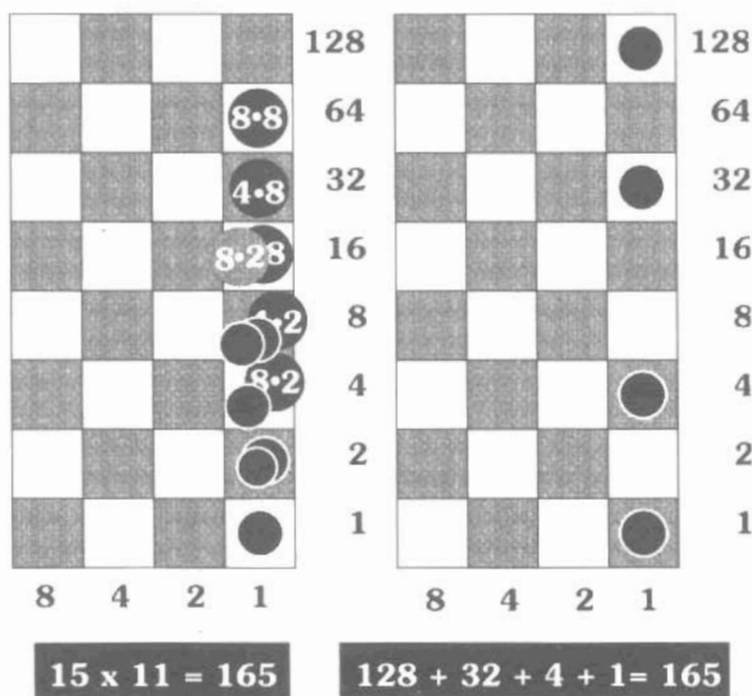
Hệ nhị phân (hệ cơ số 2) bao gồm hai số 0 và 1 chính là chìa khóa để kết nối chúng ta với thế giới máy tính điện tử, bởi 0 và 1 là chỉ hiệu cho hai trạng thái “tắt” và “mở” của dòng điện. Nhà toán học nổi tiếng người Scotland Napier (1550 – 1617) đã sử dụng hệ nhị phân trước cả khi phát minh ra dòng điện. Napier được biết đến nhiều nhất bởi đã có công cách mạng hóa việc tính toán bằng phát minh về lôgarit. Các que tính mà ông sử dụng để tính toán, thường được gọi là thanh Napier (hoặc quân cờ Napier) là dựa vào lôgarit và thường được các thương gia dùng để làm phép nhân, chia và cả các phép tính lấy căn bậc hai, căn bậc ba. Điều mà ít người biết đến chính

là phương pháp bàn cờ để tính toán của ông. Dù không dùng ký hiệu nhị phân để biểu diễn số, nhưng bàn tính bàn cờ quả thực

đã chỉ ra cách Napier biểu diễn các số trong hệ cơ số 2 như thế nào. Ví dụ, để cộng $74 + 99 + 46$, mỗi số được viết ra trên một hàng của bàn cờ bằng cách đánh dấu vào các ô thích hợp ở trên sao cho tổng giá trị của các ô đó (giá trị của mỗi ô được ghi ở dòng cuối cùng) bằng số cần biểu diễn. 74 có các dấu đánh vào ô 64, 8 và 2, vì $64 + 8 + 2 = 74$. Sau khi mỗi số đều được biểu diễn bằng cách đánh dấu trên bàn cờ, người ta cộng chúng lại với nhau bằng cách tập hợp các dấu trong cùng một cột vào dòng cuối cùng. Hai dấu nằm trên cùng một ô (ở dòng cuối cùng) bằng một dấu trong ô liền kề chúng bên trái. Vì thế hai dấu ở ô "2" sẽ cho ta một dấu ở ô "4". Tính từ phải sang trái, bất kì hai dấu nào nằm trên cùng một ô đều bị xóa và thay thế bằng một dấu ở ô liền kề về bên trái. Kết thúc quá trình, không ô nào có nhiều hơn một dấu. Tổng giá trị các ô được đánh dấu còn lại cuối cùng chính là tổng cần tìm của các ô ban đầu.



Để nhân bằng bàn tính bàn cờ Napier, ta sử dụng biểu diễn của các số ở hàng ngang và hàng dọc.



Giả sử chúng ta muốn nhân 15×11 . Một số được đánh dấu trên hàng ngang cuối cùng, số còn lại được đánh dấu trên cột cuối cùng phía bên phải. Sau đó, một dấu mới được đánh tại các ô giao nhau của mỗi hàng có ô đánh dấu và mỗi cột có ô đánh dấu. Khi hoàn tất việc đánh dấu tất cả các ô giao nhau, có thể nhân bằng cách lấy ô ở cột cuối cùng làm điểm tựa, xoay các hàng ngang thành hàng thẳng đứng theo ngược chiều kim đồng hồ. Cuối cùng, cũng giống như khi làm phép cộng, hai dấu trong cùng một ô bị xóa bỏ và thay thế bằng một dấu trong ô kế tiếp ở phía trên. Số biểu diễn ở cột cuối cùng sau khi kết thúc quá trình này chính là tích của 15×11 .

MỘT CÁI NHÌN VÀO HIỆN TẠI

Sẽ là vô ích nếu những người tài giỏi dành hàng giờ làm việc như nô lệ trong phòng thí nghiệm để tính toán, trong khi bất kì ai cũng có thể xóa bỏ công việc này nếu máy tính ở đó.

—*Gottfried Wilhelm von Leibniz.*

MÁY VI TÍNH TRONG CÂY CỐI CỦA CHÚNG TA

“Tôi là một người theo chủ nghĩa truyền thống.”, “Tôi từ chối làm bất cứ điều gì với nó.”, “Tôi không thể hiểu tại sao một người lại có thể ngồi hàng giờ trước nó.”, “Chúng thật vô cảm.”, “Tôi chẳng biết gì về máy vi tính cả.” Đã bao nhiêu lần bạn nghe, hoặc có lẽ nói ra những câu này? Nhưng dù không thích máy tính, chúng ta vẫn phải chấp nhận chúng, bởi chúng ta có cảm thấy thế nào đi nữa thì máy vi tính vẫn ở đó. Chúng giúp cho cuộc sống của chúng ta dễ dàng hơn ở một khía cạnh nào đấy nhưng lại làm cuộc sống phức tạp hơn ở khía cạnh khác và chúng vẫn cứ đang xâm nhập vào cuộc sống riêng tư của chúng ta. Trên thực tế, rất khó hình dung lại những ngày tháng khi máy vi tính chưa ra đời. Giờ đây chúng thậm chí còn ở trong cả cây cối của chúng ta!

Sự phát triển của cây cối có thể được mô phỏng lại bằng các đồ thị hoặc fractal. Máy tính có thể mô hình hóa các vụ cháy rừng, và nhờ đó vạch ra chiến lược để dập tắt lửa hay tạo những đám cháy kiểm soát được. Ngoài ra, máy tính còn được ứng dụng rất nhiều trong vấn đề quản lí cây cối thành phố. Nhiều thành phố, trong những nỗ lực bảo vệ và duy trì sự tươi tốt của cây cối, đã phải viện đến máy tính. Bang Washington D.C. có cả một cơ sở dữ liệu về khoảng 109 000 cây trên đường phố, trong khi Paris, Pháp cũng có dữ liệu về

khoảng 100 000 cây đang được lưu trữ trên hệ thống máy tính của mình. Vậy những thông tin nào sẽ được lưu trong đó? Mỗi thành phố sẽ quyết định thông tin nào là cần thiết cho riêng họ. Ví dụ dữ liệu của Paris bao gồm: vị trí của cây (mỗi cây được đánh số liên tục dọc theo từng con phố, khoảng cách của nó so với các tòa nhà và các cây liền kề đều được ghi chú), các thông tin về đời sống của chúng (loài, giới tính, tuổi, kích



thước thân cây, chiều cao), đã được cất trữ như nào, các thống kê môi trường (bao gồm loại đất, không gian trồng cây, hệ thống thoát nước, sự che phủ), tình hình sức khỏe của cây (trạng thái và các bệnh tật), các chất gây ô nhiễm và tác động đến môi trường xung quanh. Việc thu thập các thông tin như vậy rất mất thời gian, cả việc cập nhật chúng cũng vậy. Nhưng

chính vì cây cối là tài sản vô giá đối với bất kì một cộng đồng nào cả về mặt thẩm mĩ và môi trường nên thời gian đầu tư và các kết quả về lâu dài sau này khiến cho những cơ sở dữ liệu đó trở nên vô cùng có giá trị. Tại San Francisco, California, những người quản lí cây xanh thành phố lưu giữ những bản kiểm kê bằng máy tính xách tay. Paris sử dụng cùng một phương pháp với Washington D.C., trong đó mỗi bản thống kê ban đầu là do các kĩ sư cao đẳng vẽ rừng thu thập bằng máy tính xách tay. Không có máy tính, sẽ không thể quản lí những dữ liệu phức tạp đến như vậy. Chỉ riêng việc lưu trữ và không gian cần thiết để chứa tài liệu lưu trữ cũng đã lớn khủng khiếp, đó là chúng ta còn chưa nói đến việc cập nhật, tìm kiếm và sắp xếp chúng.

* * *

Một khi máy tính được đưa vào sử dụng, các chức năng của nó sẽ từ từ xâm nhập mọi khía cạnh cuộc sống của chúng ta. Cũng giống như các nhà buôn và các nhà hàng hải thời trước phải tự hỏi họ sẽ làm việc thế nào nếu thiếu các que tính Napier, hay như những nhà ghi chép Inca không biết sẽ dùng cách nào để ghi lại phát minh của nhân dân và các sản phẩm của đế chế nếu không có quipu. Ngày nay, chúng ta cũng trong hoàn cảnh tương tự, không biết sẽ ra sao nếu thiếu máy vi tính.



Mã vạch để dán nhãn và theo dõi thông tin các sản phẩm như cây cối, rau xanh và các thùng hàng

Như chúng ta đã thấy, với cây cối trong thành phố, máy tính đóng vai trò quan trọng không thể thiếu trong việc lưu trữ, xử lý và khôi phục dữ liệu. Ngày nay, các thiết bị nhập dữ liệu vào được dùng tại các nhà hàng để xử lý đơn gọi đồ ăn, mã vạch được dùng trong các cửa hàng, trong thương mại buôn bán để kiểm kê và theo dõi. Trong khoa học, máy vi tính có ý nghĩa vô giá và không thể thay thế được trong việc phân tích, so sánh và tính toán thông tin. Nó giúp con người tiết kiệm một lượng thời gian khổng lồ, mà sai sót lại rất ít khi xảy ra. Ảnh hưởng của chiếc máy vi tính đang trên đà phát triển đối với nền văn minh nhân loại sẽ là một bước ngoặt lớn, giống như sự xuất hiện của bóng đèn điện vậy.

TOÁN HỌC TRỞ THÀNH CON MẮT THỨ BA

Các gợn toán học⁽¹⁾ là một kĩ thuật và công cụ mới trong đấu tranh chống tội phạm tại Hoa Kỳ. Các nhà toán học đã phát triển kĩ thuật phân tích gợn để xử lí hình ảnh nhanh hơn, chính xác hơn. Phương pháp này chia hình ảnh thành các thành phần cơ bản. Sau đó, nó lọc ra những thông tin quan trọng và có liên quan cần dùng cho việc tái tạo



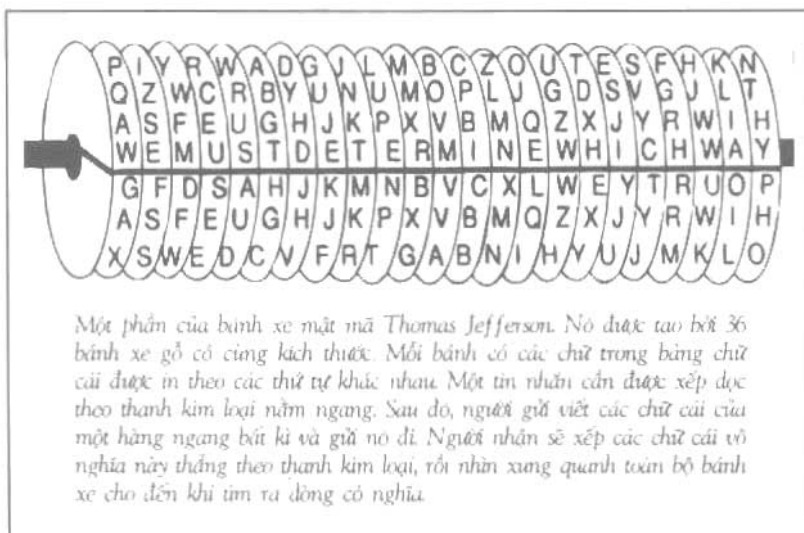
hình ảnh và loại bỏ những thông tin không cần thiết. Như vậy, các gợn đã giảm khối dữ liệu cần lưu giữ, truyền tải và cần dùng để khôi phục hình ảnh. Việc nén dữ liệu này giúp chúng ta tiết kiệm thời gian và tiền bạc. Hơn nữa, các gợn không làm biến dạng hình ảnh như những phương pháp khác. Các ưu điểm này cho phép FBI (Cục điều tra liên bang Mỹ) xử lí, nhận dạng và đối chiếu hình ảnh hay dấu vân tay của một người hiệu quả hơn.

(1). *Mathematical wavelets*

BÍ MẬT CỦA TÔI LÀ GÌ?

Chính phủ, các nhà cách mạng, các nhà tài chính luôn luôn cần gửi - nhận những

thông tin tuyệt mật. Rất nhiều phương pháp mã hóa và giải mã thông tin đã được nghiên cứu nhiều thế kỉ qua. Trong số đó có gậy mã hóa của người Sparta⁽¹⁾, hình vuông mã hóa Polybius⁽²⁾, phương pháp thay thế chữ cái của Julius Caesar, bánh xe mã hóa của Thomas Jefferson và mật mã quân sự Enigma của Đức. Còn



rất nhiều ví dụ trong văn học, nơi mật mã là yếu tố quan trọng của câu chuyện, như *The Gold Bug* (Bọ rầy vàng óng ánh) của

(1) Phutarch đã miêu tả cách thức thông tin được trao đổi bằng cách quấn xoắn một dải giấy da quanh một cây gậy tròn. Sau đó viết thông tin lên dải giấy rồi tháo giấy ra và gửi nó cho người nhận, người nhận phải có cây gậy giống y như vậy để quấn giấy lại và giải mã tin nhắn.

(2) Khoảng năm 200-118 tr.CN Một người Hy Lạp tên là Polybius đã tìm hiểu loại mật mã mới được thiết kế quanh một hình vuông 5x5, trong đó mỗi chữ trong bảng chữ cái biến đổi thành một số có hai chữ số có độ lớn từ 1 đến 5.

Edgar Allan Poe, *La Jangada* (800 dặm trên dòng Amazon) của Jules Verne, *The Adventure of the Dancing Men* (Những hình nhân nhảy múa) của Conan Doyle.

Trong suốt 20 năm qua, công thức mã hóa DES đã được các ngân hàng, các trụ sở chính phủ và công ty tư nhân tại Mỹ dùng để giữ gìn thông tin. Phương pháp này sử dụng 56 bit dữ liệu máy tính, trên lý thuyết phải cần 200 năm để giải mã trong trường hợp ta dùng một siêu máy tính. Các cơ quan tình báo và hành pháp Mỹ lo ngại rằng những phương pháp hiện nay không đủ và không có khả năng ngăn chặn các cuộc xâm nhập thông tin từ giới tội phạm, khủng bố và chính phủ nước khác. Vì vậy, một hệ thống mới đang được đưa ra với công thức sử dụng 80 bit, trên lý thuyết sẽ phải cần hơn một tỉ năm mới hóa giải được. Cách tiếp cận mới này dùng một vi mạch gài vào các điện thoại, vệ tinh, máy fax, các modem,... để đổi tần số những cuộc kết nối mật. Vi mạch nói trên sử dụng các công thức toán mật, được Cơ quan An ninh Quốc gia Hoa Kỳ phát triển. Ngoài ra, chìa khóa toán học để giải những thông tin mã hóa này sẽ được FBI lưu giữ và những cơ quan khác do Bộ trưởng Tư pháp Hoa Kỳ chỉ định. Quá trình sản xuất vi mạch sẽ khiến cho khả năng tháo rời và giải mã nó gần như bằng không. Có những người, như Mitchell Kapor tại Electronic Frontier Foundation⁽¹⁾ đã nói: "Một hệ thống dựa vào kỹ thuật mật không nên và cũng sẽ không chiếm được lòng tin của người dân Hoa Kỳ"⁽²⁾.

(1) Một hội luật sư công cộng chuyên bảo vệ quyền tự do của người dùng máy tính ở Washington D.C., Mỹ Hội được thành lập năm 1990 bởi Muchell Kapor và John Perry Barlow.

(2). Secret Phone Scheme Under Fire, tác giả Don Clark, San Francisco Chronicle, tháng 5, năm 1993.

53 † † † 305) 16° ;4826)4†.) 4†)
 ;806° ;48†8(60) 185;13° ;:†*8†83
 (88)5*†;46(88°96*?;8) *†(485)
 ;5*†2:*†(4956*2(5*-4)8(8°
 ;4069285) ;16†8)4††;1 (†9;48081
 ;8:8†1 ;48†85;4) 485†528806°81
 (†9;48;(88;49†?34;48)4†;161;:
 188;†?;

Bản mã hóa bằng phương pháp thay
 thế chữ cái trong tác phẩm Bọ rầy
 vàng óng ánh của Edgar Allan Poe.

*Biên dịch: A good glass in the bishops hostel in the devils
 seat twenty-one degrees and thirteen minutes northeast
 and by north main branch seventh limb east side shoot
 from the left eye of the deaths-head a bee line from the
 tree through the shot fifty feet out.*

(Phần này chúng tôi xin phép không dịch sang
 tiếng Việt, vì nếu dịch sẽ làm sai mã hóa - ND).

NHẬT SỐ NGUYÊN TỐ

2 8 756839

4
5
9
11
14
23
37
6
18
51
87
641
273

Một trong những phương pháp đầu tiên để tìm số nguyên tố được nhà toán học người Hy Lạp Eratosthenes (275 - 194 tr.C.N) nghiên cứu. Ông tạo ra sàng nguyên tố để loại bỏ bội số của các số cho trước. Kể từ đó các nhà toán học đã tìm hiểu thêm các phương pháp để tìm ra và nhận biết số nguyên tố.

Năm 1640 Pierre de Fermat tuyên bố rằng tất cả các số có dạng $F_n = 2^{2^n} + 1$ (với $n = 0, 1, 2, 3, \dots$) đều là số nguyên tố. Điều này đúng với năm số Fermat đầu tiên ($n = 0, 1, 2, 3$ và 4). Nhưng vào thế kỉ sau, Leonhard Euler đã phân tích số Fermat thứ 6 (F_6) thành tích của 641 và 6700417. Năm 1880 số Fermat F_6 được phân tích thành $274177 \times 67280421310721$. Hiện tại không có số Fermat nào khác được tìm là số nguyên tố và kể từ năm 1993 số Fermat thứ 23 (F_{23}) được chứng minh là hợp số.⁽¹⁾ Năm 1644, thầy tu người Pháp Marin Mersenne đã viết biểu thức $2^p - 1$, trong đó p là số nguyên tố, để tạo ra số nguyên tố mới. Nhưng không phải tất cả các số cho bởi công thức này đều nguyên tố. Hiện

tại có 33 số nguyên tố Mersenne được tìm ra. Ngày nay, khi làm việc với các biểu thức (như biểu thức của số Mersenne, số Fermat, số Carmichael và các số khác), với lý thuyết số và các kĩ thuật lập trình máy tính, các nhà toán học sử dụng các

7455602825647884208837395736200454918783366342657

(1) Projects in Scientific Computation của Richard E. Crandall Springer-Verlag, Santa Clara, CA 1994

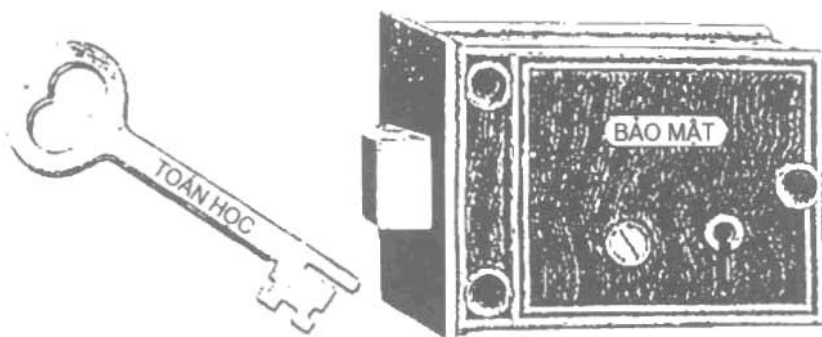
siêu máy tính hoặc dạy các máy tính cá nhân gia tốc để đi tìm các số nguyên tố ngày càng lớn hơn nữa và tìm kiếm những đặc điểm hay công thức có thể cho ra số nguyên tố nhanh nhất.

TAI SAO LẠI QUAN TÂM ĐẾN SỐ NGUYÊN TỐ? — Sự ham hiểu biết — lập kỉ lục mới — kiểm tra phần cứng và hiệu quả hoạt động của các máy tính mới — sử dụng số nguyên tố để thành lập các sở mới nhằm mã hóa các tài liệu mật. Ngày nay, các máy vi tính với khả năng lập trình và giải toán tài tình đã giúp chúng ta tìm được những số nguyên tố vô cùng lớn. Từ năm 1993, SỐ NGUYÊN TỐ LỚN NHẤT MÀ CON NGƯỜI TÌM ĐƯỢC là $2^{69491} - 1$ ⁽¹⁾.

(1) David Slowinski năm 1993. Được Richard Crandall kiểm tra.

**MÃ HÓA,
SỰ HỖN LOẠN, DÀN
CHƠI XAI-BƠ & REMAILER**

Đã khi nào bạn cảm thấy bức mình và tự hỏi tại sao mình lại có nhiều thư rác⁽¹⁾ đến như vậy hay những catalog mà bạn không bao giờ yêu cầu hoặc đặt hàng? Làm thế nào mà người ta có thể truy cập vào tên và địa chỉ của bạn được? Để trả lời cho những câu hỏi này, xin mời bạn đến với thời đại điện tử và vi phạm quyền cá nhân. Mỗi cá nhân đều có một lượng dữ liệu điện tử đáng kể có thể truy cập được bởi máy tính hay người điều hành hoặc sử dụng mạng khi họ tạo thông tin về bạn thông qua những thứ bạn mua sắm, vé du lịch, phiếu sức khỏe, vé tàu xe, những khoản vay,... Mặc dù



sự mất riêng tư này là do các phương thức công nghệ mới ngày nay tạo ra nhằm lưu trữ và xử lý thông tin, nhưng có lẽ cách duy nhất để phục hồi lại quyền riêng tư là sử dụng chính những phương pháp như vậy. Những dân chơi xai-bơ như họ tự gọi mình đã xuất hiện để giải cứu tình trạng này. Họ chủ trương khôi phục riêng tư cá nhân bằng cách sử dụng các phương pháp mã hóa phức tạp để mã hóa thông tin, sau đó ngăn cản việc sử

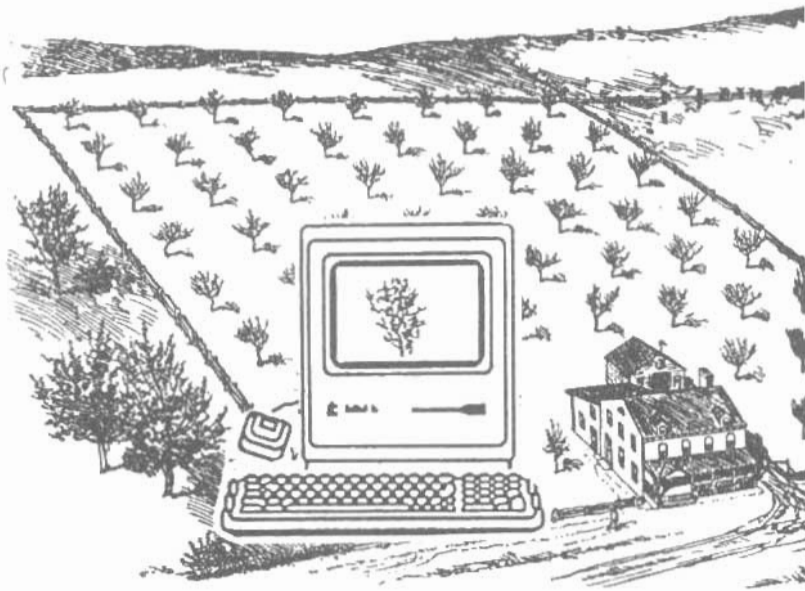
(1). Ở đây tác giả nói tới thư điện tử.

dụng nó. Tất nhiên, có cả ý kiến ủng hộ lẫn phản đối việc mã hóa hỗn loạn này. Một số người cảm thấy các cơ quan chính phủ và hành pháp có quyền nghe trộm và cách thức mời của các dân chơi vai-bơ sẽ cản trở công việc đó. Remailer⁽¹⁾ là ví dụ về một trong những phương pháp sử dụng mã hóa cải tiến, nó cho phép một người gửi thông tin qua modem mà không để lại bất kì dấu vết nào về anh ta. Nhiều người cho rằng nếu chính phủ có thể dùng các phương thức và thiết bị để mã hóa thông tin quan trọng, thì cá nhân cũng có quyền sử dụng các phương pháp tương tự để bảo vệ quyền riêng tư của mình.

(1). Gửi mail nhiều lần gửi đi chỉ nguồn và địa chỉ đích để không lộ ra nơi gửi mail thực sự

MÁY VI TÍNH, TƯỚI TIÊU VÀ BẢO TỒN TÀI NGUYÊN NƯỚC

Bạn sẽ thấy thật kì lạ khi nhìn cây trồng mọc lên tươi tốt trên những mảnh đất cằn khô, đôi khi nứt nẻ. Ngày nay, với việc sử dụng kĩ thuật tưới nhỏ giọt dưới bề mặt đất đã được vi tính hóa, nước, phân bón và đôi khi cả thuốc trừ sâu có thể đưa thẳng được tới rễ cây. Nhờ cách tưới nhỏ



giọt dưới bề mặt đất, người nông dân trồng nho tên Lee Simpson ở Fresno, California, đã cắt giảm được lượng tiêu thụ nước xuống một nửa, giảm sử dụng thuốc sâu xuống còn một phần sáu trong khi năng suất lại tăng gấp đôi. Cũng tại Fresno phòng tài nguyên nước của California đã kiểm tra dự án trên cánh đồng bông rộng 160 acre (1 acre bằng khoảng 0,4 hecta) của Harris Farms, nơi thu hoạch được 1600 pound bông trên một acre so với 930 pound trên một acre từ vụ trước, ngoài ra trên mỗi acre sử dụng ít hơn 7 inch nước. Claude Phené đã trở thành tấm gương

diễn hình về phương thức trồng trọt "mới" này (tưới nước nhỏ giọt trên thực tế đã xuất hiện được khoảng 20 năm). Phené chủ trương bảo vệ môi trường và nâng cao sản lượng bằng phương pháp này trong nhiều năm, nhưng cho đến năm 1987 mới có một vài nông dân chú ý tới nó. Phené đã kiểm nghiệm cách này với ruộng cà chua của ông ở California. Những acre đất trước đây cho sản lượng 26 tấn/acre, thì nay cho sản lượng 100 tấn/acre. Phené chỉ ra rằng không cần thiết phải làm ngập cả một căn phòng chỉ để tưới cho một chậu cây. Các thống kê của ông cho thấy ngành nông nghiệp của California sử dụng tới 85% lượng nước cung cấp của bang, và nếu tưới nước dưới bề mặt đất đã vi tính hóa⁽¹⁾ được sử dụng chỉ với một loại cây thôi, ví dụ trồng bông - trên mỗi 1,4 triệu acre đất tiết kiệm được 6 inch nước, thì sẽ tiết kiệm đủ nước để cung cấp cho cả Los Angeles. Phương thức này cũng giảm lượng tiêu thụ thuốc bảo vệ thực vật vì cỏ dại không thể mọc lên giữa các luống cây - cây trồng được tưới nước ở rễ nên không dư thừa nước cho cỏ dại. Bên cạnh đó, lượng phân bón và thuốc trừ sâu cần sử dụng cũng sẽ giảm đi hơn một nửa. Kỹ thuật tưới nước được vi tính hóa này của ông cho phép phát hiện ra tương tác giữa các chất dinh dưỡng khác nhau, sắp xếp thời gian dùng từng loại và tìm hiểu ảnh hưởng của chúng tới sản lượng vụ mùa, đồng thời tối ưu hóa lượng phân bón để đạt chất lượng cây trồng cao nhất. Ngoài ra còn có thể theo dõi rất nhiều yếu tố khác từ kết cấu đất cho tới đặc tính rễ của cây trồng.

(1). Cây trồng được tưới bằng những ống đặt ngầm ở dưới mặt đất, cách mặt đất 18 inch. Hệ thống thẩm kế rất nhạy sẽ phát hiện ra những hạt sương vào buổi sáng, đo lượng nước mà cây trồng hấp thụ và thoát ra, đo các dữ kiện thời tiết. Máy tính sẽ thu thập lại và phân tích các dữ liệu, sau đó chuyển thông lượng nước nhỏ đến cho rễ cây trong cả ngày, đôi khi là chuyển cả phân bón và thuốc trừ sâu, thuốc trừ cỏ. Nếu không muốn đầu tư vào một hệ thống máy vi tính, những trang trại nhỏ lẻ có thể kiểm soát năng suất của họ thông qua modem tại vị trí đặt máy vi tính trung tâm.

**MÁY TÍNH
CHIẾN ĐẤU
CHỐNG
CHÁY RỪNG**

Ngày nay, mô hình hóa trên máy tính là công cụ rất hữu hiệu đối với các nhà khoa học và các giáo sư trong nhiều lĩnh vực nghiên cứu, chúng giúp các nhà kinh tế dự báo các chu kì kinh tế, giúp các bác sĩ giám sát và chẩn đoán sự lây lan các bệnh truyền nhiễm, giúp các nhà xã hội học thống kê, dự báo các xu hướng của xã hội,... Danh sách này dường như là bất tận.



Ngày trước, cách đây không lâu, công cụ của những người lính cứu hỏa chỉ là những bộ quần áo bảo hộ, riu, cuốc chim, dây thừng, cưa dây xích, chặn chống lửa, nước và hóa chất. Nhưng hiện nay, một số lính cứu hỏa đã được trang bị máy tính xách tay hoặc thậm chí cả một phòng thí nghiệm di động ở giữa rừng với đầy đủ các máy tính cá nhân. Bên cạnh việc theo dõi con người và các trang thiết bị khác, máy vi tính còn được sử dụng để phân tích những đám cháy rừng.

Vào năm 1984, trong quá trình làm việc tại Phòng thí nghiệm khoa học về cháy rừng liên đới thuộc Bộ Lâm nghiệp Liên bang Hoa Kỳ ở Montana, nhà toán học Patricia Andrews đã lập được chương trình phần mềm đặt tên Behave. Người ta nhập vào máy tính các số liệu như: vị trí của đám cháy, phần diện tích rừng đang bị cháy, các điều kiện thời tiết (tốc độ và hướng gió, độ ẩm...), các loại cây hoặc cỏ đang bị cháy và nhiều thông tin chi tiết hơn nữa. Sau đó, chương trình phần mềm máy tính sẽ đưa ra một mô hình dự báo về tình hình diễn biến của ngọn lửa, từ đó giúp cho những người quản lí rừng quyết định cách thức chữa cháy tốt nhất đối với từng khu cụ thể. Đương nhiên là chương trình này không thể dự báo tất cả các chiều hướng có thể xảy ra, nhưng nó có thể không ngừng cập nhật để trở nên bao quát hơn. Một ví dụ thành công của Behave là những điều nó dự đoán mới đây đã thực sự xảy ra, bao gồm trận cháy rừng trên các ngọn cây ở Yellowstone - ngọn lửa chỉ cháy và lan rộng từ ngọn cây này lan sang ngọn cây khác. Effect là một chương trình đi kèm theo Behave, được sử dụng trong quản lí rừng với mục đích ra quyết định tiến hành những đám cháy có kiểm soát. Những chương trình phòng - chữa cháy kĩ thuật cao này ngày nay đang được sử dụng ở Trung Quốc, đã được dịch sang tiếng Tây Ban Nha, còn nước Ý thì đang đặt mua.

MỘT CÁI NHÌN VỀ TƯƠNG LAI

Chính sự trẻ trung bất diệt của toán học phân biệt nó với những ngành khoa học khác.

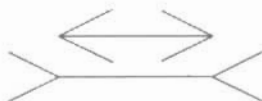
—Eric Temple Bell

THỰC TẾ ẢO TRONG KHÔNG GIAN MÁY TÍNH

Vào những năm 1500, loài người đã được chứng kiến sự tuyệt vời của máy chiếu phim. Các cảnh chuyển động thực của những việc diễn ra bên ngoài căn phòng được chiếu lên bức tường của một căn phòng tối. Không có thiết bị điện tử nào cần dùng đến để mang những cảnh này vào phòng. Sau đó, vào nửa sau thế kỷ XIX, một lần sóng quan tâm tới ảnh ảo giác nổi lên. Các nhà vật lý và tâm lý đã nghiên cứu và viết về cách thức não chúng ta bị lừa bởi những gì chúng ta quan sát được. Cấu tạo của mắt và những phân tích về cách não bộ xử lý thông tin từ mắt được tìm hiểu chỉ nhằm giải thích một điều - những ảnh ảo giác đã lừa bộ não chúng ta tin rằng chúng tồn tại như thế nào.

Một số điều đã được khám phá là:

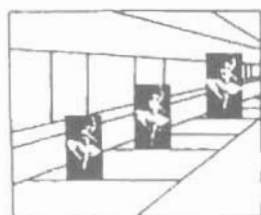
- (1) Việc sắp xếp các góc và các đoạn có thể làm mất chúng ta tập trung vào trong hay ra ngoài, và vì thế làm cho vật có vẻ như ngắn hơn hoặc dài ra.



- (2) Các vật nằm ngang có xu hướng ngắn đi vì võng mục mắt chúng ta cong.

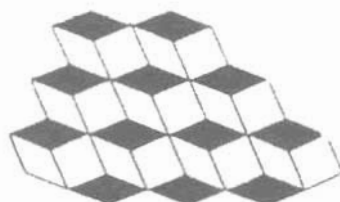
- (3) Vùng ánh sáng trên võng mạc tỏa sáng vào vùng ánh đen, vì thế làm vùng đen có vẻ như nhỏ hơn.



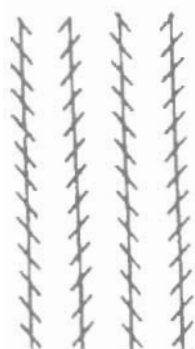


(4) Các vật giống nhau ở những vị trí khác nhau trong bức tranh phối cảnh trông như là không bằng nhau.

(5) Nếu một ảnh có thể nhìn nhiều cách, thì nào chúng ta sẽ lượng lệ qua lại giữa các hình ảnh đó.

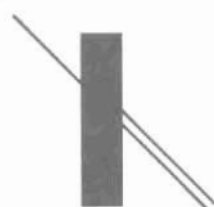


(6) Những đường gạch chéo làm cho các đường song song có vẻ như không song song.



(7) Một không gian rỗng và không gian có kích thước cũng như vậy nhưng bị lấp đầy trông có vẻ như không bằng nhau.

(8) Một đường chéo bị cắt bởi thanh thẳng đứng khiến cho hai đoạn đường như không thẳng hàng.



Vào thế kỷ XX, các nhà khoa học máy tính, các nhà toán học và các nhà phát minh đã đưa quang học, công nghệ vi tính và ảnh ảo giác lên tầm cao mới với **sự hình thành những thế giới ảo**. Được trang bị những máy móc thiết bị khác nhau, khán giả giờ đây không chỉ ngồi trước màn hình và quan sát nữa, họ thực sự tham gia vào thế giới tạo ra bởi máy tính.

Trong những thế giới ảo này, người xem có thể là người tham gia. Ví dụ như họ có thể là:

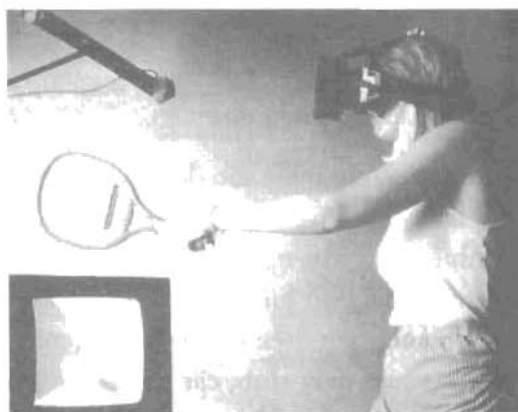
- Một vận động viên điền kinh Olympic đang trải qua cảm giác hồi hộp trong cuộc đua giành huy chương vàng.
- Một người kiểm soát không lưu hướng dẫn các máy bay

bay trong không gian ba chiều.

– Một nhà dự báo thời tiết bay vòng quanh thế giới và kiểm tra trực tiếp điều kiện khí hậu đã được lập trình và xử lý trong máy tính.

– Một nguyên tử chuẩn bị kết hợp với các nguyên tử khác thành phân tử.

– Một kiến trúc sư nhìn ngắm thiết kế mới nhất của mình bằng việc thực sự đi vào những căn phòng đã được vi tính hóa.



Một người "du hành" vào không gian máy tính đang bước vào sân đấu quần vợt với máy tính. Trò chơi bắt đầu. Người chơi thực sự cảm thấy như họ đang chơi trên sân thật.
Ảnh của Autodesk, Inc. San Jose, California.

Hiện thực ảo, không gian máy tính, hiện thực nhân tạo là một vài từ ngữ được đưa ra để thể hiện hình thức ảnh ảo giác mới được tạo ra này. Trong giới hạn của một căn phòng nhỏ, người ta khoác lên mình những thiết bị máy tính⁽¹⁾, rồi bỗng nhiên thấy mình đang dạo bước trên đồng quê nước Anh hoặc kiểm tra tiến độ dự án ở một nơi cách xa hàng nghìn dặm, hay như học xem ong đi lấy phấn như thế nào bằng cách trở thành một chú ong thực thụ.

(1). Thiết bị máy tính có nhiều loại như thiết bị nhìn đặc biệt, găng tay dữ liệu, bộ đồ dữ liệu cơ thể.



Một phòng khách dựng trên máy vi tính đang chờ đợi vị khách đầu tiên đến với hiện thực ảo. Ảnh của Autodesk, Inc Sausalito, California

Các hiệu ứng của công nghệ tác động vào tâm trí chúng ta. Không gian máy tính vẫn đang trong giai đoạn phát triển mở đầu của mình với nhiều thứ cần nghiên cứu và cải tiến⁽¹⁾. Hi vọng rằng tính cách mạng và phổ biến của nó sẽ không chỉ mang ý nghĩa như một phương tiện điều khiển tâm trí mà còn hơn thế nữa. Các nhà khoa học máy tính, các nhà toán học đang bắt đầu những nền tảng mới cho đồ họa máy tính, đặc biệt là việc sử dụng hình học fractal để tạo ra những hiệu ứng đặc biệt. Có lẽ căn phòng holodeck⁽²⁾ trong bộ phim *Star Trek - The Next Generation* (Trạm vũ trụ - Thế hệ mới) sẽ trở thành hiện thực một thời gian không xa nữa.

(1). Một vài trường đại học và công ty tham gia vào việc nghiên cứu những thế giới ảo này là trường Đại học Bắc Carolina; Autodesk Inc. tại Sausalito, CA; KITL tại trường Đại học Washington; Hội nghiên cứu VPL của thành phố Redwood, CA; trường Đại học Carnegie Mellon. Viện Bảo tàng Lịch sử Tự nhiên bang Connecticut, Hoa Kỳ có phần mềm tạo bởi Myron Krueger mang tên Video Place. Tại trường Đại học Berkeley, California ASUC, ta có thể chơi trò Dactyl Nightmare, một trò chơi thế giới ảo.

(2). Holodeck là một căn phòng lớn với màn chiếu Holographic cho phép phi hành đoàn chạm vào và tương tác với vật trên đó như là họ đang trong một trò chơi game video lớn.

SIÊU VĂN BẢN

Những suy đoán về chiều không gian thứ tư xuất hiện vào thế kỷ XIX khi August Möbius nhận thấy rằng bóng của bàn tay bên phải có thể biến thành bóng bàn tay bên trái chỉ đơn giản bằng cách đi xuyên qua bàn tay bằng chiều không gian thứ ba. Người ta cũng không nhận ra rằng chính thuật ngữ *siêu lập phương*⁽¹⁾ đã dẫn đến sự ra đời những thuật ngữ khác như *siêu không gian*, *siêu nhân*, *siêu card*⁽²⁾, và giờ đây là *siêu văn bản*. Mặc dù siêu card và siêu văn bản không liên quan trực tiếp đến không gian 4 chiều, nhưng chúng liên quan đến máy tính và khả năng nhảy từ ý tưởng này sang ý tưởng khác – khả năng *tính toán tương tác*. Có thể hình dung về siêu văn bản như là việc di chuyển từ không gian này vào không gian khác. Những người tham gia quyết định là đi đâu và máy tính sẽ đưa họ đến đó. Với tính toán tương tác, sau khi bạn chọn lựa muốn đọc các bài viết hay là xem hình ảnh, máy tính lập tức đem tới cho bạn thông tin về chủ đề bạn cần, bao gồm các văn bản, bài viết, bài nói, tranh ảnh và thậm chí là cả video. Giả sử bạn muốn tìm hiểu vài nét về ngày V-E trong Chiến tranh thế giới thứ hai (ngày quân đội Đức Quốc Xã đầu hàng Đồng minh vô điều kiện), máy tính sẽ hiển thị cho bạn các thông tin lịch sử, bản đồ xâm lược, diễn biến thế chiến II, phim thời sự, thậm chí cả những bài hát phổ biến

(1). *Siêu lập phương* là thuật ngữ được ra cho hình lập phương bốn chiều.

(2). *Siêu card* có hai ý nghĩa. Nó có thể là tên thương mại của một chương trình máy tính cho phép bạn truy cập và tạo các khối thẻ chứa thông tin ở nhiều dạng (bao gồm đồ họa, video, âm thanh) chỉ đơn giản bằng cách chọn một chủ đề cụ thể nào đó. *Siêu card* cũng có thể là một tìm thẻ hai chiều hình chữ nhật đã được cắt và gập thành một hình ba chiều giống như cuốn sách trên màn hình máy tính trong hình minh họa (trang 232). Bạn hãy làm thử một siêu card với hộp card kích thước 3x5 nhé!

thời kì đó. Bạn chọn lựa chủ đề bằng cách nhấn chuột vào đó.⁽¹⁾

Siêu văn bản cuốn chúng ta vào quá trình tính toán tương tác bằng cách tạo cho chúng ta sự tham gia tích cực hơn vào nội dung văn bản khi đọc. Một siêu văn bản không được đọc từ đầu tới cuối theo như cách thông thường. Thay vào đó, máy tính có chức năng một công cụ thám hiểm những chiều hướng diễn biến truyện có thể xảy ra, từ đó đưa ra một câu chuyện mới. Với siêu văn bản, người đọc theo dõi nên câu chuyện của riêng mình bằng cách nhấp chuột vào những mục nổi⁽²⁾ liên kết với nhau trong truyện, gọi là *lưới truyện*. Lưới truyện được cài vào chương trình ngay từ lúc ban đầu. Trong quá trình đọc truyện trên máy tính, bạn không tạo ra được các tình tiết cho câu chuyện, nhưng bạn có thể lựa chọn cốt truyện theo ý mình và tìm hiểu nội



(1) Đó có vẻ như là một phương thức học tập dễ dàng. Thế nhưng hạn chế của nó là gì? Bạn phải phụ thuộc vào những tài liệu có trong phần mềm đó. Bạn không thể tiếp cận được những nguồn thông tin khác ngoài chúng ra. Nếu bạn dùng chương trình chỉ để tìm hiểu những kiến thức chung, bạn phải cẩn thận khi dựa vào nó như là tài liệu nghiên cứu duy nhất của mình. Hi vọng rằng hình thức thông tin sẵn có này không cản trở tính sáng tạo, mong muốn tìm tòi thêm của bạn, mà sẽ khuyến khích chúng.

(2) Những mục được làm nổi bật lên bằng màu khác với màu văn bản hiện thời.

dung theo hướng đó sẽ là gì. Chỉ một cú nhấp chuột vào từ khóa hay hình ảnh trên màn hình máy tính thôi là máy tính sẽ đưa bạn tới vị trí mới, ý tưởng mới hay thậm chí là cả cốt truyện mới. Bạn có thể biết trước tác giả sẽ xây dựng câu chuyện theo hướng nào trong suốt quá trình đọc mà bạn đã chọn.

Các phản ứng về loại hình *văn học tương tác* này rất khác nhau. Một số người cảm thấy chính sự tò mò, hồi hộp vì không đoán trước được nội dung khi đọc truyện theo cách thông thường thú vị hơn nhiều so với việc đọc có lựa chọn. Bạn mới chỉ ở đầu câu chuyện, thế nhưng một khi truyện được “lựa chọn”, mọi cảm giác hồi hộp sẽ không thể khôi phục lại như ban đầu nữa. Ngoài ra, với những người mới tiếp xúc với hình thức đọc này, họ sẽ không thể hiểu được khi nào thì truyện kết thúc, bởi những từ khóa hay câu văn xuyên suốt lưới truyện cho phép độc giả không ngừng chuyển sang đọc các nội dung mới, thậm chí có thể vô tình mà đi lòng vòng trở lại nội dung cũ. Những câu chuyện kiểu “mạng lưới” này đòi hỏi những độc giả thiếu kinh nghiệm về đọc siêu văn bản phải có thời gian và cả sự thực hành nữa thì mới có thể định hướng được mình khi đọc theo hình thức mới mẻ này. Kỹ thuật viết lách và kỹ thuật lập trình tiên tiến cho loại hình truyền thông mới mẻ này cũng cần được phát triển hơn nữa để nó có được kết quả tối ưu và để độc giả không bị lúng túng khi tự mình khám phá những tiềm năng của nó. Nói về siêu văn bản, vị giáo sư người Anh George P. Landow tại Đại học Brown phát biểu: “Thực sự rất có khả năng là sẽ xuất hiện một làn sóng mới về kể chuyện... Câu hỏi tiếp theo là: Liệu đây có hoàn toàn là sự hỗn loạn và lộn xộn hay không?”⁽¹⁾. Có rất nhiều người cảm thấy rằng siêu văn bản đang đưa ra một hình thức viết văn mới và họ coi nó như

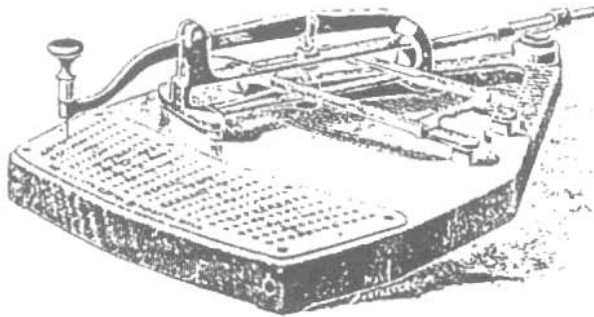
(1) *A New Way To Tell Stories* (Một hình thức kể chuyện mới), New Francisco (hồ nước, San Francisco, CA, tháng 4 năm 1993).

là một nghệ thuật. Như vậy, phần trọng điểm còn lại khi đọc truyện thuộc về độc giả, những người quyết định diễn biến của câu chuyện. Nhưng chúng ta hãy cùng xem cách viết truyện kiểu “mạng lưới” đòi hỏi gì ở người viết. Họ không dựng nên một cốt truyện đơn lẻ mà là một loạt những cốt truyện khác nhau với các kết thúc tương ứng – lưới truyện. Cũng như với tính toán tương tác, có thể nâng cao chất lượng của lưới truyện bằng việc bổ sung thêm hình ảnh, âm thanh và video. Hiện nay, hãy còn quá sớm để đánh giá về *văn học tương tác*, đặc biệt khi những truyện siêu văn bản mới chỉ được cho ra mắt hay quảng cáo trên những bảng thông báo điện tử, nhưng sẽ rất thú vị nếu theo dõi kết cục của nó. Liệu siêu văn bản có được ưa chuộng như là một mốt mới hay không? Chỉ có một điều chắc chắn được, đó là siêu văn bản sẽ không thể tồn tại nếu thiếu các máy tính hiện đại.

LITTLE FERMAT

Nhiều người trong chúng ta nghĩ rằng máy tính đã phát triển đến mức độ cuối cùng của nó rồi, nhưng các nhà khoa học máy tính, các nhà toán học và khoa học đều cho rằng không phải như thế. Theo ý tưởng của Charles Babbage và M.M.(Monty) Denneau, các nhà khoa học George V., David V. Chundnovsky và Saed G. Youths đã tạo ra Little Fermat, một

*Bàn đập phím
cho máy phân tích
tính toán Herman
Hollerith, chiếc máy
đã cách mạng hóa
thủ tục trong việc
thống kê dân số
tại Hoa Kỳ.*



máy tính được thiết kế để làm những bài toán tính toán khổng lồ mà không mắc các lỗi như máy tính thông thường. Sử dụng các ý tưởng từ lý thuyết số, đặc biệt là số học modula và các số Fermat, máy tính này có thể đảm nhận tính toán gần như không có lỗi. Little Fermat được lập trình bằng ngôn ngữ Younis. Bằng cách dùng các số Fermat như là số chia trong số học modula, nó có thể tăng tốc độ tính cho nhiều loại tính toán khác nhau và tránh được việc dùng số thực. Cho đến nay Little Fermat là máy tính duy nhất thuộc dòng này, nhưng những người phát minh ra nó cảm thấy rằng nó sẽ phù hợp lý tưởng cho những tín hiệu số, cho công việc xử lý hình ảnh và giải quyết nhiều vấn đề khác nhau trong thủy động lực học, hóa học, khí động lực học các lĩnh vực đòi hỏi phải giải các phương trình vi phân. Hơn nữa, họ hi vọng rằng nó sẽ là hình mẫu giúp nâng cao hiệu quả của các siêu máy tính.

MÁY TÍNH VÀ CUỘC SỐNG NHÂN TẠO

Với những công nghệ thay đổi với tốc độ chóng mặt cùng các ý tưởng và

ứng dụng mới xuất hiện từng ngày, máy tính dường như đang tác động đến mọi mặt đời sống của chúng ta, cho dù chúng ta có biết về nó hay không. Hiện nay, rất nhiều phòng thí nghiệm khoa học là một cỗ máy tính hoạt động bằng khả năng mô hình hóa và mô phỏng của nó.

Cuộc sống nhân tạo, như vẫn thường được nhắc đến, là một cách mô phỏng các dạng sống cùng với các hoạt động, sự sinh sản và phát triển của chúng. Một ví dụ gần đây nhất về ứng dụng của cuộc sống nhân tạo là những con dơi giống như thật tạo ra bởi máy tính trong bộ phim *Batman Returns* (*Người dơi trở về*). Chúng đã được tạo ra như thế nào? Sử dụng logic, toán học và máy tính, các thói quen của một dạng sống, ví dụ như con dơi, sẽ được phân tích thành các bước logic cơ bản. Các bước này được phát triển và hoàn thiện nhờ mô phỏng trên máy tính, giúp ta thu được những chuyển động và thói quen của dạng sống đó. Các ứng dụng của cuộc sống nhân tạo thậm chí còn xa hơn thế nữa. Chẳng hạn như những nghiên cứu về bệnh dịch được thực hiện tại Viện Nghiên cứu Scripp. Tại đây, Gerald Joyce dùng mô phỏng máy tính để phát triển một qui trình trong phòng thí nghiệm. Mà trong đó các enzym tấn công vào mã gen của một vi-rút AIDS. Bằng phương pháp thử loại, các enzym sẽ tìm ra cách để chữa bệnh. Các máy tính còn có thể tự lập các chương trình của



riêng chúng dựa trên mức độ chúng giải quyết vấn đề tốt hay không tốt. Các chương trình lập nên theo cách thức này bao gồm điều khiển xe hơi, dự báo tình hình kinh tế, dự báo chuyển động của các hành tinh. Người đi tiên phong trong lĩnh vực máy tính là John von Neuman cho rằng máy móc sẽ không chỉ xử lý thông tin, mà còn sản xuất ra chính chúng. Một số ủng hộ viên của *cuộc sống nhân tạo* tin rằng bản chất của cuộc sống là một tập các quy tắc điều khiển tương tác giữa các tế bào, nguyên tử, phân tử... Một mối liên hệ gần gũi giữa cuộc sống nhân tạo và toán học fractal cũng đang dần phát triển. Người ta đã phát triển các mô phỏng máy tính về tế bào thực vật mà quá trình lớn lên và phân chia của nó tuân theo một loạt các chỉ thị. Mỗi tế bào phát triển thành một dạng gần giống như những tế bào của cây dương xỉ. Sau khi tìm hiểu cách thức xác định phương hướng của các loài côn trùng, ví dụ như kiến, người ta đã tạo ra mô phỏng cho các robot thu nhỏ. Chúng được hướng dẫn di chuyển và đổi hướng khi gặp phải chướng ngại vật mà chúng không thể vượt qua. Những robot như thế sẽ hoạt động tốt hơn các thiết kế lớn truyền thống vì chúng đi tìm đường vòng xung quanh để tránh chướng ngại vật. Trên thực tế, robot *Attila* nặng 3,6 pound do Phòng thí nghiệm Mobot của MIT thiết kế được kì vọng là sẽ có thể dùng được để thám hiểm Sao Hỏa.



Robot được sử dụng tại bệnh viện Đại học Stanford (Stanford, California) để vận chuyển các đơn thuốc. Ảnh được chụp nhờ sự giúp đỡ của Trung tâm Y học trường Đại học Stanford, Visual Arts Services.

MÁY TÍNH QUANG HỌC

Các máy tính ngày nay của chúng ta hoạt động nhờ dòng điện.

Tuy nhiên, một số nhà khoa học đang phát triển của một dạng máy tính mới dùng các sợi quang học, tia laser và những bộ chuyển mạch để xử lý các cơ sở dữ liệu bằng ánh sáng⁽¹⁾ chứ không phải điện năng. Không giống như máy tính điện tử, lưu trữ dữ liệu và các chương trình trên các chip nhớ, ổ cứng hay đĩa, máy tính quang học luân chuyển thông tin như các xung động ánh sáng thông qua các sợi quang học. Harry F. Jordan tại Trung tâm Hệ thống Máy tính Quang điện, trường Đại học Colorado ở Boulder, Colorado, nói: "Lần đầu tiên chúng ta có một máy tính mà chương trình và dữ liệu luôn luôn chuyển



động dưới dạng ánh sáng, vì thế không cần phải có lưu trữ tính nữa". Hơn ba dặm sợi quang học thực hiện chức năng là bộ nhớ chính của máy tính, nơi mà các chỉ dẫn và dữ liệu được mã hóa dưới dạng xung động ánh sáng và luân chuyển trong đó. Jordan và Vincent P. Heuring là những người dẫn đầu dự án phát triển máy tính quang học tại Đại học Colorado. Chiếc máy tính mà họ phát triển được cho đến nay thực sự đã chứng tỏ quy luật mọi thành phần của máy móc đa năng đều có thể tạo ra bằng ánh sáng.⁽²⁾

(1). Trường hợp duy nhất ánh sáng không sử dụng được xảy ra khi các chuyển mạch quang được kích hoạt, xung động ánh sáng lúc đó tạm thời chuyển thành dòng điện.

(2). Harry Jordan, trích từ Science News, 23/01/1993

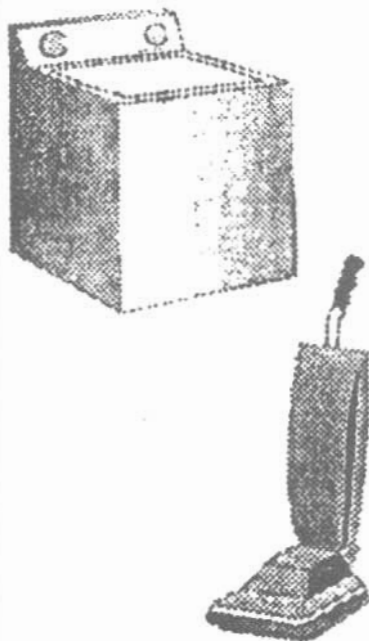
Giả sử tôi lấy một khúc gỗ và bỏ nó vào trong bếp lò đang cháy. Nó bắt đầu cháy ngay lập tức. Vậy chính xác tại thời điểm nào nó không còn được xem là một khúc gỗ nữa? Có người nghĩ rằng nó không được xem là một khúc gỗ bắt đầu từ ngay sau khi khúc gỗ bén lửa, người khác lại cho rằng đó là khi nó cháy được một nửa, hay một số ý kiến lại nói nó vẫn là một khúc gỗ nếu chưa cháy hết thành than. Dù ai cũng nghĩ phải có câu trả lời đúng, nhưng thực tế sẽ không có câu trả lời nào là đúng cả. Không có câu trả lời đúng hay sai và cũng không có cách nào để đánh giá tính đúng sai cho câu trả lời. Đó hoàn toàn là vấn đề về mức độ. Thời điểm 5:00 chiều là như nhau với tất cả mọi người. Nhưng tập hợp thời điểm “chiều muộn” có thể là 3:30 pm với người này và lại là 5:30 pm với người khác. Trên thực tế, có cả một loạt các thời

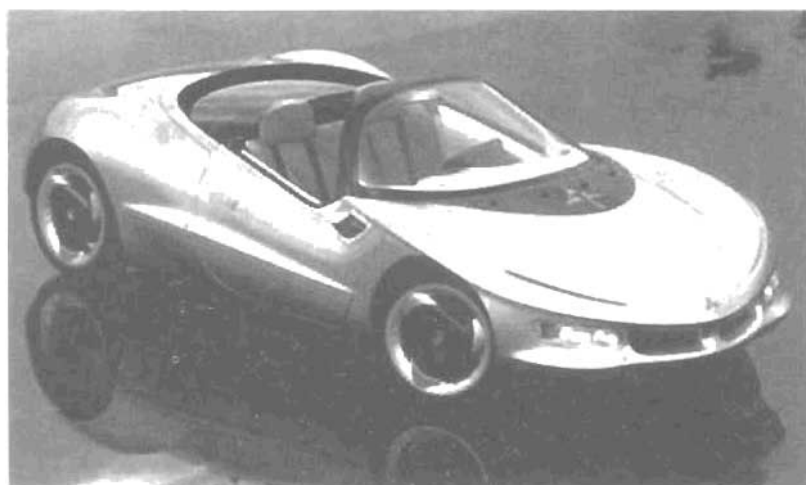
điểm “chiều muộn” phụ thuộc vào mỗi người trả lời câu hỏi. Cũng tương tự như vậy với rất nhiều trường hợp trong cuộc sống, chúng xảy ra như thế nào là do quan niệm chủ quan

LOGIC MỜ VÀ MÁY TÍNH

Logic mờ có thể ở trong:

- Máy giặt của bạn, khi nó xác định quá trình giặt tốt nhất từ những dữ liệu bạn nhập vào như mức độ nước, khối lượng, loại vải, mức độ bẩn và các loại vết bẩn. Sau khi giặt, máy sẽ giặt lại nếu nước không đủ trong.
- Máy rửa bát của bạn, khi nó tự động điều chỉnh quá trình rửa bát dựa vào thông tin thu thập được thông qua cảm biến hồng ngoại.



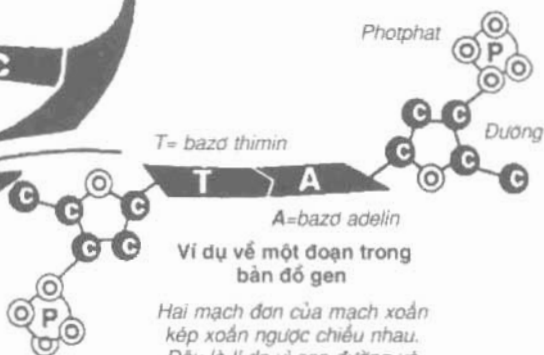
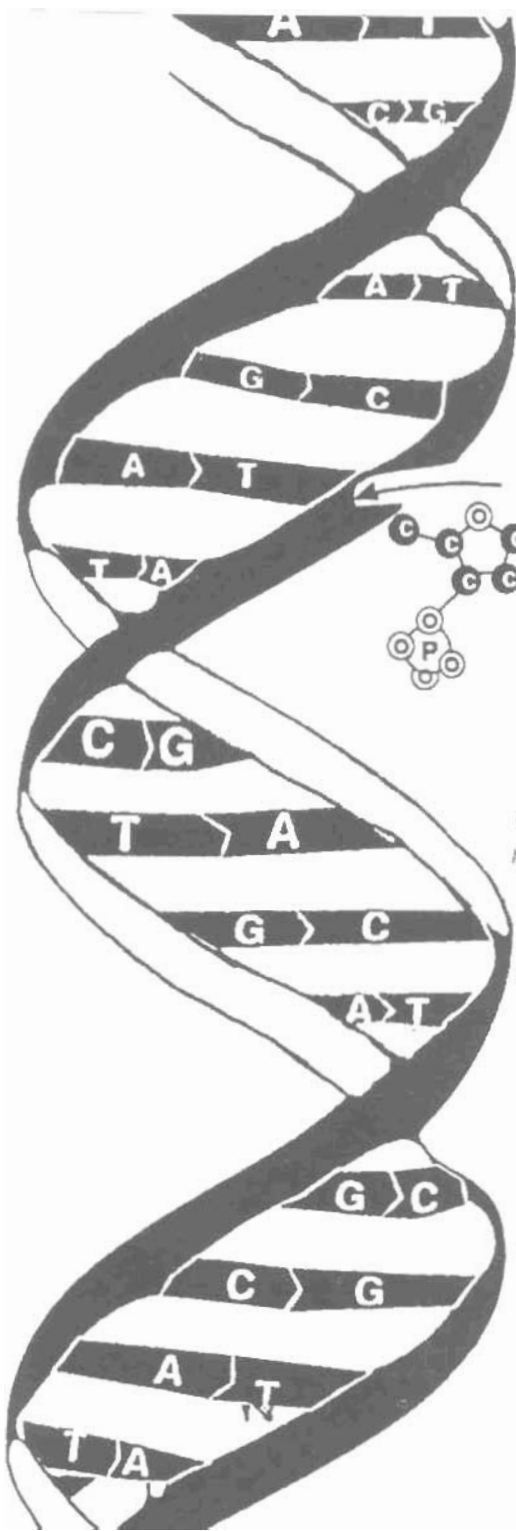


Mẫu xe Mitsubishi HSR-IV được thiết kế để tránh tai nạn nhờ hệ thống logic mờ.

thống và lập trình máy tính hoạt động dựa vào các phát biểu về đúng hay sai (dòng điện là mở hay tắt - "1" hay "0" của hệ nhị phân), do đó để nhân tính hóa máy tính thì phải có sự tham gia của logic mờ. Logic mờ cố gắng bắt chước cách suy nghĩ và làm việc của trí não con người. Nói cách khác, nó cố gắng biến trí tuệ nhân tạo thành trí tuệ thật. Các công ty Nhật Bản và Hàn Quốc đang dẫn đầu trong công cuộc cách tân sử dụng logic mờ. Họ sản xuất máy tính, máy điều hòa, máy ảnh, máy rửa bát, các phụ tùng ô tô, ti-vi và máy giặt cải tiến với công nghệ logic mờ. Tại triển lãm mô tô Tokyo tháng 10 năm 1993, đã xuất hiện bộ xử lý ứng dụng logic mờ trong mẫu xe HSR-IV của Mitshubishi. Nó bắt chước quá trình xử lý thông tin của não người trong việc điều khiển xe bằng cách tìm hiểu các thói quen lái xe bình thường của người lái, sau đó nó sẽ lựa chọn phương án giải quyết cho các tình huống có thể xảy ra. Ví dụ: nếu hệ thống radar trong xe kiểm tra thấy chướng ngại vật, hệ thống logic mờ sẽ quyết định xem người lái có biết điều đó hay không (dựa vào những thói quen lái xe trước đây). Nếu

người lái không phản ứng giống như đã lập trình, nó có thể tự động điều khiển bộ ngắt để tránh xảy ra va chạm.

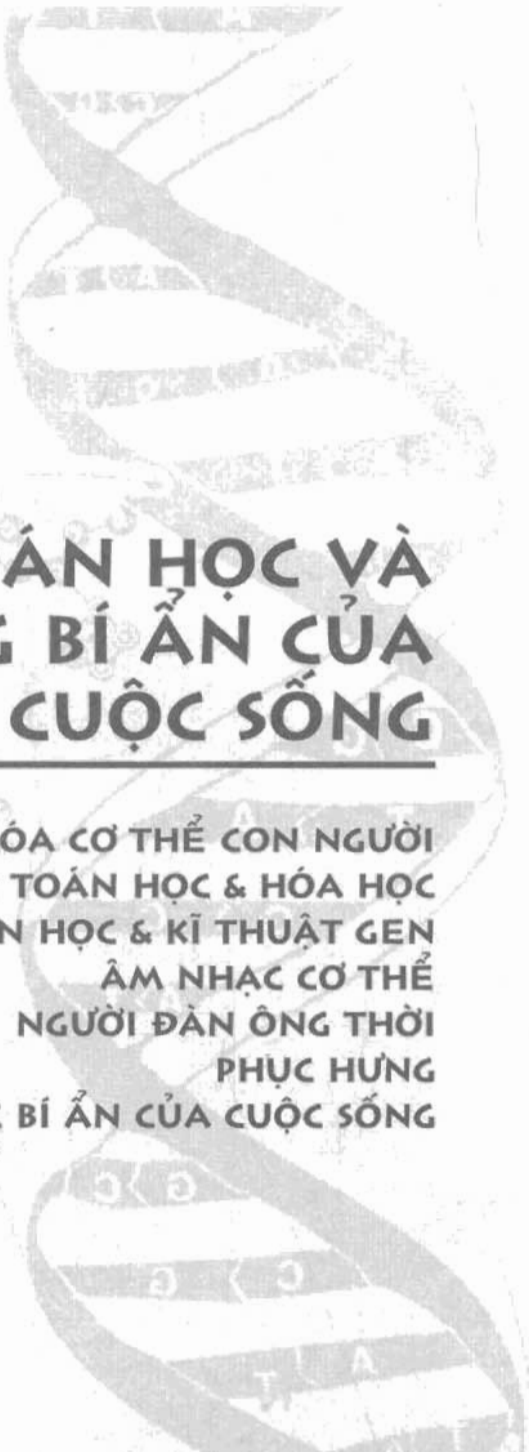
Cho đến nay nhiều nhà khoa học phương Tây chỉ trầm lặng sử dụng logic mờ vì lo sợ nó sẽ đe dọa sự toàn vẹn của các ý tưởng khoa học. Các nhà khoa học khác lại cho rằng nó đã tăng cường và mở rộng khả năng lập trình của máy tính vì nó cho phép tính toán trên phạm vi rộng hơn các cách giải quyết của một vấn đề cụ thể hay các thiết kế khác nhau của một sản phẩm cụ thể. Trước đây, Hội Khoa học Quốc gia Mỹ đã từ chối đăng những bài báo viết về logic mờ. Nhưng có lẽ các dự án trong tương lai sẽ được quan tâm với một cái nhìn khác, đặc biệt là từ khi ngày càng nhiều công ty Mỹ như Ford, Otis Elevator, Pacific Gas & Electric, Motorola, và General Electric thể hiện sự quan tâm của mình đến những công dụng của logic mờ.



Hai mạch đơn của mạch xoắn kép xoắn ngược chiều nhau. Đây là lí do vì sao đường và photphat nằm ở các vị trí đối diện nhau ở hai mạch đơn



Phân tử ADN với các gen của nó cho chúng ta bản thiết kế về sự sống của một tế bào.



TOÁN HỌC VÀ NHỮNG BÍ ẨN CỦA CUỘC SỐNG

**TOÁN HỌC HÓA CƠ THỂ CON NGƯỜI
CÁC MÔ HÌNH TOÁN HỌC & HÓA HỌC
TOÁN HỌC & KỸ THUẬT GEN
ÂM NHẠC CƠ THỂ
BÍ MẬT CỦA NGƯỜI ĐÀN ÔNG THỜI
PHỤC HƯNG
NÚT TRONG CÁC BÍ ẨN CỦA CUỘC SỐNG**

Hãy tìm hiểu về...
độc lập và tự do...
chỉ là một phần nhỏ của thế giới

*Chỉ có thể tưởng tượng về cuộc sống hay cái đẹp
"hoàn toàn mang tính toán học" nếu bản thân chúng
ta là những nhà toán học tài ba đến nỗi có thể công
thức hóa những đặc điểm phức tạp mà chúng ta chưa
bao giờ phát hiện ra của chúng.*

—Theodore Andrea Cook (1867 - 1928)

Thế giới toán học luôn luôn dùng các khái niệm toán để làm sáng tỏ những bí ẩn của cuộc sống. Trong chương này chúng tôi xin giới thiệu với các bạn một số lĩnh vực mà trong đó toán học được sử dụng để tìm kiếm câu trả lời cho những câu hỏi kiểu như: Cơ thể chúng ta làm việc như thế nào và cuộc sống bắt đầu ra sao? Đường như việc một lĩnh vực về các đối tượng vô tri vô giác, những đối tượng do chúng ta tưởng tượng ra, lại có thể nắm giữ câu trả lời cho những câu hỏi này cũng chính là một bí ẩn của cuộc sống.



Trích từ tác phẩm Sự ra đời của Adam của họa sĩ Michelangelo. Nhà thờ Sistina, Vatican, Rome, Ý.

TOÁN HỌC HÓA CƠ THỂ CON NGƯỜI

Huyết áp: 120/80

Cholesterol: 180

LDL/HDL: 179/47

Triglycerites: 189

Glucose: 80

Nhiệt độ cơ thể: 98,7° F, (37,7° C)

Trong sự phát triển của y học ngày nay, chúng ta luôn bị tấn công bởi những con số và tỉ lệ thể hiện thông tin phân tích sức khỏe, hoạt động của cơ thể con người. Các bác sĩ đã chỉ ra một loạt các chỉ số tiêu chuẩn. Số và toán học dường như ở khắp mọi nơi. Trên thực tế, trong cơ thể chúng ta, các mạng lưới của hệ thống tim mạch, các xung điện mà cơ thể sử dụng để kích thích chuyển động, cách thức các tế bào kết nối với nhau, cấu tạo xương, cấu trúc phân tử thực sự của gen - tất cả đều mang yếu tố toán học. Vì vậy, trong nỗ lực xác định số lượng các chức năng của cơ thể con người, khoa học và y học đã phải viện đến số và các khái niệm khác của toán học. Chẳng hạn, các dụng cụ biến xung điện của cơ thể thành những đường hình sin, từ đó có thể so sánh các thông tin đầu ra. Đọc điện tâm đồ, điện đồ cơ và siêu âm thực chất chính là xem xét hình dáng đường cong, biên độ và sự dịch chuyển pha. Tất cả chúng cung cấp thông tin cho các kĩ thuật viên. Số, tỉ lệ và đồ thị là những khía cạnh của toán học được ứng dụng vào cơ thể chúng ta. Chúng ta hãy cùng xét đến các khái niệm toán học khác và cách thức chúng liên hệ với cơ thể con người.

Nếu bạn nghĩ rằng việc giải mã, mã hóa cũng như các chữ tượng hình của người Maya là thú vị và đầy thách thức, thì hãy thử làm sáng tỏ bộ mã phân tử mà cơ thể chúng ta dùng cho việc thông tin liên lạc.

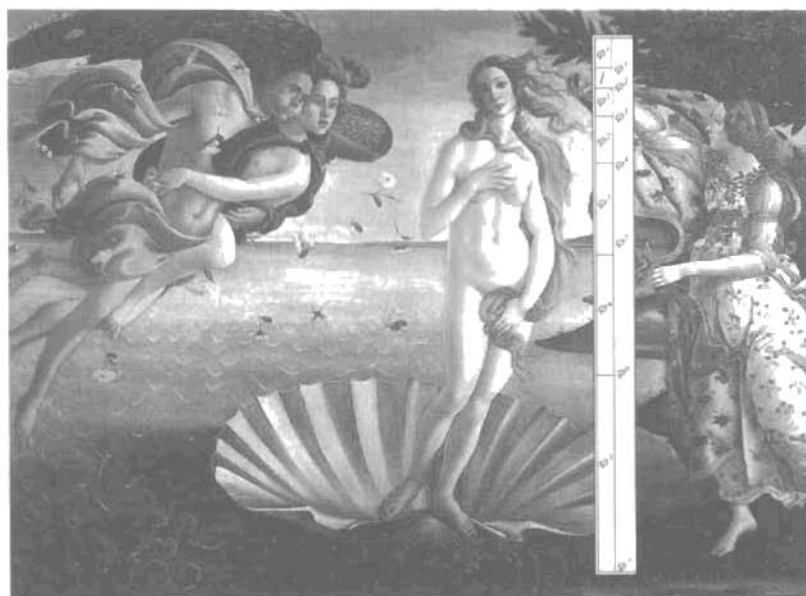
Khoa học ngày nay đã khám phá ra rằng các tế bào máu trắng có liên quan với não. Trí não và cơ thể liên hệ với nhau thông qua một bộ từ điển hóa sinh. Việc giải được những mã hóa giữa các tế bào sẽ có tác động bước ngoặt đến y học cũng giống như việc các kiến thức lớn dần của chúng ta về mã gen đang tiết lộ rất nhiều điều trong lĩnh vực sức khỏe con người. Phát hiện về mạch xoắn kép trong ADN là một hiện tượng toán học khác. Nhưng dải xoắn này không phải là hình xoắn duy nhất trong cơ thể con người. Hình xoắn đẳng giác hiện diện trong rất nhiều quá trình phát triển ở cơ thể người, có lẽ vì hình dạng của nó không thay đổi khi nó lớn lên. Hãy tìm ra đường xoắn đẳng giác trong mô hình phát triển của tóc bạn, của xương, của ốc tai trong, của dây rốn và có lẽ của cả dấu vân tay.

Vật lý và các khía cạnh vật lý của cơ thể lại dẫn ta đến các khái niệm toán học khác. Cơ thể là đối xứng, đặc điểm này giúp cho cơ thể cân bằng và có trọng tâm. Cùng với khả năng cân bằng, ba đường cong của xương sống đóng vai trò rất quan trọng trong việc tạo ra cho con người một cấu tạo phù hợp và sức khỏe để nâng cơ thể cũng như các vật khác. Các họa sĩ như Leonardo da Vinci và Albrecht Dürer đã cố gắng thể hiện sự hợp lý của cơ thể con người với nhiều tỉ lệ và kích thước khác nhau, chẳng hạn như tỉ lệ vàng.

Kỳ lạ như chính tên gọi của mình, lý thuyết hỗn loạn cũng giữ vai trò nhất định trong cơ thể con người. Chẳng hạn, nó được tìm thấy trong chứng loạn nhịp tim. Những nghiên cứu về nhịp đập của tim và nguyên nhân khiến cho tim đập thất thường chỉ ra rằng nó xuất hiện phù hợp với lý thuyết hỗn loạn. Ngoài ra, các chức năng của não, sóng não và cách điều trị các rối loạn về não cũng có mối liên hệ với lý thuyết hỗn loạn.

Khi khám phá cơ thể con người ở mức độ phân tử, chúng ta cũng tìm thấy dấu vết của toán học. Các dạng hình học

như đa diện và vòm trắc địa hiện diện trong hình dáng của nhiều loại virus xâm nhập cơ thể chúng ta. Trong vi-rút AIDS (HTLV-1), người ta đã tìm thấy cấu trúc đối xứng hai mươi mặt và vòm trắc địa.



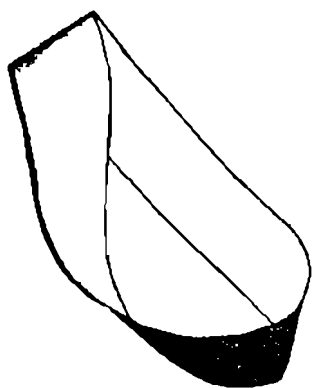
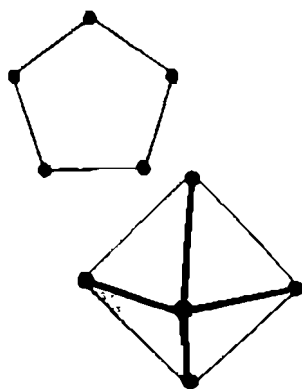
Thodore A. Cook đã cho đăng báo những phân tích trên về bức tranh Sự ra đời của Thần Vệ Nữ của Sandro Botticelli. Trong cuốn sách Những đường cong cuộc sống của mình, ông viết: “đường thẳng từ đỉnh đầu cô gái tới lòng bàn chân được chia tại các điểm theo đúng tỉ lệ cho biết ... tỉ lệ vàng (ϕ) ... chúng ta tìm được bảy điểm chia theo tỉ lệ ϕ trong tác phẩm.

Các nút thắt xuất hiện trong hình dạng của ADN đã đưa các nhà khoa học đến việc sử dụng các kết quả toán học trong lý thuyết nút để nghiên cứu chúng. Những kết quả trong lý thuyết nút và nhiều ý tưởng từ các loại hình học đã tỏ rõ giá trị to lớn của chúng trong công cuộc tìm hiểu kĩ thuật gen.

· Nghiên cứu khoa học và toán học là một sự kết hợp cần thiết để khám phá những bí ẩn của cơ thể con người và phân tích các chức năng của chúng.

CÁC MÔ HÌNH TOÁN HỌC VÀ HÓA HỌC

Các khái niệm toán học xuất hiện rất nhiều ở các chất hóa học trong tự nhiên. Tìm hiểu cấu trúc phân tử của các vật, người ta thấy ngũ giác trong hình dáng của deoxynbose, các tứ diện trong hình dáng phân tử silicat, mạch xoắn kép trong, hình đa diện trong tinh thể và nhiều loại phân tử khác. Vì thế, không có gì phải ngạc nhiên khi các nhà hóa học tạo nên chất mới dựa vào các mô hình toán học. Nguyên tử cacbon rất thích hợp làm các khối xây dựng như cách thức chúng liên kết thành chuỗi, lập thành vòng, hoặc hình thành các cấu trúc phân tử 3 chiều. Năm 1983, Leo Paquette, một nhà hóa học trường Đại học Ohio, Mỹ, đã tạo nên một phân tử giống như khối mười hai mặt bao gồm 20 nguyên tử cacbon xung quanh 20 nguyên tử hidro. Nó trông như quả bóng đá, có tên gọi là *dodecahedrane*. Nhưng không chỉ các mô hình Euclid là công cụ được dùng đến. Tháng 6 năm 1983, các nhà hóa học trường



Đại học Colorado tạo thành một hợp chất, đặt tên là *tris* (tetrahydroxy metiletilen). Nó có hình dáng giống như dải Möbius (August Möbius phát hiện ra dải một mặt, một cạnh vào năm 1848). *Tris* hình thành từ các chuỗi cacbon, ôxi và kết thúc bởi các nhóm rượu, đây chính là lý do khiến chúng đứt ra dễ dàng nếu các chuỗi bị xoắn đi nửa vòng.

TOÁN HỌC VÀ KỸ THUẬT GEN

những điều kì diệu và cả sự kinh hoàng mà kĩ thuật gen có thể đem lại. Những biến cố của cuộc sống ẩn chứa trong một tế bào sống. Không quan trọng tế bào đó là của người, cá, rêu, thực vật, côn trùng hay vi khuẩn, mọi tế bào sống đều là ngôi nhà của phân tử xoắn ADN. Nhưng hình xoắn toán học trong không gian ba chiều này đóng vai trò gì đối với một tế bào? Chức năng của nó là gì? Và các gen - vốn mang các đặc điểm của dạng sống - có liên hệ như thế nào với ADN? Ở đây có sự



Bộ phim *Jurassic Park* (Công viên kỉ Jura) đã khiến nhân loại nhận thức được

tham gia của các khái niệm toán học như mô hình, chuỗi, quan hệ, tương ứng 1-1, tất cả chúng đóng vai trò quan trọng trong việc giải mã và làm sáng tỏ những bí ẩn của tế bào sống. Trong tế bào thực vật hay động vật, chúng ta thấy có một nhân tế bào⁽¹⁾,

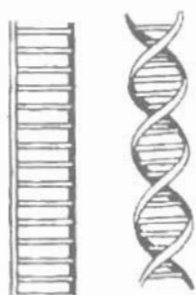
nơi cư trú của các nhiễm sắc thể. ADN chia thành các sợi, gọi là nhiễm sắc thể, còn gen nằm ở phân tử ADN. Các phân tử ARN và protein cũng nằm trong nhân cùng với các vi chất và nước. Mỗi loài khác nhau có số lượng các nhiễm sắc thể khác nhau. Ví dụ, con người có 46 nhiễm sắc thể, nhưng có loài hoa chỉ có 4, trong khi ốc mượn hồn thì có tới 254 nhiễm sắc thể⁽²⁾. Thật kì lạ khi biết rằng mọi tế bào sống đều tạo bởi 6 nguyên

(1) Các tế bào *protocytes*, ví dụ như tế bào cơ thể của vi khuẩn, không có nhân, trong khi tế bào *eucaryotes* ở thực vật và động vật có một nhân.

(2) Số lượng khác nhau là vì ảnh hưởng của nhiều yếu tố, trong đó có yếu tố môi trường, nơi mà các loài sinh sống trong suốt cuộc đời.

tốt: cacbon, hidro, ôxi, photpho, nitơ và sunfua. Trong tế bào, các nguyên tử này kết hợp thành phân tử nước, photphat và đường. Ngoài ra, chúng hình thành các đại phân tử (các phân tử lớn tạo bởi hàng nghìn nguyên tử nối với nhau) như lipid, tinh bột, xenlulozơ và thậm chí là các axit nucleic và protein phức tạp hơn. Phân tử ADN cùng với gen của nó cung cấp bản đồ cuộc sống của một tế bào. Mặc dù các nguyên tố cần thiết cấu tạo nên mỗi tế bào là như nhau, nhưng các sinh vật khác nhau có bản đồ gen rất khác nhau. Gen có cùng "các kí hiệu" (các nguyên tố hình thành nên mã tế bào), nhưng những cấu trúc khác nhau của vật sống được hình thành là nhờ sự kết hợp khác nhau của các chuỗi "kí hiệu" này. Trong mỗi tế bào, các mã gen được biên dịch bởi cùng loại cơ chế mà cơ thể dùng để nhân đôi tế bào, tạo ra protein cũng như các cấu trúc tế bào khác.

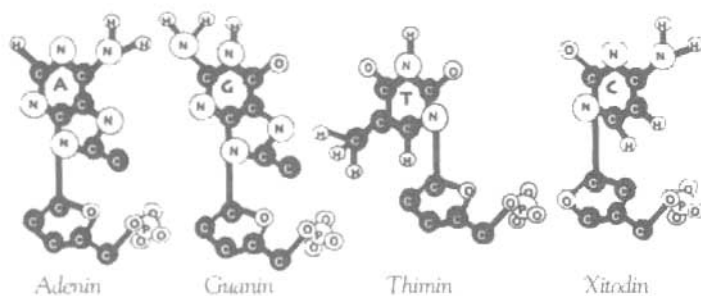
Để hiểu sự hình thành mã gen, cần phải hiểu rõ về các axit nucleic. Axit nucleic tạo bởi các nucleic có cấu thành là đường, photphat và một bazơ (có năm loại bazơ kí hiệu bởi các chữ cái A, C, G, T, U)⁽¹⁾. Trong ADN chỉ có bốn bazơ A, C, G và T. Mỗi bazơ chỉ có thể cặp với một bazơ bổ sung khác, A với T và



ADN được tạo bởi hai
dây xoắn nối với nhau
tại các bazơ để hình
thành dây xoắn kép.

C với G. Trong ADN, hai dây axit nucleic kết hợp với nhau tại các bazơ để hình thành nên mạch xoắn kép nổi tiếng. Chính hình ngũ giác của deoxyriboza đã làm nên dạng xoắn ốc, cần 10 vòng để hoàn thành một vòng xoắn. Không như ADN, các ARN chỉ có các bazơ A, C, G, U và thường là mạch đơn hơn là mạch kép. Nó ngắn hơn ADN rất nhiều. Bản đồ cho chúng ta thấy cách thức các dây bazơ hình thành nên một mã cụ thể như thế nào. Khi quá trình sao chép

(1) A là adenin, C là xitôdin, G là guanin, T là thimin, U là uraxin.



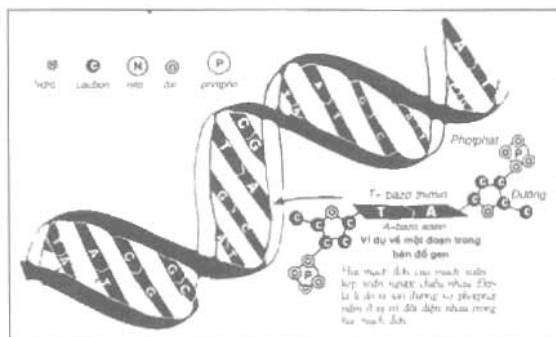
Có một số lượng rất lớn các nucleotit trong một tế bào sống. Chúng bao gồm bốn loại, được tạo thành từ một bazơ và một phần mạch xoắn. Chú ý rằng các phân tử photphat đường đều giống nhau nên chúng đều nối được vào mạch xoắn.

gen (hay nhân đôi ADN) diễn ra, mạch xoắn kép ADN tháo xoắn, duỗi thẳng ra với tốc độ vô cùng nhanh, khoảng 8000 vòng/phút, hai mạch đơn tách rời nhau dọc theo các liên kết cặp của bazơ thành hai mạch riêng rẽ. Khi quá trình này xảy ra, các nucleotit tự do trong tế bào có chứa các bazơ thích hợp sẽ liên kết bazơ của chúng với các bazơ của ADN dọc theo mỗi mạch đơn. Bằng cách này hai mạch xoắn kép ADN giống nhau sẽ được hình thành bằng cách chia đôi ADN cũ và bổ sung thêm các nucleotit tự do cho mỗi nửa. Ngoài việc nhân đôi ADN, gen cũng là khuôn mẫu để tổng hợp các protein⁽¹⁾ và tế bào chức năng khác. Chúng được kích thích phản ứng bằng các tác nhân khác nhau (ví dụ như cho một hormone nào đó vào). Thế còn cách thức tổ chức hoạt động của gen thì sao? Hàng nghìn gen xếp thẳng hàng dọc theo phân tử ADN tương tự như

(1) Giống như axit nucleic, protein cũng là một chuỗi các đơn vị nhỏ hơn gọi là axit amin (cho đến nay đã xác định được 20 loại axit amin). Mỗi protein được quyết định bởi một chuỗi đặc biệt và số lượng các axit amin. Protein enzyme chịu trách nhiệm hướng dẫn các phản ứng hóa học của tế bào sống. Như vậy ARN đóng để làm gì? Khi đang tách rời trong quá trình sao chép, một ARN thông tin được hình thành dọc theo mạch đơn sao cho phù hợp với các bazơ bổ sung trên đó. (Quá trình này được gọi là quá trình sao mã). ARN thông tin mang mã gen này tới các phân tử ARN vận chuyển để dịch mã gen. Ở đây một dãy axit amin liên kết lại với nhau trong chuỗi dịch mã gen nhất các ARN ribosom - các protein được hình thành. Nhiều bước diễn biến của quá trình này đã được liệt kê ở cuối chương này, nhưng sự kì diệu nó thì ngòi sâu tưởng tượng.

các công tắc “mở” và “tắt” trong các chỉ lệnh nhị phân ở máy tính – quá trình này mang tên *thuật giải di truyền*. Một gen sẽ bị kích thích thông qua một phản ứng hóa học để phát động các công tắc gen khác của phân tử. Tín hiệu của nó chạy dọc theo ADN, chuyển gen sang trạng thái “mở” hoặc “đóng”. Những gen ở trạng thái tắt sẽ dừng việc truyền tín hiệu, còn những gen ở trạng thái mở thì tiếp tục truyền những chỉ thị của riêng nó. Bạn hãy hình dung tất cả các quá trình phân nhánh và phức tạp này diễn ra đồng thời cùng một lúc với nhau. Kỹ thuật gen là phương pháp điều khiển cấu trúc của phân tử ADN. Các kỹ thuật viên đã khám phá ra cách sao chép, biến đổi, cấy ghép và gắn các đoạn mã vào phân tử ADN, hay nói cách khác thay đổi bản đồ gen của tế bào. Họ có thể tạo ra ADN tái tổ hợp – loại ADN có chứa một tổ hợp bazơ lấy từ các cơ thể hoàn toàn khác nhau, ví dụ từ một tế bào của con người và một tế bào vi khuẩn.

Không chỉ dùng trong việc tìm hiểu các chuỗi, các đoạn mã và mạch xoắn kép, các hình và cấu trúc toán học còn vô cùng quan trọng trong việc phân loại các tổ hợp vô hạn của nguyên tử và phân tử hình thành trong tế bào sống. Chính bởi các cấu trúc ba chiều này, ví dụ như các protein tuy không bền vững nhưng thường xuất hiện ở dạng nút, nên các yếu tố toán học của lý thuyết nút và mô hình máy tính đang đóng vai trò ngày càng tăng trong kỹ thuật gen. Lý thuyết hỗn loạn cũng là một



lĩnh vực quan trọng, bởi những thay đổi nhỏ nhất trong kích thích gen có thể dẫn đến các kết quả khác nhau vô cùng, chẳng hạn như hiện tượng đột biến. Vậy còn các fractal thì sao? Liệu cuộc đời của một tế bào có thể coi như là một dạng fractal siêu phức tạp, có thành phần cấu tạo là sáu nguyên tố cơ bản của sự sống và nguyên tắc giải thuật di truyền hay không?

Cùng với kĩ thuật gen đang dần được khám phá và phát triển như vũ bão, các công ty công nghệ sinh học đang đua nhau sử dụng ngành khoa học mới này để tìm ra các phương pháp chữa bệnh mới và sản xuất những phương thuốc diệu kì. Các nhà sản xuất thực phẩm cũng đang tìm kiếm, sử dụng kĩ thuật gen để biến đổi gen trong các sản phẩm⁽¹⁾ nhằm tăng thời gian sử dụng, tăng kích thước, hương vị và khả năng kháng bệnh của chúng. Việc biến đổi mã gen giờ đây đã có thể thực hiện trong thời gian ngắn hơn rất nhiều so với thời gian để quá trình chọn lọc tự nhiên diễn ra. Câu hỏi đặt ra là: Liệu những biến đổi này có đáng làm và hiệu quả hay là có tác hại



Cà chua được trồng bằng công nghệ gen có thể chín trên cây nhỏ, không bị thâm tím và chịu được nắng giá.

gì hay không? Liệu những người tiêu dùng thiếu thông tin có nguy cơ bị dụ ứng do việc cấy ghép gen gây ra hay không? Trách nhiệm mà các kĩ thuật viên biến đổi gen phải gánh đáng là vô cùng to lớn. Họ đang thí nghiệm với chính cuộc sống khi mà nó đã mất hàng triệu năm để tiến hóa và phát triển!

(1) Kết hợp gen cà chua với gen cà bòn để giảm tác hại do lạnh giá, vì thế có thể làm chín cà chua trên cây và giúp chúng không bị dập dễ dàng khi vận chuyển; gen cà chua với con tằm để tăng khả năng kháng bệnh; gen của ngô với gen dóm dóm để giảm tác hại của côn trùng. Các hiệp hội bảo vệ người tiêu dùng, như Pure Foods Campaign đóng tại Washington DC, đã tổ chức kiểm tra, giám sát các thực phẩm biến đổi gen.

ÂM NHẠC CƠ THỂ

Chắc hẳn bạn đã từng nghe nói đến ngôn ngữ cơ thể, đó là thứ ngôn ngữ diễn đạt các thông điệp của chúng ta thông qua cử chỉ, điệu bộ của cơ thể mình. Nhưng còn *âm nhạc cơ thể* là gì? Một số nhà khoa học⁽¹⁾ đang tìm hiểu những đoạn mã được tìm thấy trong ADN với một cái nhìn hoàn toàn khác – âm nhạc của gen. Hai mạch xoắn đơn liên kết với nhau tại các bazơ tương ứng⁽²⁾ để hình thành dạng chuỗi xoắn kép của ADN. Các bazơ chứa mã gen, còn dọc theo ADN là bản đồ của tế bào sống. Những đoạn mã của các bazơ này đang được con người nghiên cứu tích cực với hi vọng sẽ giải mã được chúng. Người ta đã quan sát được những chuỗi lặp đi lặp lại của bazơ trong suốt cấu tạo gen. Mối liên hệ của gen với âm nhạc sẽ trở nên rõ ràng hơn nếu chúng ta coi các chuỗi lặp này như là điệp khúc của một bài hát. Trên thực tế, rất nhiều trong số chúng đã được đưa vào âm nhạc cả ở quãng tám và những quãng khác.



Như đã được đề cập ở phần trước, âm nhạc và toán học có liên hệ với nhau nhiều thế kỷ nay. Các môn đệ của Pythagoras liên hệ các số với thang âm. Thậm chí Johannes Kepler (1571 – 1630) còn liên hệ vận tốc của các hành tinh trên quỹ đạo elip của chúng với sự hòa âm, mặc dù mối liên hệ này ngày nay không có ý nghĩa khoa học. Chính vì vậy, với các nhà khoa học và toán học, sẽ là không lạ gì nếu họ đi tìm kiếm âm nhạc của cơ thể.

(1). Tiến sĩ Susano Ohno tại Phòng Sinh học lý thuyết, Viện Nghiên cứu Beckman, Trung tâm Y học Quốc gia Cuy of Hope, Duarte, California.

(2). Chỉ có những bazơ tương ứng mới cặp được với nhau, đó là A với T và G với C. Cách thức chúng xuất hiện trong chuỗi hình thành một đoạn mã gen của ADN.

BÍ ẨN CỦA NGƯỜI ĐÀN ÔNG THỜI PHỤC HƯNG

Bức họa *Người đàn ông Vitruvius* nổi tiếng này là một hình minh họa của Leonardo da Vinci trong cuốn sách *De*

Divina Proportione (Viết về tỉ lệ thần thánh) của nhà toán học Luca Paoli xuất bản năm 1509. Leonardo đã viết cả một mục dài về các tỉ lệ của cơ thể con người trong một cuốn sổ ghi chép của mình. Ông xác định kích thước và tỉ lệ cho tất cả các bộ



phận của cơ thể, bao gồm đầu, mắt, tai, tay và chân. Các tỉ lệ do ông đưa ra dựa trên các nghiên cứu về số học cùng các quan sát và đo đạc của mình. Trong sổ ghi chép, ông cũng nhắc đến các cuốn sách của kiến trúc sư La Mã cổ đại Vitruvius (khoảng năm 30 tr.C.N), người cũng đã từng đề cập đến các tỉ lệ của cơ thể người. Leonardo viết về những gì ông chịu ảnh hưởng từ Vitruvius:

Vitruvius, một kiến trúc sư, viết trong những cuốn sách về kiến trúc của mình rằng kích thước của cơ thể con người được phân chia bởi tạo hóa như sau: ... Nếu bạn dựng hai chân cho đến khi chiều cao của mình giảm đi 1/4, dang thẳng rồi nâng hai tay cho đến khi ngón giữa cao đúng bằng đỉnh đầu, thì bạn biết rằng khi đó tâm của tứ chi sẽ nằm tại rốn và khoảng trống giữa hai chân sẽ là một tam giác đều.

Leonardo bổ sung thêm chiều dài của hai cánh tay dang thẳng sẽ bằng chiều cao của cơ thể⁽¹⁾

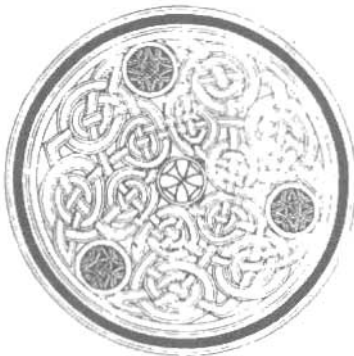
(1) Richter, Jean Paul, biên tập viên. *The Notebooks of Leonardo da Vinci* (Những ghi chép của Leonardo da Vinci), vol. 1. Nhà xuất bản Dover, 1970, New York.

NÚT TRONG CÁC BÍ ẨN CỦA CUỘC SỐNG

Kể từ khi Alexander Đại đế “tháo” nút thắt Gordian, các nút và hình dạng của chúng đã xuất hiện trong nhiều mặt đời sống của chúng ta. Các nhà ảo thuật, họa sĩ và triết học đều bị cuốn hút bởi những nút thắt như nút bà lá – loại nút không có điểm đầu và điểm cuối. Ngày nay, các nhà khoa học nhìn các nút như là một khả năng chứa lời giải đáp về những bí ẩn của cuộc sống. Giả thuyết này xuất hiện trong các lĩnh vực từ vũ trụ học cho đến những thế giới vi mô.

Thoạt nhìn, người ta có thể nghĩ rằng các nút thắt không có gì là đặc biệt ngoài công dụng neo giữ đồ vật như ở đôi giày hay chằng buộc mái chèo trên thuyền. Nhưng trong toán học, tồn tại cả một lĩnh vực gọi là *lí thuyết nút*, nhiều phát hiện liên kết lĩnh vực này với thế giới tự nhiên vẫn đang tiếp tục được khám phá.

Lí thuyết nút là một lĩnh vực rất mới của tô pô. Nó bắt đầu từ thế kỉ XIX với ý tưởng của Lord Kelvin rằng các nguyên



Hình thiết kế nửa Celtic từ Gospel of St. John. Book of Durrow. Trích từ Celtic Design, tác giả Ed. Sibbett, nhà xuất bản J. Dover, 1979.

tử là những cuộn xoáy thắt nút tồn tại trong ête, thứ vốn được tin là chất lỏng vô hình lấp đầy không gian. Ông tin rằng mình có thể phân loại các nút này và sắp xếp thành một bảng tuần hoàn các nguyên tố hóa học. Mặc dù lí thuyết này không đúng nhưng các nghiên cứu toán học về nút vẫn là một chủ đề nóng hổi trong thời đại ngày nay.

Điểm phân biệt các nút toán học với nút mà hàng ngày chúng ta vẫn thấy chính là ở chỗ chúng không có điểm cuối. Chúng là một dạng vòng lặp đóng mà không thể biến thành vòng tròn. Những gì mà các nhà toán học muốn làm là phân loại nút và phân biệt các nút khác nhau. Một vài trong số những phát hiện quan trọng đã được tìm ra cho đến nay là:

- Một nút không thể tồn tại trong không gian lớn hơn ba chiều.
- Nút đơn giản nhất là nút ba lá, với ba chỗ giao nhau. Nếu nhìn từ bên trái và bên phải nút thì hai hình ảnh thấy được là đối xứng gương với nhau.
- Tồn tại duy nhất một nút với bốn chỗ giao.



Nút ba lá

- Chỉ có hai loại nút có năm chỗ giao.
- Hơn 12 000 nút với số chỗ giao ít hơn hoặc bằng 13 đã được tìm ra cho đến nay, không tính các hình đối xứng gương.



Từ trái sang phải: Nút đầu tiên có 4 chỗ giao, nút thứ hai có 5 chỗ giao, thứ ba có 6 chỗ, còn thứ tư và thứ năm có 7 chỗ giao.

• Hãy cùng xem biểu đồ bên dưới. Các nút này đối xứng gương với nhau. Bạn có thể nghĩ rằng vì chúng đối xứng, nên nếu gộp lại chúng sẽ tháo nút cho nhau. Bạn hãy thử xem sao! (Chúng chỉ đơn giản là đi xuyên qua nhau, mọi điều còn lại không hề thay đổi.)



• Bây giờ, bạn hãy nhìn nút Chefalo, còn gọi là "nút sai". Điều gì sẽ xảy ra khi kéo các điểm đầu nút?
(Nút sẽ bị tung ra.)



Ban đầu, các mẫu hình thực tế của nút được tạo ra để nghiên cứu chúng. Để kiểm tra xem hai nút có tương đương với nhau hay không, ta phải thao tác bằng tay một mẫu nút, rồi cố gắng đưa nó về dạng nút còn lại. Nếu có thể đưa được thì chúng là tương đương với nhau; nếu không, không kết luận nào có thể đưa ra cả.

Những nghiên cứu về các nút trong lĩnh vực tô pô đang cố gắng giải thích các tính chất khác nhau của nút. Thậm chí máy tính cũng được đưa vào sử dụng. Hội *Geometry Supercomputer Project*⁽¹⁾ đang sử dụng những công nghệ máy tính tiên tiến nhất để tìm hiểu và tạo ra biểu diễn ba chiều của các dạng và các phương trình toán học của nút, ví dụ như nút xuyên và fractal.

Các nhà toán học cũng đã phát triển các phương pháp khác để phân loại và kiểm tra nút.⁽²⁾ Họ quan sát hình chiếu hai chiều của nó và viết phương trình mô tả hình chiếu đó.⁽³⁾ Gần đây người ta đã cố gắng tìm hiểu rất nhiều để có thể thâm nhập vào lĩnh vực này. Một vài mối liên hệ thú vị giữa lý thuyết nút và sinh học phân tử, vật lý phân tử đã được tìm ra. Các nhà khoa học trong lĩnh vực này sử dụng các kết quả toán học và áp dụng các kỹ thuật mới trong lý thuyết nút để nghiên cứu cấu trúc ADN. Họ phát hiện ra rằng các mạch ADN có thể tạo thành vòng lặp mà đôi khi là nút. Ngày nay, các nhà khoa học có thể dùng các kết quả từ lý thuyết nút để nhận biết xem

(1). Một nhóm quốc tế bao gồm các nhà toán học và khoa học nghiên cứu toán học thuần túy, và làm việc trên cùng một siêu máy tính thông qua mạng lưới viễn thông nhằm giải quyết các vấn đề thách thức của hình học. *Science News*, tập 13 trang 12, xuất bản 02/01/1988

(2). Một "nút" mà có thể biến đổi thành không có chỗ vòng nhau, tức là một vòng tròn, là một vòng tròn hay "không nút".

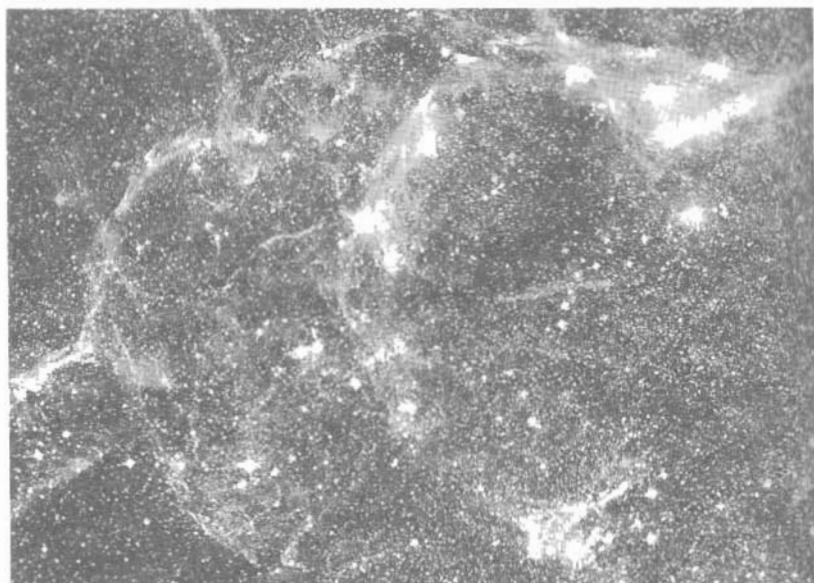
(3). Phương trình đầu tiên như vậy được John Alexander viết vào năm 1928. Năm 1980, Vaughan Jones tìm được thêm các phương trình nút khác. *Science News*, số 133, trang 329, xuất bản 21/05/1988.

mạch ADN mà họ đang quan sát đã từng ở dạng nút khác hay chưa. Họ cũng có thể xác định chuỗi các bước mà mạch ADN có thể đã từng biến đổi để tạo thành một cấu trúc cụ thể và dự đoán các cấu trúc không quan sát được của ADN. Tất cả các kết quả này cho thấy toán học và lí thuyết nút quả thật hữu dụng trong kĩ thuật gen.

Cũng giống như vậy, trong vật lí, lí thuyết nút cho thấy hiệu quả của nó trong việc nghiên cứu tương tác giữa các hạt có cấu trúc giống nút. Cấu trúc nút có thể sử dụng để mô tả các tương tác khác nhau có thể xảy ra. Các nhà khoa học tìm hiểu *The Theory of Everything* (TOE) (*Lí thuyết toàn năng*) tin rằng các nút đóng vai trò tối quan trọng trong việc hình thành vũ trụ. Trong sự nghiên cứu không ngừng về TOE, các nhà khoa học đã cố gắng phát triển một mô hình toán học hợp nhất tất cả các loại lực trong tự nhiên (lực điện từ, lực hấp dẫn, lực hạt nhân mạnh và lực hạt nhân yếu). Các nhà vật lí tin tưởng chắc chắn rằng một TOE có thể được tìm ra. Một số người đã cống hiến cả đời mình để đi tìm câu trả lời cho một TOE. Trong TOE mới đây nhất, một vài nhà vật lí tin rằng bản chất của vũ trụ gắn liền với các đối tượng có tên là *siêu dây*. Phiên bản cụ thể này của TOE cho rằng vũ trụ và tất cả các dạng vật chất, năng lượng tồn tại từ sau khoảnh khắc xảy ra vụ nổ Big Bang là kết quả các tác động và tương tác của siêu dây. *Lí thuyết siêu dây* mô tả vũ trụ có 10 chiều (9 chiều không gian và 1 chiều thời gian) với các khối xây dựng vật chất và năng lượng là các dây mảnh vô cùng. Lí thuyết này suy luận rằng tại vụ nổ Big Bang, 9 chiều không gian là như nhau. Sau đó, khi vũ trụ giãn nở, chỉ có 3 chiều không gian giãn nở cùng với nó. Sáu chiều còn lại vẫn cuộn lại và được bao bọc trong các hình học compact có độ dày 10^{-33} cm (tức là nếu xếp liên tiếp 10^{33} lần thì sẽ thu được độ dày 1 cm). Vì vậy, các dây này được cho là chứa 6 chiều không gian trong chúng. Các nhà khoa học hiện nay đang cố gắng

mô tả siêu dây bằng việc sử dụng các mô hình tô pô 6 chiều. Họ tin rằng các siêu dây có thể là mở hoặc đóng trong một vòng lặp, chúng tạo nên các dạng khác nhau của vật chất và năng lượng của vũ trụ bằng việc biến đổi dao động và cách quay của mình. Nói cách khác, các siêu dây phân biệt nhau bởi cách thức chúng dao động và quay.

Tầm quan trọng của lý thuyết siêu dây hiện đang được so sánh với thuyết tương đối lớn của Einstein. Bốn chiều không gian đã là khó hình dung (Einstein đề ra rằng cần có chiều dài, chiều rộng, chiều cao và thời gian để mô tả vị trí của một vật thể trong vũ trụ) mười chiều có vẻ như là không thể được. Nhưng nếu một người nghĩ về các chiều không gian như là các số mô tả vị trí và các đặc điểm của vật thể trong vũ trụ thì chúng sẽ trở nên dễ hiểu hơn nhiều.



Các ý tưởng của TOE được đưa ra đã 20 năm. Trọng lực giờ đây trở thành vật cản bởi các tính toán (trong đó có trọng lực)

cần thiết để hỗ trợ cho các dạng khác nhau của lý thuyết này sinh ra những vô cùng toán học⁽¹⁾. Lối thoát đã mở ra vào năm 1974 khi John Schartz và Joel Scherks coi trọng lực như là một đối tượng hình học nằm hoàn toàn trong chiều thứ 10, giống như cách Einstein mô tả trọng lực trong hình học 4 chiều.

Yếu tố toán học đằng sau lý thuyết toàn năng siêu dây có ảnh hưởng rất mạnh mẽ. Các kết quả hầu như là thuyết phục. Schwartz và Michael Green là hai người mở đầu cho lý thuyết này. Họ đã tìm hiểu lý thuyết siêu dây hơn một thập kỷ qua dù có rất ít sự cổ vũ hay hỗ trợ của các đồng nghiệp, những người cho rằng thế giới 10 chiều thật khó mà chấp nhận được. Sự ra đời bài báo của họ đã khiến các nhà vật lý phải tiếp nhận nó một cách nghiêm túc. Một số nhà vật lý còn cho rằng giới vật lý đã lãng tránh (“phí phạm” thời gian) nghiên cứu ý tưởng này bởi vì các yếu tố toán học trong đó quá khó. Siêu đối xứng, các mô hình tô pô 6 chiều, một vũ trụ 10 chiều, các dây siêu mảnh là một vài trong số nhiều khái niệm cần thiết để mô tả và hợp lý hóa lý thuyết siêu dây. Và như là hệ quả, lý thuyết này đã biến một số nhà vật lý thành nhà toán học, đồng thời ngược lại, nhà toán học thành nhà vật lý. Đó mới chỉ là những khám phá và ứng dụng đầu tiên của một lĩnh vực toán học mới nổi – lĩnh vực lý thuyết nút.

(1) Vô cùng có thể xuất hiện bởi các phép tính như khi chia một số cho 0 và lấy 0 nhân 0



Tòa nhà cơ quan Oracle, Redwood City, CA.

TOÁN HỌC VÀ KIẾN TRÚC

BUCKMINSTER FULLER, VÒM TRẮC ĐỊA &
BÓNG BUCKY
KIẾN TRÚC THẾ KỈ XXI
- CÁC KHỐI LẤP ĐẦY KHÔNG GIAN
VÒM - TOÁN HỌC CONG
KIẾN TRÚC & PARABOLOID HYPERBOLIC
LOẠI BỎ BUỒNG HÌNH HỘP & FRANK
LLOYD WRIGHT

*Cơ học là thiên đường của toán học, bởi ở đây
chúng ta tiến đến thành quả của toán học.*

—Leonardo da Vinci

Hàng ngàn năm nay, toán học là công cụ vô giá trong thiết kế và xây dựng. Nó là nguồn gốc cho thiết kế kiến trúc và cũng là phương tiện giúp cho ngành kiến trúc có thể xóa bỏ việc xây dựng thử nghiệm và tránh những sai sót kỹ thuật của công trình. Dưới đây là danh sách ngắn gọn về một số khái niệm toán được sử dụng trong kiến trúc nhiều thế kỷ qua:



Đền thờ Kukulkan, Chichen Itza, Yucatan.

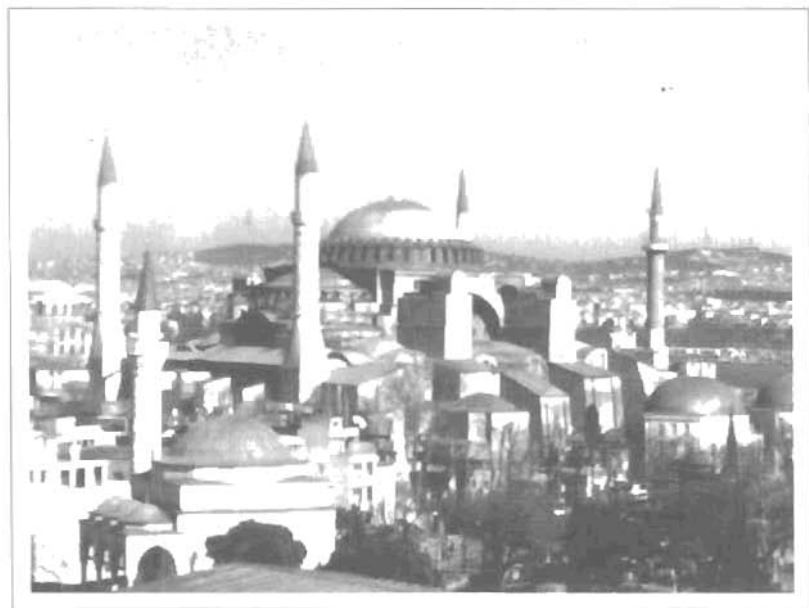


Hình dáng kim tự tháp đã được lựa chọn cho tòa nhà hiện đại tại thành phố Foster, California này.

- hình chóp
- lăng trụ
- hình chữ nhật vàng
- ảo ảnh
- hình lập phương
- đa diện
- vòm trần địa
- tam giác
- định lý Pythagoras
- hình vuông, hình chữ nhật
- hình bình hành
- vòng tròn, nửa vòng tròn
- đa giác
- góc
- đối xứng
- đường parabol
- đường dây xích
- hình yên ngựa (parabol hyperbolic)
- tỉ lệ
- cung

- trọng tâm
- đường xoắn ốc
- đường đỉnh ốc
- elip
- xếp hình
- phối cảnh

Thiết kế kiến trúc chịu ảnh hưởng của quang cảnh xung quanh, dạng vật liệu, sức tưởng tượng cũng như kiến thức hình họa và toán học của người kiến trúc sư.



St. Sophia, Istanbul, Thổ Nhĩ Kỳ.

Một vài ví dụ lịch sử minh họa sự ảnh hưởng của kiến thức toán học tới các thiết kế như:

- Việc tính toán kích thước, hình dáng, số lượng và cách sắp đặt các tầng đá khi xây dựng các kim tự tháp ở Ai Cập, Mexico và Yucatan là dựa vào những kiến thức về tam giác đều, hình vuông, định lý Pythagoras, thể tích và các phép tính toán.

- Tính cân đối trong các thiết kế của Machu Picchu⁽¹⁾ sẽ không thể có được nếu thiếu các phác thảo hình học.
- Việc xây dựng đền thờ Parthenon⁽²⁾ dựa vào tỉ lệ vàng, ảnh hưởng, những đo đạc và kiến thức về tỉ lệ để chia các khối cột thành những chi tiết chính xác (đường kính của cột luôn bằng $1/3$ chiều cao).
- Sự chính xác về mặt hình học trong bố cục và vị trí của nhà hát cổ đại Epidauros đã được tính toán một cách đặc biệt để tăng cường độ vang và tăng tối đa tầm nhìn của khán giả.
- Sự đổi mới trong việc sử dụng các hình tròn, bán nguyệt, bán cầu và các vòm đã trở thành những ý tưởng toán học chính được giới thiệu và hoàn thiện bởi các kiến trúc sư La Mã.
- Các kiến trúc sư thời kì Đế chế La Mã phương Đông (từ năm 330 đến năm 1453) đã kết hợp một cách trang nhã các khái niệm về hình vuông, đường tròn, lập phương và bán cầu với các mái vòm khi xây dựng nhà thờ St. Sophia tại Constantinople, Thổ Nhĩ Kỳ.
- Các kiến trúc sư xây dựng nhà thờ Gò-tích đã sử dụng toán học khi xác định trọng tâm để tạo nên thiết kế hình học điều chỉnh được của các trần nhà hình vòm. Các trần nhà giao nhau tại điểm hướng khối lượng của toàn bộ công trình kiến trúc bằng đá này thẳng xuống phía mặt đất chứ không phải theo chiều ngang.



Đại hí trường cổ La Mã, Rome, Ý.

(1) Thành phố pháo đài của người Inca tại Andes Peru, được phát hiện ra năm 1911.

(2) Đền thờ chính của Nữ thần Athena được xây dựng trong vệ thành của thành Aten, Hy Lạp khoảng hơn 400 năm tr.C.N



Mỗi tầng lầu của tòa nhà 3 tầng này được thiết kế từ hai tam giác đều chồng lên nhau. Môtip tam giác được áp dụng tại khắp các cột chống bên trong và cửa sổ.

- Những công trình kiến trúc bằng đá thời kì Phục hưng cho thấy sự tinh tế trong tính đối xứng tạo ra từ các khối và các khoảng trống sáng, tối.

Cùng với những khám phá về các vật liệu xây dựng mới, các ý tưởng toán học mới cũng được điều chỉnh theo để sử dụng tối đa khả năng của các loại vật liệu. Sử dụng nhiều loại vật liệu xây dựng sẵn có như đá, gỗ, gạch, xi măng, sắt, thép, thủy tinh, các vật liệu tổng hợp như nhựa, bê tông phụ gia và bê tông lót, các kiến trúc sư đã có thể thiết kế hầu như bất kì hình dạng nào. Trong thời kì hiện đại, chúng ta đã chứng kiến công trình xây dựng hình yên ngựa (thánh đường St. Mary tại San Francisco), cấu trúc vòm trắc địa của Buckminster Fuller,

những thiết kế modul của Paolo Soleri, dây treo máy bay hình parabol, các cấu trúc tổng hợp rắn bắt chước hình những chiếc lều của người dân du cư, cáp hình dây xích dùng trong sân vận động thể thao Olympic tại Tokyo và thậm chí cả tòa nhà hình bát giác với mái vòm elip.

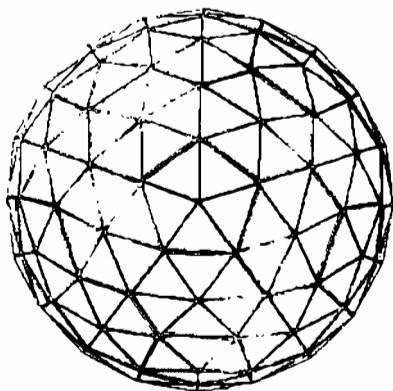


Cấu trúc giống chiếc lều này minh họa việc sử dụng các vật liệu và phương pháp xây dựng một Fashion Island, Foster City, California.

Kiến trúc là lĩnh vực đang phát triển. Các kiến trúc sư luôn không ngừng nghiên cứu, cải tiến, tăng cường và sử dụng lại các ý tưởng từ quá khứ cũng như sáng tạo ra những ý tưởng mới. Chứng nào toán học và các vật liệu xây dựng còn tồn tại, chứng đó họ vẫn tự do tưởng tượng ra bất kì mẫu thiết kế nào theo ý thích của mình.

Richard Buckminster Fuller là một nhà phát minh, một nhà thiết kế, một kĩ sư và là một tác giả viết sách. Ông là nhà kiến thiết tư tưởng, người có tầm nhìn luôn đi trước thời đại. Dưới đây là những phát minh nổi tiếng nhất của ông.

BUCKMINSTER FULLER, VÒM TRẮC ĐỊA VÀ BÓNG BUCKY



Chiếc xe ô tô *Dymaxion* được thiết kế với một động cơ sau, truyền động bánh trước.

– Ngôi nhà *Dymaxion* và *Wichita*, tiền thân của những ngôi nhà lăm sẵn phục vụ cho việc xây dựng hàng loạt, chúng giúp tối thiểu hóa việc sử dụng nguyên vật liệu nhưng vẫn tạo ra không gian rộng tối đa.

Chúng được thiết kế để trở thành những căn nhà có thể vận chuyển chỉ trong một lần.

– Trong lĩnh vực nghiên cứu bản đồ, ông tạo ra *World Energy Map* năm 1940, tạp chí *Life*, *World Strategy Map* năm 1943, và *Dymaxion Air Ocean Map* năm 1954.⁽¹⁾

– Vòm trắc địa (mái vòm bao phủ không gian được tam giác phân).

– Toàn vẹn căng.⁽²⁾

(1). Đây là những tấm bản đồ chụm trái đất lên các hình đa diện.

(2). Nguyên văn "tensegrity", là từ thu gọn của cụm từ "tensional integrity". Nó chỉ sự duy trì toàn vẹn của cấu trúc nhờ điều phối lực cân bằng và các phân bố nén.

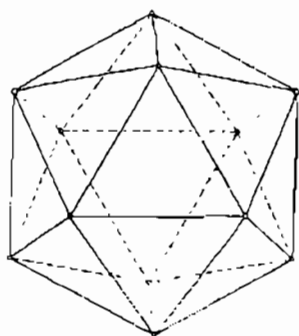
Vòm trắc địa chính là thành công thương mại lớn nhất của Fuller, tên gọi của nó được đồng nhất với tên của ông. Trong đơn xin cấp bằng sáng chế, Fuller đã miêu tả vòm trắc địa như sau: “Phạt minh của tôi liên quan tới sườn khung cho không gian kín. Một chu số quan trọng trong việc thiết kế bất kỳ một khung xây dựng nào là trọng lượng kết cấu che phủ một foot vuông (tức là có kích thước 1 foot x 1 foot) sàn nhà. Trong các thiết kế tường và mái thông thường, con số này thường là 2500 kg/m². Tôi đã phát hiện ra cách giảm nó xuống còn khoảng 4 kg/m² bằng cách dùng một bộ khung với vỏ bọc bằng nhựa”.⁽¹⁾ Điểm sáng suốt quan trọng nhất của Buckminster Fuller là ở chỗ ông nhìn thấy mối liên hệ giữa những đa diện thông thường⁽²⁾ và hình cầu với kiến trúc. Mối liên hệ này được hiện thực hóa bằng mái vòm trắc địa. Chúng ta hãy cùng xây dựng lại kịch bản có thể đã diễn ra dẫn đến ý tưởng vòm trắc địa. Bắt đầu với khối hai mươi mặt, ông chia nhỏ các mặt của nó thành các tam giác đều. Sau đó, ngoại tiếp khối lại mười mặt bằng một mặt cầu và chiếu các đỉnh lên mặt cầu đó. Các tam giác đều sẽ không còn đồng dạng nữa. Giả sử ông gọt bớt bề mặt của khối mới này. Bây giờ hình dạng của cấu trúc trắc địa đã gần hơn với dạng của mặt cầu, tính chất của nó cũng gần hơn với tính chất của mặt cầu. Mặt cầu có diện tích bề mặt nhỏ nhất so với các khối khác có cùng thể tích. Vì vậy, vòm trắc địa phủ được nhiều không gian hơn với lượng vật liệu ít hơn so với các dạng kiến trúc thông thường. Hơn nữa, nó còn tạo ra một dạng cấu trúc mới ổn định hơn nhiều. Cũng như ở bong bóng xà phòng, sức căng bề mặt kéo vào phía trong chống lại sức ép của không khí bên trong nó và một trạng thái cân

(1). Bằng sáng chế đã được cấp vào tháng 6 năm 1954 và ông nhận được tiền bản quyền từ tất cả các mái vòm trắc địa xây dựng trong thời gian 17 năm kể từ khi bằng sáng chế này có hiệu lực. Trích từ Buckminster Fuller, tác giả Martin Fiedler nhà xuất bản Tappan, New York, 1990.

(2) Đa diện là các khối hình học có các mặt là đa giác.

hàng sẽ được thiết lập giữa sức căng và sức ép. Các thiết kế của kiến trúc truyền thống đòi hỏi xem xét trọng lượng và lực đỡ, trong đó trọng lực có vai trò nổi bật nhất. Trong cấu trúc vòm trắc địa, vai trò của trọng lực hầu như không có liên quan gì.

Chỉ có một cản trở duy nhất. Vòm trắc địa không phải là mặt cầu, vì vậy kích thước của chúng phần nào bị giới hạn. Nhưng khi Fuller kết hợp ý tưởng vòm trắc địa với “toàn vẹn căng”⁽¹⁾, ông đã có thể làm kích thước của các vòm lớn lên rất nhiều. Những cấu trúc toàn vẹn căng giữ bản thân chúng đứng vững không phải bằng các cột chống đỡ, xà, rầm hay trụ ốp tường, mà là bằng lực căng (sức kéo của vật nặng). Phát minh và sáng chế về cách xây dựng toàn vẹn căng trọng lượng nhẹ của Fuller gần như đã xóa bỏ những giới hạn về kích thước của cấu trúc vòm trắc địa. Để minh họa cho tầm vóc to lớn của những siêu cấu trúc này, hãy xem vòm bán cầu do Fuller đề xuất với đường kính là 3km, nhưng lại có thể che phủ cả một phần của thành phố New York. Năm 1960, ông mô tả cách lắp đặt của nó như sau: “Một hạm đội 16 máy bay trực thăng cỡ



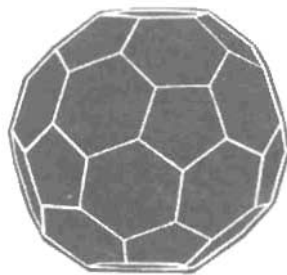
Khối hai mươi mặt

lớn Sikorsky có thể lắp tất cả các đoạn thành một mái vòm cao 16 km, rộng 3 km trong vòng 3 tháng với chi phí 200 triệu đô-la... một mái vòm ghép từ năm mươi mảng có thể phủ tất cả các tòa nhà chọc trời của thành phố Manhattan. Với mái vòm như vậy, có thể ngăn cản tuyết và mưa để bảo vệ khu vực, điều khiển các tác động của ánh sáng mặt trời và chất lượng của không khí...”⁽²⁾

(1) Vào tháng 11 năm 1962, Fuller nhận được bằng sáng chế về tất cả các cấu trúc “toàn vẹn căng” của mình.

(2) Trích từ Buckminster Fuller, tác giả Martin Pawley, Nhà xuất bản Taplinger, New York, 1990.

Vòm trắc địa Fuller không chỉ là vấn đề về tiết kiệm chi phí xây dựng hay sự chấp nhận của thế giới. Dù ngôi nhà Dymaxion, món quà đặc biệt ông dành cho Viện Kiến trúc Hoa Kỳ đã bị từ chối năm 1928, nhưng cách nhìn triết học về việc xây dựng những ngôi nhà tiết kiệm chính là động lực cho ông tiếp tục nghiên cứu. Trong suốt 50 năm tiếp theo của sự nghiệp, Fuller nhận được nhiều bằng danh dự, chức vị thành viên, phần thưởng và sự ca ngợi của toàn thế giới. Nhưng sự vinh danh cao nhất dành cho ông chính là những ghi nhận của thế giới thể hiện ở hơn 300 000 vòm trắc địa được xây dựng dựa trên các sáng chế của Fuller từ năm 1954 cho đến khi ông mất. Cấu trúc trắc địa Fuller không chỉ giới hạn ở những kích thước lớn, chúng còn được tìm thấy ở mức độ phân tử. Bóng bucky, còn được gọi là *buckminsterfullerene*, là một đa diện hóa học được tổng hợp vào những năm 1990. C_{60} là phân tử cacbon bao gồm 60 nguyên tử cacbon nằm tại các đỉnh của một khối hai mươi mặt cụt⁽¹⁾. Bóng bucky hiện đang được tổng hợp ở dạng chất rắn để sử dụng làm chất bôi trơn, chất xúc tác, đầu quét của máy quét hiển vi hay trong các pin điện mới. Các nhà khoa học cũng đang sửa đổi cấu trúc của bóng bucky (có nét gì đó giống như cách Fuller sửa đổi đa giác) để tạo ra các phân tử mới bền hơn, nhẹ hơn và chắc chắn hơn cả bóng bucky.⁽²⁾ Khả năng bảo toàn vật liệu, độ nhẹ, tính bền vững và sức chịu lực của vòm trắc địa chính là những tính chất thu hút các nhà nghiên cứu hướng đến các dạng phân tử mới này.



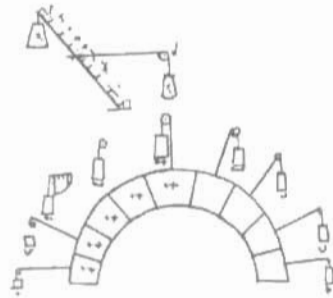
Khối hai mươi mặt cụt

(1). Cỡm được gọi là quả bóng đá.

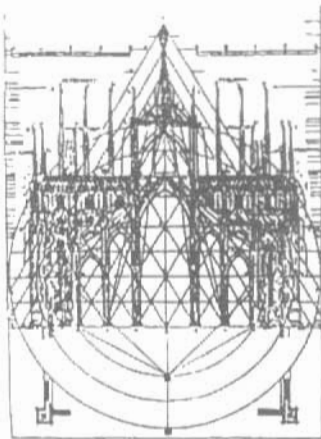
(2). Phân tử gồm 168 nguyên tử cacbon, gọi là buckygon – một cấu trúc giống như găm giã, đã được tạo ra bởi các nhà nghiên cứu tại Trung tâm nghiên cứu IBM Thomas J. Watson, New York.

KIẾN TRÚC THẾ KỈ XXI - CÁC KHỐI LẮP ĐẦY KHÔNG GIAN

Trải qua nhiều thời đại, tam giác, hình vuông và hình chữ nhật luôn đóng vai trò chủ đạo trong các thiết kế kiến trúc. Gỗ và đá thuộc số những vật liệu đầu tiên mà con người sử dụng để làm nhà cho mình. Vì tam giác và góc vuông đem lại sự vững chắc cao nhất theo như kiến thức con người biết được thời đó, nên chúng được dùng trong các công trình như kim tự tháp ở Ai Cập và ở Yucatan⁽¹⁾. Các mẫu thiết kế, các loại hình dáng phát triển dần lên khi mà



Bức phác thảo từ những ghi chép của Leonardo da Vinci cho thấy ông đang cố gắng giải quyết bài toán về các lực trên một cổng vòm.



Kiến trúc Gô-tích của nhà thờ thành Milan, được kiến trúc sư bậc thầy Caesar Cesariano vẽ.

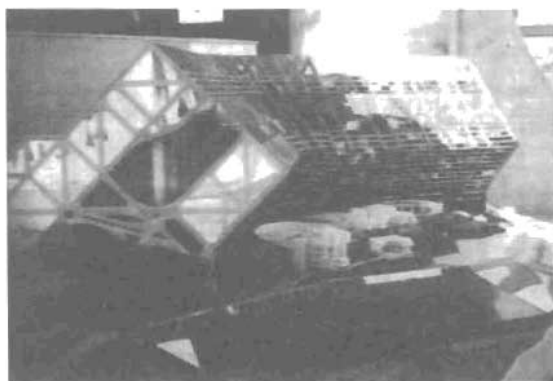
hiểu biết, kiến thức của con người tăng lên và các nguyên vật liệu xây dựng được cải tiến. Nhiều thế kỉ qua, các phát hiện về động lực học ở các đường cong và khung vòm đã cho phép người ta sử dụng đá, gỗ trong các công trình như cống dẫn nước ở La Mã hay như các nhà thờ Gô-tích. Với sự có mặt của sắt, thép, thủy tinh, xi măng, gạch, những công trình vững chắc hơn đã có thể xây dựng được. Sau đó, nhựa và các vật liệu tổng hợp cùng với cấu trúc “toàn vẹn căng”

(1). Một bán đảo, tiểu bang của México

cho phép các kiến trúc sư thiết kế một loạt những hình dáng mới. Ngày nay, kiến thức về toán học, khả năng mô hình hóa bằng máy tính và những hiểu biết sâu sắc của con người về các loại lực vật lý khác nhau tác động lên cấu trúc đã lớn hơn rất nhiều so với thời xưa. Nhưng các cấu trúc và hình dáng kiến trúc vẫn giữ nguyên là đối tượng toán học ba chiều. Nhiều hình xuất phát từ hình học Euclid như các khối chữ nhật hay hình vuông, chóp, tứ diện, mặt cầu, hình trụ. Số còn lại là những hình dạng kì lạ hơn như các khối cong, hình lồi và vòm trắc địa. Tất cả các khối hình này được người kiến trúc sư sử dụng để vừa lấp đầy không gian, vừa tạo ra không gian sinh sống.

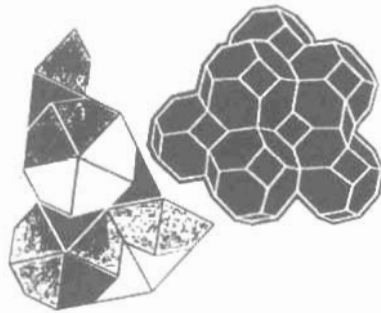
Vậy những loại cấu trúc và không gian sống nào sẽ được thiết kế trong thế kỉ XXI? Những khối hình nào có thể lấp đầy không gian? Nếu công trình thiết kế đòi hỏi tính sẵn có, khả năng thích nghi và có thể mở rộng được thì đương nhiên các ý tưởng về lát mặt phẳng và xếp hình không gian sẽ đóng vai trò nổi bật. Bất kì hình nào có thể lát kín mặt phẳng như tam giác, hình vuông, lục giác hay các đa giác khác đều có thể điều chỉnh được để dùng cho những không gian sống riêng biệt.

Ngoài ra, những không gian bổ sung có thể được xây thêm

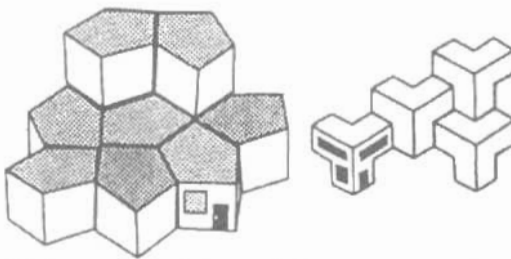


Mô hình về một công trình trong tương lai của Paolo Soleri được triển lãm tại Arizona.

chung tường với không gian cũ nếu muốn. Khả năng thích ứng linh hoạt như vậy khiến không gian sống trở nên rất thú vị với những sân sau hay những chỗ trống chứa lại cho ánh sáng chiếu vào và cho những sửa đổi về sau nếu cần. Mặt khác, người kiến trúc sư có thể xem xét đến các khối xếp đầy không gian. Khối truyền thống nhất trong số này là hình lập phương và hình hộp chữ nhật. Một số thiết kế modun có thể bao gồm khối mười hai mặt hình thoi (rhombicdodecahedra) hoặc khối bát diện cụt.



Các hình Penrose xếp đầy mặt phẳng và các khối bát diện cụt lấp đầy không gian.



Hình bên trái minh họa cách thức các ngũ giác lát kín mặt phẳng được điều chỉnh thành lăng trụ ngũ giác, đơn vị lấp đầy không gian. Hình bên phải là cấu trúc được tạo ra khi sửa đổi hình lập phương.



Những lựa chọn đa dạng ngày nay càng tăng thêm khó khăn cho các kiến trúc sư trong việc xác định khối hình nào là tốt nhất để có thể lấp đầy không gian theo hướng tối ưu hóa thiết kế và thẩm

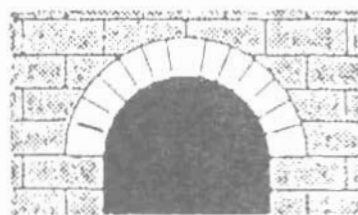
mĩ, đồng thời tạo ra một không gian sống thoải mái. Các bản thiết kế của những kiến trúc sư như Paolo Soleri, David Greene, Pier Luigi Nervi, Arata Isozaki, I. M. Pei và nhiều người khác nữa đã góp phần vào việc ứng dụng các vật liệu mới cũng như ứng dụng những hình dạng hình học độc đáo. Giờ đây, cũng giống như trong quá khứ, tính khả thi của cấu trúc tuân theo các định luật toán học và vật lý. Chúng có vai trò vừa là công cụ, vừa là thước đo cho tính khả thi của các thiết kế kiến trúc.

VÒM - TOÁN HỌC CONG

Đằng sau bức tường,
các thiên thần đang chơi
đũa; họ đùa nghịch với những
con số mà từ chúng, vũ trụ được tạo thành.

—Le Corbusier (1887 – 1965)

Vòm là một thành tựu kiến trúc trang nhã. Theo thời gian, vòm mang dáng dấp của nhiều đường cong toán học khác nhau (như đường tròn, elip, parabol, đường dây xích) để trở thành: vòm bán nguyệt, đường xoi hình chữ S, parabol, elip, vòm cuốn mũi tên (còn gọi là vòm cuốn đều cạnh), vòm cung, vòm góc tường, vòm nâng cao, vòm ngang, vòm móng ngựa, vòm ba lá, khải hoàn môn, vòm cuốn ngược, vòm tam giác, nửa vòm, vòm cuốn có tường ngăn, vòm giả...



Vòm bán nguyệt



Vòm móng ngựa



Vòm nâng cao



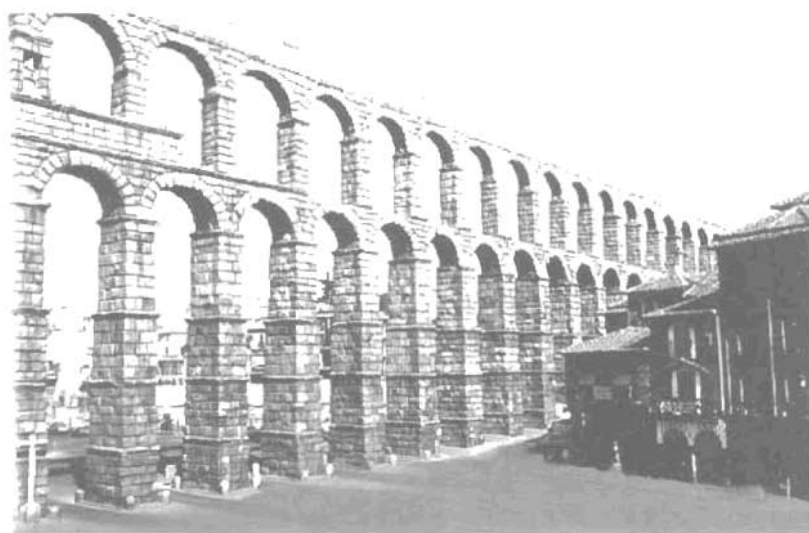
Vòm cuốn mũi tên



Vòm đường xoi
hình chữ S



Vòm elip

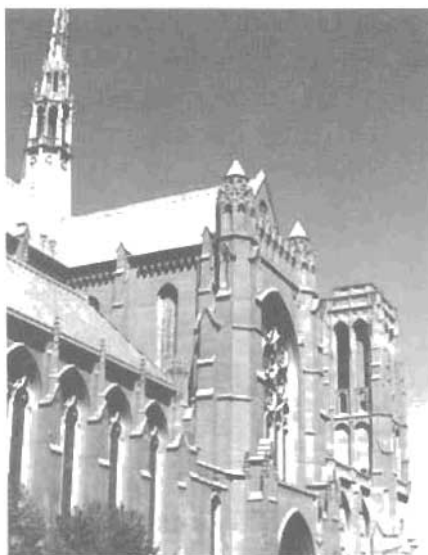


Công dẫn nước thời La Mã ở Segovia, Tây Ban Nha, với 148 cổng vòm cao 90 foot.

Về cơ bản, vòm là một phương thức trong kiến trúc dùng để làm thoáng không gian. Nó giúp dàn đều sức kéo, vì thế tránh được sự dồn lực vào tâm. Những khối đá nêm (đá có dạng hình nêm), còn được gọi là đá vòm, tạo thành đường cong của vòm. Giữa vòm là đá đỉnh vòm. Tất cả các khối đá trên vòm tạo nên một cơ chế đồng chịu tác dụng của trọng lực. Sức kéo của trọng lực làm các cạnh bên của vòm căng ra (lực đẩy). Người ta dùng lực của bức tường hoặc trụ tường để chống lại lực đẩy này.

Trước khi các vòm được phát minh và sử dụng, các công trình kiến trúc được xây dựng dựa vào cột chống và rầm xà như đã thấy trong kiến trúc Hy Lạp, hoặc dựa vào đá bệc như ở các kim tự tháp Ai Cập. Các kiến trúc sư La Mã là những người đầu tiên sử dụng rộng rãi và phát triển vòm bán nguyệt. Khi người La Mã phát minh ra vòm và xi măng, gạch, một cuộc cách mạng kiến trúc đã nổ ra. Nhờ các cổng vòm, mái vòm và vòm trần địa, người La Mã đã có thể loại bỏ đi các xà ngang và cột chống bên trong trong quá trình xây dựng. Vòm cho phép họ xác định

lại khối lượng của cấu trúc để giảm bớt những cột chống lớn. Chính nhờ thế, không gian bên trong công trình được mở rộng ra. Trước khi có các vòm, một công trình cần phải được chống bằng các cột bên trong và bên ngoài, khoảng cách giữa các cột phải được tính toán cẩn thận để không làm xà đỡ sụp đổ dưới sức nặng quá lớn của công trình.



Thánh đường Grace, San Francisco, California.

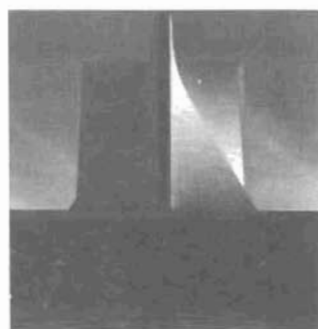
Vòm trong thời La Mã dựa vào hình dáng của đường tròn. Qua nhiều thế kỉ, các kiến trúc sư bắt đầu xa rời mẫu hình này, đầu tiên là với vòm elip (hay oval), sau đó là vòm cuốn mũi tên. Kết quả là các công trình trở nên cao hơn, cho ánh sáng chiếu vào nhiều hơn và phủ được một không gian lớn hơn. Hình dáng của vòm giúp con người điều khiển được những phần nào của công trình là không chịu lực. Trong khi vòm bán nguyệt của người La Mã tránh được sức nặng từ phía trên vòng cung cho tới tường, thì vòm cuốn mũi tên Gô tích lại chuyển sức nặng từ mái vòm ra trụ tường phía ngoài, vì thế nên có thể xây trần nhà cao hơn.

Ngày nay, vòm không phải đã là mô hình kiến trúc lỗi thời. Cùng với tất cả các ý tưởng về kiến trúc, vòm và các ứng dụng của vòm vẫn đang tiếp tục phát triển. Nhờ có sự ra đời của các vật liệu xây dựng mới, các kiến trúc sư giờ đây đã có thể kết hợp và sử dụng một loạt các loại đường cong và hình dạng toán học cho các tác phẩm của mình.

KIẾN TRÚC VÀ PARABOLOID HYPERBOLIC

Một số công trình kiến trúc được thiết kế ở những hình dạng rất hiếm thấy. Một ví dụ điển hình là hình dạng paraboloid hyperbolic (hình yên ngựa) của Thánh đường St. Mary ở San Francisco. Thánh đường được Paul A. Ryan, John Lee, các nhà tư vấn kĩ thuật Pier Luigi Nervi ở Rome và Pietro Bellaschi ở M.I.T thiết kế.

Tại buổi lễ khánh thành, khi được hỏi liệu Michelangelo⁽¹⁾ sẽ nghĩ gì về thánh đường này, Nervi đã trả lời: “Ông sẽ không thể nào tưởng tượng được thánh đường. Mẫu thiết kế này xuất phát từ những lí thuyết hình học chưa được chứng minh khi đó”.



Thánh đường St. Mary, San Francisco, California.

Đỉnh của công trình này là một mũi nhọn paraboloid hyperbolic có thể tích 2135 foot khối với các bức tường cao 200 foot so với nền, công trình được đỡ bởi 4 cột bê tông khổng lồ trải dài 90 foot trên mặt đất. Mỗi cột chịu một khối lượng nặng 9 triệu pound. Các bức tường làm từ 1680 tấm bê tông đúc sẵn bao gồm 128 kích thước khác nhau. Kích thước của nền nhà hình vuông là 255 inch x 255 inch.

Paraboloid Hyperbolic là kết hợp của một hình paraboloid (parabol xoay xung quanh đối xứng của nó) và một hình hyperbol ba chiều.

Phương trình của paraboloid hyperbolic:

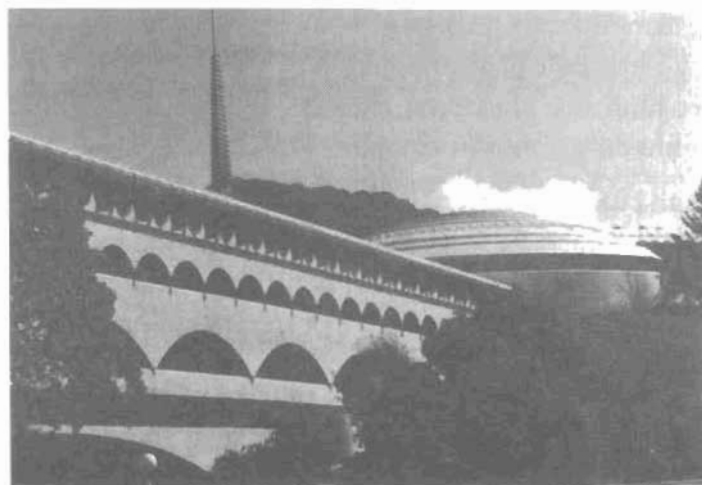
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad a, b > 0, c \neq 0$$

(1). Michelangelo di Lodovico Buonarroti Simoni (1475-1564) là họa sĩ, nhà điêu khắc, kiến trúc sư, nhà thơ, kĩ sư người Ý thời Phục hưng, ông được coi là đời thủ của Leonardo da Vinci.

LOẠI BỎ BUỒNG HÌNH HỘP KIẾN TRÚC CỦA FRANK LLOYD WRIGHT VÀ SỰ PHÒNG THÍCH KHÔNG GIAN

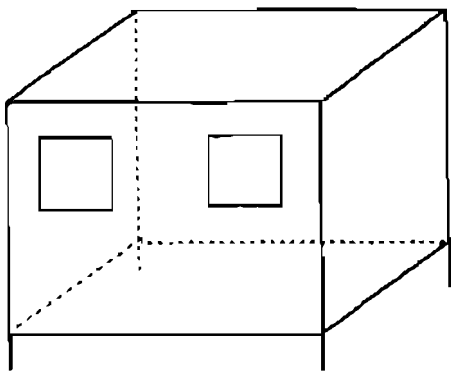
Những tác phẩm của Frank Lloyd Wright luôn có một phong cách xác định, nhưng các công trình kiến trúc của ông lại thay đổi khác nhau đến mức phong

cách đó không phải nằm ở sự giống nhau của các tòa nhà, mà là ở triết lý mà chúng phản ánh. Ông nói: “Kiến trúc là môn nghệ thuật khoa học xây dựng nên các công trình để thể hiện ý tưởng”. Kiến trúc của ông được gọi bằng cái tên riêng *kiến trúc hữu cơ*, tức là chứa đựng cả quang cảnh, vật liệu, phương pháp, mục đích và các ý tưởng theo một phong cách đặc biệt.



Trung tâm thị chính Marin là một trong những thiết kế cuối cùng của Wright. Hạt Marin, California.

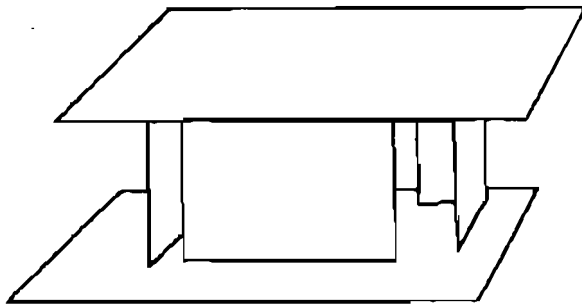
Các thiết kế kiến trúc của Wright, trong đó không gian bên trong và bên ngoài trở thành nhất thể, đã có tác động sâu sắc đến nền kiến trúc nói chung. Ông luôn cố gắng thiết kế các tòa nhà sao cho có cảm giác như là không gian bên ngoài đang chuyển động vào bên trong. Ông gọi đó là *loại bỏ buồng hình hộp*.



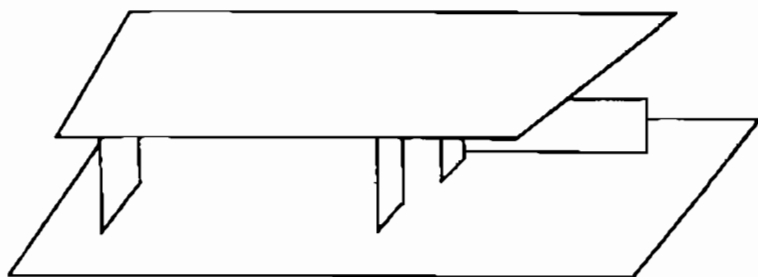
Kiến trúc hộp

Nhà ở, dù là cá nhân hay thương mại, đều được Frank Lloyd Wright nhìn như một kết hợp của các hộp hay các hình lập phương. Không gian trong hình học Euclid được xác định như là một tập hợp bao gồm tất cả các điểm. Mặc dù hình lập phương thường

được dùng trong hình học Euclid để miêu tả không gian, nhưng chúng ta biết rằng không gian không có đường biên hay giới hạn nào cả. Wright muốn công trình của ông phải thể hiện được cái hồn của không gian – sự lưu chuyển các điểm từ trong ra ngoài. Suy ngẫm theo dòng tư tưởng này, ông khám phá ra một cách để loại bỏ hình hộp truyền thống khỏi thiết kế của mình. Ông đi tìm sự thoát li khỏi cảm giác giam hãm và tách biệt với thế giới phía bên ngoài, thứ cảm giác vốn là đặc trưng của kiến trúc hộp. Wright nhận ra rằng tiềm năng của một số loại vật liệu xây dựng nào đó vẫn chưa được sử dụng. Các vật liệu này, ví dụ như thép và thủy tinh, cùng với ý tưởng thiết kế cách tân sẽ thay đổi các phương thức vốn tồn tại từ lâu của hình hộp, nhờ đó tạo ra sự hợp nhất của không gian bên trong và bên ngoài.



Các thiết kế của Wright làm mất các góc của hình hộp bằng



cách xóa bỏ đi những bức chống ở góc và đặt lại chúng dọc theo các bức tường. Vì vậy, mắt của người sống trong căn nhà sẽ không bị chặn lại và mắt cũng sẽ không đưa sự tập trung tới các góc. Không gian mà ông tạo ra là không gian động.

Bằng cách thay thế cột trụ và xà rầm bằng các cột trụ đỡ bao lớn, các bức tường không còn đóng kín nữa mà hoàn toàn độc lập và tách rời. Mỗi một bức tường đều có thể thay đổi bằng cách làm ngắn, mở rộng hoặc chia nhỏ lại.

Wright không chỉ dừng lại ở việc giải phóng thiết kế theo phương ngang mà còn cả theo chiều thẳng. Ông loại bỏ đi các gờ, mái đua, tăng thêm độ cao đỉnh nóc. Các thiết kế của ông hoàn toàn xóa đi sự chống lặp của hình hộp. Ông sử dụng các cột và biến chúng thành một phần của trần nhà, nhờ đó tạo nên tính liên tục của kiểu dáng. Giờ đây không gian bên trong và bên ngoài của công trình đã có thể lưu chuyển theo mọi hướng. Không gian có thể tự do di chuyển vào và ra khỏi công trình kiến trúc, đó chính là bản chất của kiến trúc hữu cơ. “Như vậy kiến trúc hữu cơ là kiến trúc trong đó bạn cảm thấy và nhìn thấy mọi thứ diễn ra như thể nó là chiều không gian thứ ba... không gian sống động nhờ chiều thứ ba này”.⁽¹⁾

(1). Frank Lloyd Wright, trích từ cuốn *Một lối kiến trúc Mỹ*, biên tập Edgar Kaufman New York Nhà xuất bản Brantall, 19565.



Xưa nay con người luôn chơi trò chơi và đổ nhau. Những cuốn sách về nguồn gốc của các kiểu trò chơi đã cho chúng ta những ví dụ phong phú về các trò chơi thời cổ đại còn tồn tại cho đến ngày nay. Hình minh họa trên là ở một tấm giấy cội Ai Cập cổ niên đại 1200 năm tr.C.N. Nó thể hiện một cách hài hước hình ảnh con dê và con sư tử đang chơi trò senet. Senet là một trong số các trò phổ biến nhất thời bấy giờ, được mọi tầng lớp xã hội ưa thích. Đáng tiếc là không còn tài liệu nào nói chính xác cách thức chơi trò này như thế nào. Tuy nhiên, hiện đã có một phiên bản của trò chơi senet được phát minh ra dựa vào những kết quả và đồ vật khảo cổ tìm được.



SỰ CUỐN HÚT CỦA LOGIC, GIẢI TRÍ VÀ CÁC TRÒ CHƠI

BA CHÀNG LÍNH NGỰ LÂM CỦA TOÁN HỌC

CÂU CHUYỆN VỀ CÁC BÍ ẨN CỦA TOÁN HỌC
CÙNG NHAU SUY LUẬN
TRÒ CHƠI CỦA CÁC NHÀ TOÁN HỌC
MỘT VÀI TRÒ GIẢI TRÍ TOÁN HỌC
MA PHƯƠNG & NHỮNG TRÒ GIẢI TRÍ KHÁC
BÀI TOÁN BẢY CÂY CẦU KÖNIGSBERG
HIỆN ĐẠI
HỘI CHỨNG BÀN CỜ
MỘT SỐ TRÒ CHƠI CỔ XƯA

Logic là nghệ thuật đi sai đường với sự tự tin.

—*Morris Kline*

Logic và toán học luôn sống đôi cùng nhau. Nhưng hầu hết mọi người lại không xem toán học là một trò chơi vui thú dùng để giải trí. Cho dù như vậy thì các trò chơi giải trí vẫn là một phần không thể thiếu của toán học. Trong lịch sử, sự phát triển của nhiều ý tưởng toán học là kết quả quá trình theo đuổi của một người đối với một lời nhận xét hay một vấn đề hấp dẫn nào đó. Nhiều người dường như bị điều khiển bởi lực lượng siêu nhiên vô hình nào đó khi ngồi với các bài toán và câu đố hàng giờ liền để tìm ra giải đáp. Họ là những người vốn đã say



Khoảng năm 212 tr.C.N, Syracuse rơi vào tay người La Mã. Lúc đó, Archimedes đang ngâm nghĩ về một bài toán trong nhà mình. Khi một tên lính La Mã bước vào và ra lệnh cho ông dừng làm việc, Archimedes đã không hề để ý đến hắn. Tức giận, tên lính dùng gươm đâm chết ông.

mê toán học và bị cuốn hút bởi nó. Trước khi kịp nhận ra, người ta có thể đã ngồi nhiều giờ, thậm chí nhiều ngày để tìm hiểu những thứ khác nhau liên quan đến cái mà thoạt đầu có vẻ như chỉ là một trò chơi đơn giản.

Lịch sử đã chứng kiến những trường hợp các bài toán, cuộc đua hay trò chơi giải trí đôi khi đưa đến những khám

phá đáng kể, và thậm chí là cả một lĩnh vực mới của toán học. Trên thực tế, nhà toán học Hy Lạp nổi tiếng Archimedes bị đâm chết chỉ vì lúc đó ông đang đắm mình suy nghĩ một bài toán. Trong những trang tiếp theo, chúng tôi xin giới thiệu với các bạn một số trò chơi và câu đố vốn là những cách luyện tập trí não mà các nhà toán học yêu thích.

CÂU CHUYỆN VỀ CÁC BÍ ẨN TOÁN HỌC

Các bí ẩn toán học vẫn tồn tại hàng thế kỉ nay. Một số công trình của Lewis Carroll cũng thuộc phạm trù này. Ngày nay, các bí

ẩn này đã được phổ biến rộng rãi với những cuốn sách như *Những cuộc phiêu lưu kì thú của tiên si Ecco* của tác giả Dennis Sasha và *Các vị khách từ hành tinh đỏ* của Cryton.

Ngay sau đây, chúng tôi xin giới thiệu với các bạn những vấn đề logic cùng các câu chuyện logic thú vị đi kèm theo chúng.

* * *

Thầy giáo bắt đầu đọc:

Tuần ấy tại rạp xiếc, mọi thứ dường như bắt đầu trở nên tồi tệ. Đầu tiên, một con ngựa trong tiết mục biểu diễn xiếc nhào lộn bị què. Tiếp đến là anh hề nổi danh lên quất tháo âm ỉ vì đứa con của một mụ béo đã làm hỏng mất phần trang điểm của anh ta. Rồi Madrè cãi nhau với vợ vì người biểu diễn đu dây. Nhưng điều tồi tệ nhất đã xảy ra khi người ta thấy Madrè nằm chết ở dưới tấm che lớn. Cạnh xác ông ta là cây gậy batoong mà hiếm khi ông ta sử dụng. Một cốc nước bị đổ nằm trên mặt bàn và một ư mồm của còn vương lại ở cạnh xác chết.

Thầy Mason ngừng đọc và hỏi: “Nào, các em điều gì đã xảy ra với Madrè? Làm sao ông ta lại chết? Có bạn nào đặt câu hỏi với thầy không? Thầy sẽ chỉ trả lời là Có hoặc Không thôi. Vậy nên, các em hãy cố gắng suy nghĩ, để xem suy luận logic của các em sẽ dẫn các em đi tới đâu”. Ngay lập tức, có nhiều cánh tay giơ lên. Những câu chuyện về suy luận logic như thế này có vẻ như luôn kích thích các em học sinh dù đó là học sinh hay xấu hổ và e ngại nhất. Các câu hỏi được đặt ra và kịch bản vụ án tại rạp xiếc bắt đầu được tìm hiểu.

Một học sinh hỏi: "Tại sao Madrè lại làm việc ở rạp xiếc?". "Hãy nhớ là chỉ đặt các câu hỏi Có hoặc Không thôi nhé các bạn trẻ!", Thầy giáo đề nghị.

"Có phải Madrè là người quản lí không?", Carol hỏi. "Không.". "Có dấu hiệu nào của bạo lực không?". "Không", Thầy giáo đáp.

"Có cái gì nữa gần cốc nước không?". "Có". "Có quan trọng phải biết đó là cái gì không?"; "Có".

"Đó có phải là một chiếc bánh Sandwich không?", Bill thốt lên. "Không".

"Đó có phải là một viên thuốc không?", Tom hỏi. "Đúng".

"Ông ta chết vì ông ta không uống thuốc có đúng không?", Tom tiếp tục. "Không, không hẳn là như thế", Thầy giáo trả lời.

"Có một cái gọt bút chì ở trên bàn của ông ta phải không?", Terri hỏi. "Không".

"Chúng ta phải tìm ra tại sao ông ta chết.", Terri nói với các bạn khác ở trong lớp. Các học sinh bắt đầu thảo luận trước khi tiếp tục đặt câu hỏi.

"Tất cả chúng ta đều biết rằng Madrè không được khỏe vì ông ta đang phải dùng thuốc và chúng ta đều biết rằng ông ta không bị sát hại do tấn công bằng vũ lực.", Tom nói và phân tích vụ án.

"Đúng rồi, chắc hẳn là ông ta chết do bệnh của ông ta.", Gary nói. Và rồi quay sang đặt câu hỏi với thầy giáo: "Ông ta chết vì đột quỵ tim có phải không?". "Đúng".

"Ồ, lần này câu đố có vẻ dễ dàng", Gary nói, cảm giác hơi tự mãn. "Chúng ta vẫn chưa giải xong bài toán, Gary ạ!", Barbara tuyên bố. "Chúng ta vẫn chưa tìm ra nguyên nhân nào khiến ông ta bị đột quỵ".

"Chắc chắn là chúng ta đã giải xong rồi, ông ấy không uống thuốc. Có đúng không thầy Mason?", Gary hỏi thầy giáo.

"Sai rồi, Gary!", Thầy giáo trả lời.

Các học sinh lại tiếp tục trở lại thảo luận. "Chúng ta đã xem xét hết tất cả các tình tiết đã cho của vụ án này chưa nhỉ?", Terri hỏi các bạn của mình.

"Chưa.", Bob vốn là người hiếm khi phát biểu ở trong lớp trả lời: "Chúng ta vẫn chưa xem xét hết! Chúng ta chưa xem xét là tại sao thông tin mùn cửa lại được đề cập ở đây, ông ta làm nghề gì ở trong rạp xiếc, thế còn cây gậy batoong thì sao? Còn vợ của Madrè và anh chàng nghệ sĩ leo dây thì thế nào?"



"Bạn hoàn toàn có lí đấy Bob ạ. Chúng ta cần phải làm rõ tất cả những chi tiết này.", Terri nói một cách phấn khích.

"Cây gậy batoong, đóng mùn cửa, bệnh tim, và các vấn đề về hôn nhân", Tom reo lên. "Tờ tìm ra rồi! Cây gậy và đóng mùn cửa đi cùng với nhau. Vì lí do nào đó cây gậy đã bị cửa ngăn đi chính bằng chiếc cửa này, thế nên mới để lại mùn cửa". "Đúng thế", thầy giáo nói. Rồi Tom nói tiếp: "Có lẽ là Madrè cảm thấy khó chịu khi ai đó đã làm hỏng cây gậy batoong của ông ta chăng?". "Không phải thế".

“Có lẽ là ông ta không biết rằng chiếc gậy đã bị cửa ngăn?”, Bob hỏi.

“Đúng rồi.”, Thầy giáo trả lời. “Sau đó, ông ta rất bực khi chống chiếc gậy ngăn. Nhưng tại sao lại thế?”, Bob tự hỏi. “Bởi vì nó không vừa với ông ta. Ông ta quá cao so với nó.”, Carol la lên. Sự kích động vì dường như lời giải đã nằm trong tầm tay các học sinh.

“Tôi giờ thì khá rồi đấy!”. Thầy giáo động viên khích lệ các học sinh của mình tiếp tục. “Nhưng tại sao chiều cao của ông ta



lại làm ông ta buồn đến vậy?”, Garry hỏi các bạn học sinh khác. “Lần này thì tôi đã có câu trả lời.”—Tom reo lên, vẫy vẫy tay, không nín được phần khích. “Madrè là một người lùn”. Cả lớp vui sướng hẳn lên. Còn thầy giáo thì nói lớn: “Đúng thế. Gì nữa nào?”

Lần này cánh tay của Terri giờ hẳn lên

trong không khí. Thầy giáo nhận ra, gật đầu với cô bé và cô bé bắt đầu tóm tắt toàn bộ câu chuyện: “Madrè là một người lùn. Một hôm, khi Madrè không sử dụng chiếc gậy. Vợ của ông và chàng nghệ sĩ leo dây đã cửa ngăn cây gậy batoong của Madrè đi một chút. Khi sử dụng chiếc gậy trở lại thì ông thấy chiếc gậy quá ngắn so với mình. Madrè nghĩ rằng ông cao thêm, điều này làm ông lên cơn đau tim. Và ông đã không kịp uống thuốc.

Như vậy nghe có được không, thưa thầy Mason?"

"Đúng là như thế! Lần này các em đã làm rất tốt! Có lẽ tuần tới tôi phải cho các em câu đố thật khó hơn chẳng?", Thầy Mason trả lời với nụ cười trên môi.

Và sau đây là một vài câu hỏi học búa dành cho các bạn.

* * *

(1) Hôm đó là thứ ba, Tom và Jerry đang cùng làm việc. Tối hôm Tom phải về thì Jerry lại không cho Tom về. TẠI SAO?

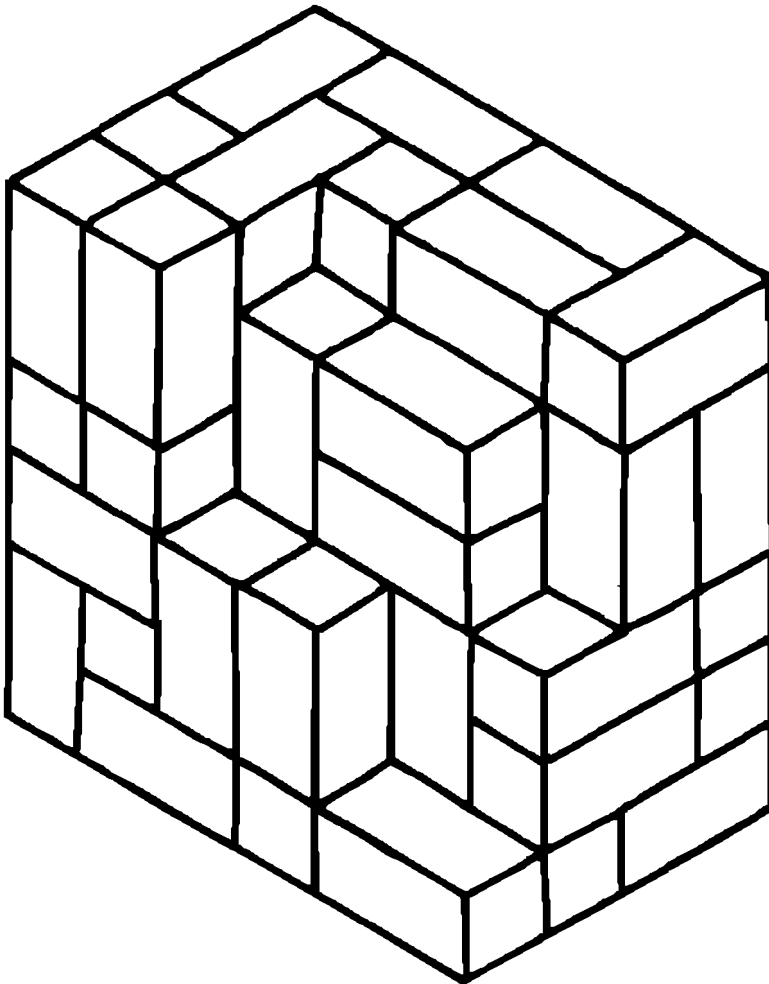
(2) Eric bước vào quán rượu và gọi chủ quán một cốc nước. Chủ quán nhìn Eric một lúc, rồi rút súng ra chĩa vào anh ta. Eric thoáng giật mình, nhưng rồi ngay sau đó nói cảm ơn và bước ra quán rượu mà không uống nước. SỰ VIỆC LÀ NHƯ THẾ NÀO?

(3) Khi Mary về nhà, cô đi vào phòng bếp. Bỗng cô hét lên khi thấy xác chồng mình trên sàn nhà. Dọc bên cạnh là nước chảy ra từ cái bát mà khi sáng cô để trên bàn, cái bát đựng nằm vỡ tan trên mặt đất. Cửa sổ phía trên ban ắp khép hờ. ĐIỀU GÌ ĐÃ XẢY RA?

CÙNG NHAU Suy LUẬN

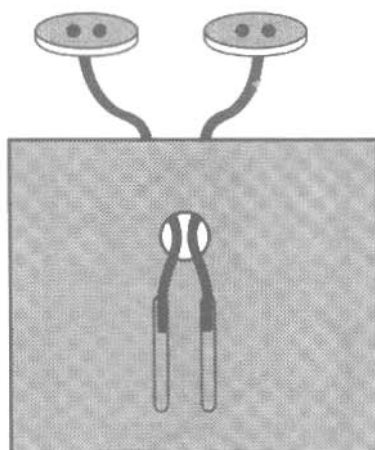
Nhìn vào hình vẽ này, chúng ta cảm thấy giống như lúc bước lên bậc thềm thật vậy. Bạn hãy tìm xem có bao nhiêu khối $2 \times 1 \times 1$ tạo nên cấu trúc này nhé!

**ẢNH ẢO GIÁC
KHỐI CHỮ NHẬT**



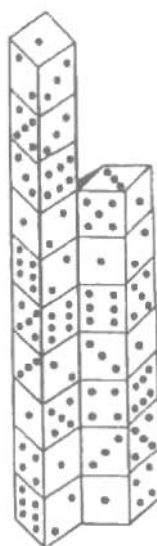
ĐIỀU KHÔNG THỂ LÀ CÓ THỂ

Làm sao có thể tháo sợi
dây có gắn hai cúc ra khỏi
lỗ của tờ giấy mà không
cần phải dỡ hai cúc ra khỏi dây hoặc cắt dây hay xé giấy?

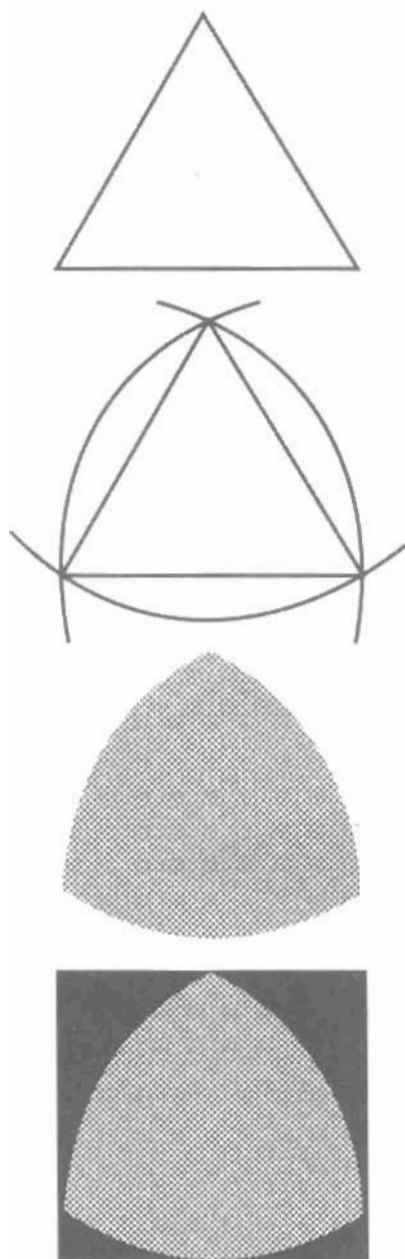


CHỒNG XÚC XẮC

Giả sử bạn đi xung quanh
chồng xúc xắc này và nhìn thấy
tất cả các mặt lộ ra bên ngoài của
chúng. Hãy tìm tổng số các chấm
trên tất cả các mặt xúc xắc mà
bạn không nhìn thấy.

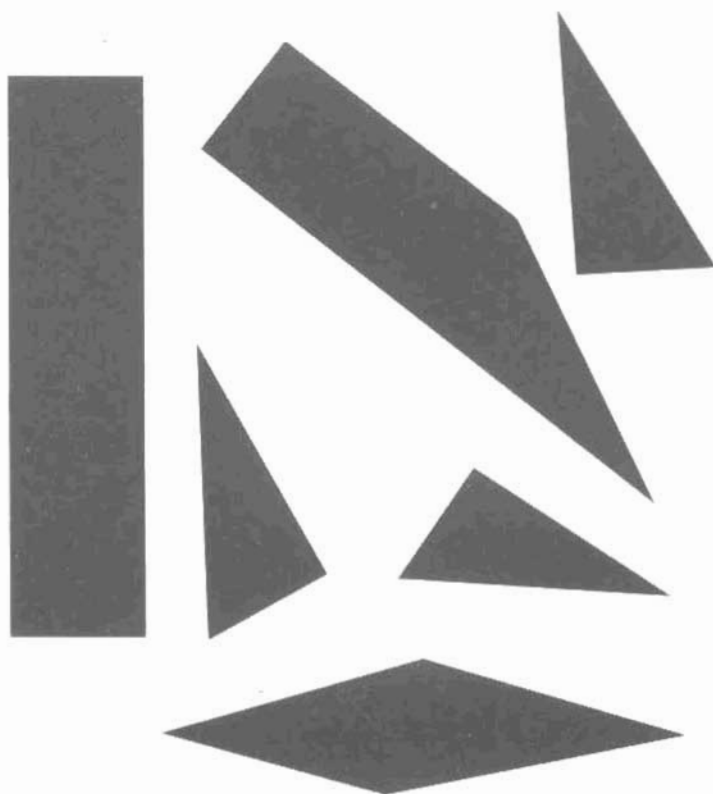


CÓ PHẢI MỌI BÁNH XE ĐỀU TRÒN?



Con lăn là một vật rất thú vị. Để làm con lăn, bạn có thể bắt đầu từ một tam giác đều. Từ mỗi đỉnh tam giác, dùng compa vẽ đường tròn có tâm là đỉnh, bán kính bằng độ dài của mỗi cạnh. Bạn hãy vẽ ba cung tròn, mỗi cung đi qua hai đỉnh của tam giác và đối diện với tâm đường tròn của cung đó. Nếu bạn làm con lăn bằng bìa các-tông, bạn có thể thử xem nó lăn như thế nào. Trên thực tế, nó sẽ lăn trơn tru như một hình tròn vậy. Tâm của con lăn là giao ba đường trung tuyến của tam giác đều. Bạn có thể xuyên cây hút chì qua đó và dùng bút chì như là trục lăn. Con lăn có thể nội tiếp trong một hình vuông, và khi đó, nó có thể xoay tròn trọn trong hình vuông này. Kết quả này được ứng dụng ở động cơ Wankel, trong đó pit-tông hình con lăn dạng này quay bên trong một hình vuông bao xung quanh. Kiểu pit-tông này được dùng trong động cơ ô tô Mazda.

XẾP HÌNH CHỮ CÁI



Bạn hãy cắt các hình phía trên ra, sắp xếp chúng thành một chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh. Một số hình có thể cần phải quay, lật hoặc di chuyển tịnh tiến. Chúc bạn thành công!

MỘT CÂU ĐỐ ĐÃ TRỞ THÀNH BƯỚC NGOẶT NHƯ THỂ NÀO?

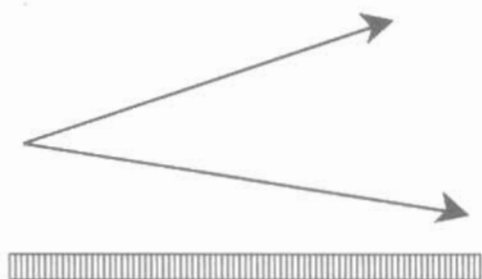
Simeon Poisson (1781 – 1842) gặp khó khăn trong việc tìm một công việc phù hợp với mình. Gia đình thúc giục ông theo ngành y hoặc luật, nhưng dường như ông không thích hoặc không đủ tài để theo các nghề đó. Và rồi một câu đố đã tình cờ đưa Poisson vào đúng quỹ đạo của mình. Mọi chuyện bắt đầu từ một lần ông đi du lịch, ai đó đã ra cho ông một câu đố (tương tự như bên dưới) và ông đã giải câu đố đó một cách dễ dàng. Nhận ra mình có năng khiếu và yêu thích toán học, ông hiểu rằng mình muốn làm việc với những thứ có liên quan đến toán. Ông trở nên nổi tiếng với những công trình về cơ học thiên thể, điện và từ trường, những khám phá về ứng dụng của tích phân và chuỗi Fourier. Ngoài ra, ông còn nghiên cứu lý thuyết xác suất và nghĩ ra phân bố Poisson.



Người bán sữa có 2 thùng sữa, mỗi thùng 10 gallon (1 gallon = 3,78 lít). Hai khách hàng mỗi người muốn mua hai gallon sữa. Một người có bình 5 gallon và người kia có bình 4 gallon. Hỏi người bán sữa phải đổ thế nào để có thể bán sữa cho hai khách hàng? Loại bài toán kiểu như này là do Sam Loyd nghĩ ra.

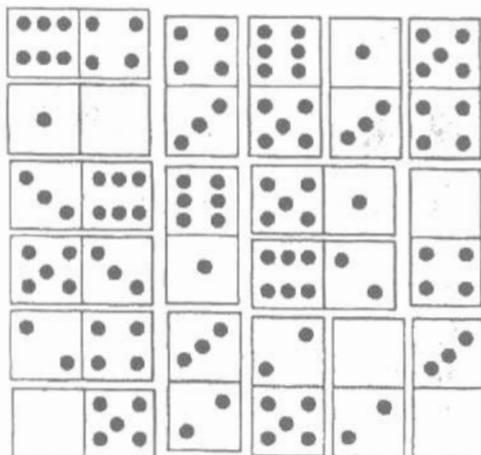
CÓ THỂ ĐƯỢC KHÔNG?

Chỉ dùng một thước kẻ chia độ, bạn có thể chia đôi góc đã cho thành hai góc bằng nhau không? Hãy chứng minh lí do có thể làm được như thế.



BẠN CÓ THỂ TẠO ĐƯỢC HÌNH VUÔNG LA-TINH KHÔNG?

Nếu không có số nào lặp lại trên mỗi hàng và mỗi cột của một hình vuông xếp bởi 18 quân cờ domino, thì hình vuông đó được gọi là hình vuông la-tinh. Hình vuông bên cạnh không phải là hình vuông la-tinh, bởi các số lặp lại trên một số hàng và cột. Ví dụ: hàng trên cùng có hai số 6 và hai số 4, cột bên phải ngoài cùng có hai ô trống. Bằng cách sắp xếp lại hình vuông này, bạn hãy tạo ra một hình vuông la-tinh.



TRÒ CHƠI CỦA CÁC NHÀ TOÁN HỌC

TRÒ CHƠI CHAOS⁽¹⁾

1) Chấm ba điểm trên tờ giấy như hình vẽ: (1;2) ; (5;6) ; (3;4).

2) Chọn một trong ba điểm làm điểm khởi đầu. Tung xúc xắc.

3) Luật chơi: chọn điểm nằm giữa điểm khởi đầu và điểm có số cùng với số trên viên xúc xắc vừa tung. Nối nó với điểm khởi đầu.

4) Lập lại bước 3 mãi mãi (sau mỗi bước, lấy điểm mới nhận được làm điểm khởi đầu).

●
(1;2)

●
(5;6)

●
(3;4)

Đây không phải lần đầu tiên sự ngẫu nhiên hóa ra lại tuân theo một qui luật nào đó. Count Buffon, nhà tự nhiên học người Pháp thế kỷ XVIII, đã nghĩ ra bài toán *chiếc kim*² và liên hệ của số π với kết quả của bài toán đó. Tương tự như vậy, năm 1904, R. Chartres tìm ra rằng xác suất để hai số (được chọn ngẫu

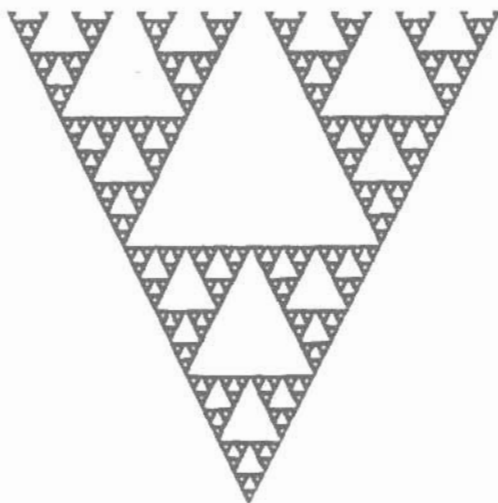
(1). Trong tiếng Anh, "Chaos" có nghĩa là hỗn loạn.

(2). Bài toán như sau: Giả sử chúng ta có một sân nhà được lát bằng những thanh gỗ song song liên tiếp nhau theo chiều dọc, kích thước mỗi thanh là như nhau. Nếu chúng ta làm rơi một chiếc kim, thì xác suất chiếc kim cắt cạnh tiếp xúc của hai thanh gỗ là bao nhiêu?

nhiên) nguyên tố cùng nhau là $6\pi^2$. Còn Michael Barnsley thì nghĩ đến việc sử dụng ngẫu nhiên như là cơ sở để mô hình hóa các hình dáng trong tự nhiên. Từ đó, ông phát minh ra trò chơi *Chaos*. Có rất nhiều cách để chơi trò này. Một đồng xu hay con xúc xắc đều có thể dùng để tạo ra tính ngẫu nhiên. Luật chơi cũng rất linh động. Phiên bản trò chơi trình bày ở phía trên sử dụng ba điểm cố định, một điểm ngẫu nhiên và một con xúc xắc. Hình vẽ thu được quả rất lạ thường. Một quá trình là ngẫu nhiên, nhưng lại cho ta một quy luật!

Một biến thể khác của trò chơi là chọn ngẫu nhiên vị trí của một điểm. Bạn hãy tạo ra cách chơi trong trường hợp đồng xu là ngửa (ví dụ di chuyển hai đơn vị chiều dài về phía phải và một đơn vị lên phía trên) và trong trường hợp đồng xu là sấp. Hãy thử tung đồng xu và xem xem điều gì sẽ xảy ra nhé!

Ngoài việc khám phá ra rằng giới hạn của một quá trình ngẫu nhiên (tuân theo một số quy luật nào đó) sẽ cho ra fractal, Barnsley cũng tìm ra một phương pháp ngẫu nhiên để tạo dựng lại một hình cho trước.



TRÒ CHƠI CỔ RITHMOMACHIA

Rithmomachia là một trò chơi rất toán học. Ở các cấp độ cao, bạn cần phải có hiểu biết tốt về lý thuyết số và một chiến lược hiệu quả mới có thể chơi được. Rithmomachia ra đời từ thế kỷ XI s.C.N, có lẽ bắt nguồn từ thời Đế chế La Mã phương Đông hoặc Alexandria. Đó là thời trung cổ, và chính tinh trí tuệ của Rithmomachia đã làm cho nó trở thành trò chơi được lựa chọn nhiều nhất. Rithmomachia được đánh giá cao hơn cả cờ Vua.

Chuẩn bị trò chơi

Khu vực chơi là một bàn hình chữ nhật bao gồm 8×16 hình vuông. Các thẻ dùng đến trong trò chơi có dạng hình tròn, hình vuông, tam giác và kim tự tháp (trong hình minh họa thẻ kim tự tháp là thẻ hình thoi). Một người chơi dùng thẻ màu trắng, gọi là thẻ chẵn; người còn lại dùng thẻ đen, gọi là thẻ lẻ. Mỗi người có 8 thẻ tròn, 8 thẻ tam giác, 7 thẻ vuông và 1 thẻ kim tự tháp. Thẻ kim tự tháp trắng có 6 mặt, các số trên 6 mặt này có tổng là 91, bao gồm 2 mặt tam giác (một có số 4 và một có số 1), hai mặt tròn (với số 36 và 25) và hai mặt vuông (số 16 và 9). Thẻ kim tự tháp đen có 5 mặt, tổng các số ở các mặt là 190, gồm hai mặt tam giác (với số 36 và 25), hai mặt vuông (với số 64 và 49) và một mặt tròn (số 16). Hình dạng của thẻ chỉ số lượng ô mà thẻ đó được phép di chuyển. Ví dụ: thẻ vuông đi được 4 ô trống liên tiếp theo bất kỳ hướng nào, thẻ tam giác đi được 3 ô, thẻ tròn đi được 1 ô, còn thẻ kim tự tháp có thể di chuyển như là một thẻ tròn, thẻ tam giác hay thẻ vuông tùy theo mặt đang dùng của nó. Khi bắt đầu trò chơi, các thẻ được đặt như trong hình minh họa.

Mục tiêu của trò chơi

Mục tiêu của trò chơi này là ăn các thẻ của đối thủ và tạo ra những tổ hợp số nào đó để giành *chiến thắng*.

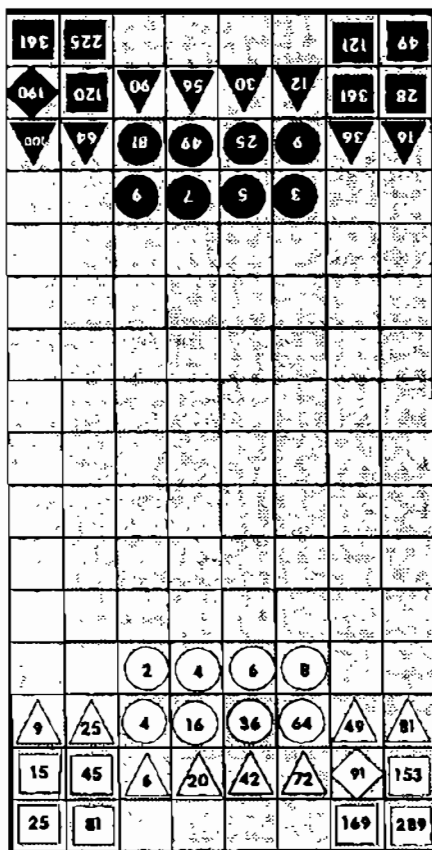
Làm cách nào để ăn thẻ của đối phương?

Các thẻ bị ăn bởi các nước đi tiềm năng hoặc những nước đi thực sự. Có những cách ăn như sau:

1) *Vây hãm*: nếu thẻ của đối phương bị bao quanh bởi thẻ của bạn ở cả bốn phía, thì bạn có quyền ăn thẻ này của đối phương. Nó sẽ bị loại ra khỏi bàn trò chơi.

2) *Trùng nhau*: nếu bạn di chuyển thẻ của mình (theo đúng luật số ô di chuyển tương ứng với hình dạng của thẻ) và đặt nó vào ô đã có thẻ của đối phương, thì bạn được ăn thẻ này mà không cần thực hiện việc di chuyển thẻ. Ví dụ, nếu thẻ tam giác đen số 36 di chuyển 3 ô vào ô có thẻ tròn trắng số 36, thì thẻ tròn trắng số 36 bị ăn mà không cần phải di chuyển thẻ tam giác đen số 36 lên trùng thẻ trắng.

3) *Tấn công*: nếu số trên thẻ nhân với số lượng ô mà nó cần di chuyển để có thể nằm sát ngay cạnh thẻ của đối phương bằng với số trên thẻ này của đối phương thì bạn ăn nó mà không cần phải di chuyển thẻ của mình. Ví dụ, thẻ tròn trắng số 4 sẽ loại bỏ thẻ vuông đen số 28 nếu có 7 ô nằm giữa chúng.



4) *Mai phục*: Nếu hai thẻ của bạn có thể di chuyển về hai phía một thẻ của đối phương và tổng hai số trên hai thẻ của bạn bằng số trên thẻ đối phương, thì bạn ăn thẻ này. Ví dụ: nếu thẻ tam giác đen số 12 bị phân ra bởi hai thẻ tròn trắng số 4 và số 8 thì thẻ tam giác đen số 12 bị ăn mà không thẻ nào cần di chuyển cả.

Rất khó để có thể ăn được thẻ kim tự tháp. Bạn phải sử dụng số 91 hoặc 190 để tránh bị ăn, trừ phi thẻ kim tự tháp bị vây hãm hoặc mặt vuông (số 16 hoặc số 64) bị ăn khi nó đang là mặt được dùng. Nếu một trong số các mặt thẻ kim tự tháp của bạn bị đe dọa bởi một trong số các cách ăn, bạn có thể chuộc nó bằng các thẻ của đối phương có tổng giá trị bằng (hoặc chấp nhận được) với mặt bị đe dọa.

Những người chơi tự thỏa thuận với nhau trước khi chơi về cách xác định chiến thắng hoặc khi nào thì kết thúc trò chơi. Dưới đây là một số cách có thể dùng để kết thúc trò chơi. Một số thì rất đơn giản, trong khi số khác lại khá phức tạp và rắc rối.

Các cách kết thúc trò chơi, tức là giành chiến thắng:

1) *De corpore*: Hai người chơi thống nhất với nhau chiến thắng dựa trên số lượng thẻ ăn được.

2) *De bonis*: Hai người chơi thỏa thuận với nhau về một số đích. Nếu tổng các số trên thẻ ăn được của một người chơi lớn hơn hoặc bằng số đích, thì người chơi này thắng.

3) *De liter*: Đây là cách thắng dựa vào cả tổng số trên thẻ và số lượng các chữ số của chúng. Ví dụ: số đích là 160 với số lượng chữ số của các số trên thẻ ăn được phải là 6. Như vậy, một người chơi với các thẻ ăn được là 121, 9, 30 sẽ thắng, trong khi người có 56, 64, 28 và 15 thì không (vì số các chữ số của chúng là 8).

4) *De honore*: Chiến thắng dựa vào số lượng các thẻ và giá trị của chúng. Ví dụ: hai người thống nhất nhau là nếu ăn được 5

thẻ có tổng giá trị các số là 160 thì sẽ thắng. Rõ ràng là những người chơi phải rất thông thạo với các số của họ và những tổng khác nhau của chúng.

5) *De honore luteae*: Cách này đòi hỏi ba điều kiện phải được thỏa mãn: một giá trị số xác định, một số lượng thẻ nhất định và số lượng các chữ số trên thẻ.

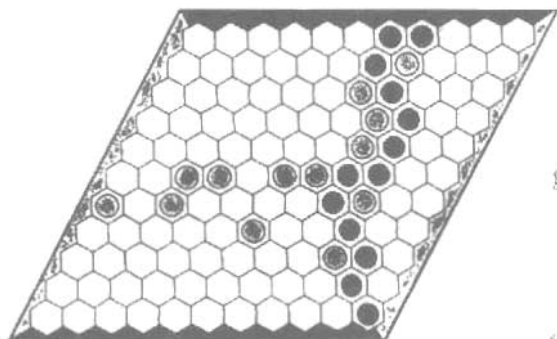
Những cách chiến thắng sau dành cho những người chơi chuyên nghiệp, chúng bao gồm cả số học, hình học và cấp số điều hòa. Các thẻ được sử dụng có thể là của cả hai người chơi, nhưng phải có một thẻ là của đối phương.

6) *Victoria Magna*: Sắp xếp ba thẻ ăn được thành một cấp số cộng, cấp số nhân, hoặc cấp số điều hòa, ví dụ như cấp số cộng 2, 5, 8; cấp số nhân 36, 48, 64; cấp số điều hòa - 6, 8, 12.

7) *Victoria Major*: Biểu diễn bốn thẻ sao cho có thể kết hợp chúng thành hai trong số ba loại cấp số. Ví dụ: các thẻ với số 2, 3, 4 và 8 tạo được cấp số cộng 2, 3, 4 và cấp số nhân 2, 4, 8. Chú ý rằng 2, 4 và 8 là các thẻ trắng, trong khi 3 là thẻ đen.

CỜ HEX

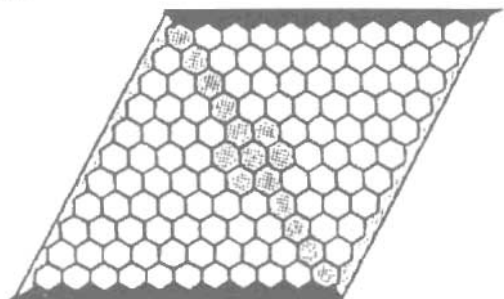
Piet Hein phát minh ra trò chơi cờ Hex năm 1942.



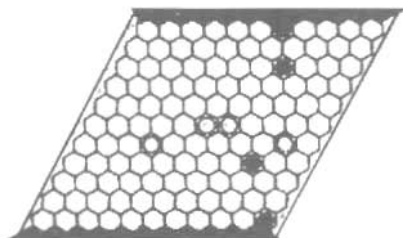
Trong trò chơi này, người chơi với quân cờ đen là người thắng, bởi người đó đã tạo được đường nối cho hai cạnh đối diện.

Sau nước đi đó, hai người chơi có thể đi trên những lục giác xám. Hai người sẽ lần lượt thay nhau chơi sau mỗi nước đi.

Bàn cờ Hex được tạo bởi các hình lục giác. Mỗi cạnh của bàn cờ có 11 hình lục giác đều. Như đã minh họa trên hình, ở nước đi đầu tiên người chơi không được đặt quân cờ của mình vào bất kì hình màu xám nào.



Sau nước đi đầu tiên, người chơi có thể đi trên những hình lục giác màu xám.



Bàn cờ này minh họa một vài nước đi đầu tiên.

Mục tiêu của trò chơi: mỗi người luân phiên nhau chơi, mục đích cuối cùng là tạo được một đường nối đến cạnh đối diện. Người đầu tiên tạo được đường nối đó là người thắng cuộc!

MỘT VÀI TRÒ GIẢI TRÍ TOÁN HỌC

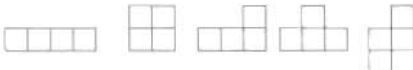
CHƠI VỚI ĐA LỤC GIÁC

Polyomino là hình được tạo thành khi nối các hình vuông lại với nhau:

Monomino 

Domino 

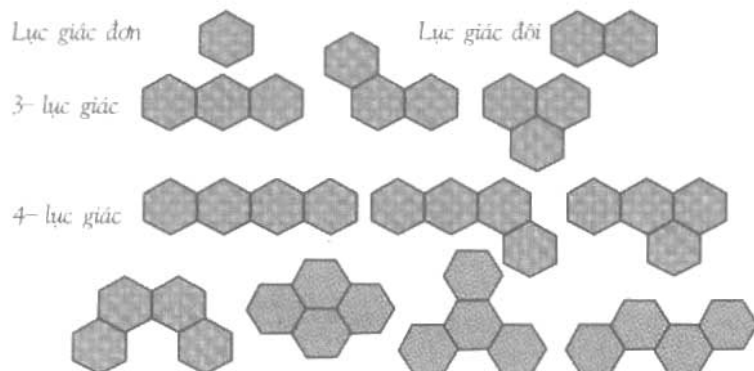
Tromino 

Tetromino 

Pentomino, ...

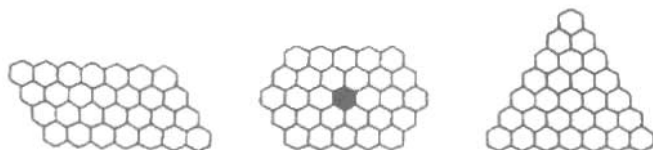
Đa lục giác là một nhóm các hình giải trí khác, chúng được tạo bởi các lục giác đều nối với nhau.

Dưới đây là một số hình cho đến 4-lục giác (tetrahex):



Hình nào trong số ba hình dưới đây được ghép từ các hình thuộc một trong số bảy loại 4-lục giác ở trên?

Chúc các bạn chơi vui vẻ với những trò giải trí này!



Biến đổi four thành five

four
foul
fool
foot
fort
fore
fire
five

**LEWIS CARROLL
ĐÃ BIẾN "FOUR"
THÀNH "FIVE"**

Nhà toán học Charles L. Dodgson, thường được biết đến dưới cái tên Lewis Carroll, là người đã nghĩ ra trò chơi *Doubles*. Tạp chí Anh *Vanity Fair* đã mở một cuộc thi vào năm 1879 nhằm đề cao trò chơi này của Carroll. Trò chơi bắt đầu với hai từ có cùng số lượng chữ cái. Mục đích của trò chơi là biến một từ thành từ còn lại bằng cách tạo một dãy từ liên tiếp có cùng số lượng chữ cái. Bạn chỉ có thể thay đổi một chữ cái mỗi lần và phải làm sao để số lần biến đổi là ít nhất. Bạn hãy biến đổi một số từ sau đây:

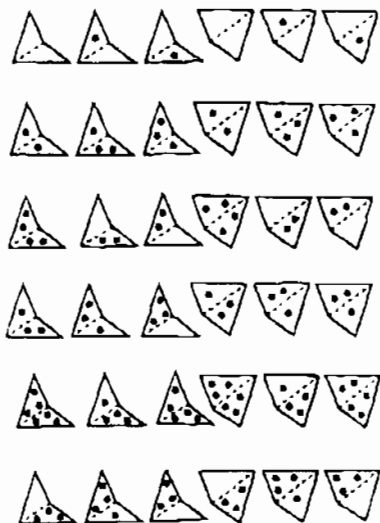
Hãy che EYE (MẮT) bằng LID (MI MẮT)

**Hãy chứng minh PITY (ĐÁNG TIẾC)
cũng GOOD (TỐT)**

Hãy lấy WOOD (GỖ) từ TREE (CÂY)

**Hãy biến OAT (YẾN MẠCH) thành RYE
(LÚA MẠCH ĐEN)**

XẾP CÁC HÌNH PENROSE

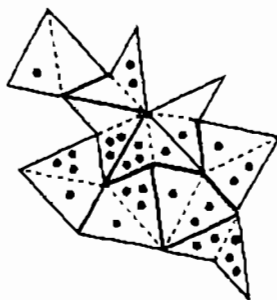
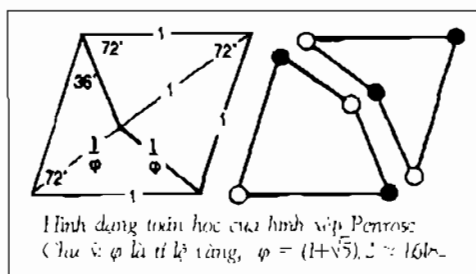


Miếng ghép hình chiếc điều và phi tiêu được nhà vật lý, nhà toán học người Anh Roger Penrose khám phá vào năm 1974. Hai hình này có thể lát kín mặt phẳng theo một cách đặc biệt. Điều kì lạ là chúng tạo ra vô số cách xếp không tuần hoàn (không có mẫu xếp cơ bản nào lặp lại ở bất kỳ chỗ nào trong thiết kế) trên mặt phẳng. Chơi trò đồ-mi-ò với chúng sẽ là một thử thách khó khăn nhưng lại tạo ra một số mẫu thiết kế rất thú vị.

Lát các miếng ghép theo cách sau đây:

Mỗi hình được chia bởi một đường thẳng thành hai tam giác nhỏ, mỗi tam giác có thể chứa một, hai hay ba chấm hoặc không có chấm nào cả.

Bây giờ, bạn hãy thử lát mặt phẳng bằng các miếng ghép này nhé. Hãy thử tăng thêm số lượng các chấm và xem việc lát mặt phẳng sẽ thay đổi thế nào.



CÙNG LÀM HEXATETRAFLEXAGON

Flexagon là một trò giải trí toán học tuyệt vời mà mọi người ở mọi lứa tuổi đều có thể chơi được. Những người say mê trò này có thể nghiên cứu các tính chất toán học của flexagon. Sau đây là cách làm một hexatetraflexagon⁽¹⁾ - hình có 6 mặt và 4 cạnh.

1	2	3	3
1			4
4			1
3	3	2	1

Mặt trước

2	5	6	4
6			5
5			6
4	6	5	2

Mặt sau

5	3	3
	9	
5	2	2
		6

Bước (1)

9	7
9	
5	5
	4

Bước (2)

Bước (1): Bắt đầu với mặt trước, gập các cặp ô số 3 liên kề chồng lên nhau. Làm tương tự với các cặp số 1 liên kề, hình thu được trong hình vẽ.

Bước (2): Gập các cặp ô số 2 liên kề chồng lên nhau. Hình như ở bước 2 sẽ xuất hiện trên một mặt giấy.

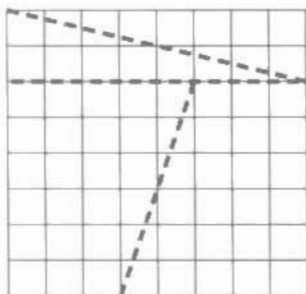
Bước (3): Gập sao cho hai ô số 4 chồng lên nhau, kết quả bạn sẽ có một mặt với ba ô số 6 và một ô số 4. mặt còn lại với ba ô số 5 và một ô số 4. Đỉnh mép ngoài các cạnh của hai ô số 5 và 6 lại với nhau. Sau đó, kéo hai phần giấy chứa ô với 2 cạnh chưa dính nhau chồng ngược lại lên nhau. Hãy xem bạn đã nhận được một mặt với tất cả bốn số 6 chưa nhé.

6	6
6	6

(1). Flexagon là một hình phẳng tạo bởi mảnh giấy mà có thể gập hay làm cong để làm hiện ra các số ở những mặt ẩn. Flexagon thường là hình vuông, hình chữ nhật (tetraflexagon) hoặc là hình lục giác (hexaflexagon).

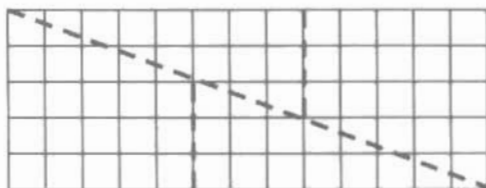
PHÂN TÍCH HÌNH HỌC VÀ TRÒ CHƠI XẾP HÌNH TAM GIÁC CURRY

khoa câu đố) của tác giả Sam Loyd đã tạo ra một loại tình huống nghịch lí như sau:



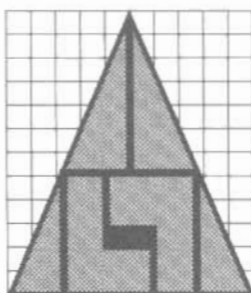
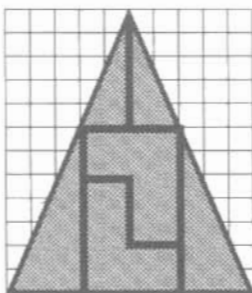
Diện tích = $8 \times 8 = 64$
đơn vị diện tích

hình giống như hình đã cho ban đầu, nhưng kết quả sau khi ghép các mảnh lại là hình với một lỗ hổng bên trong. Hình bên minh họa cho trường hợp hình tam giác.



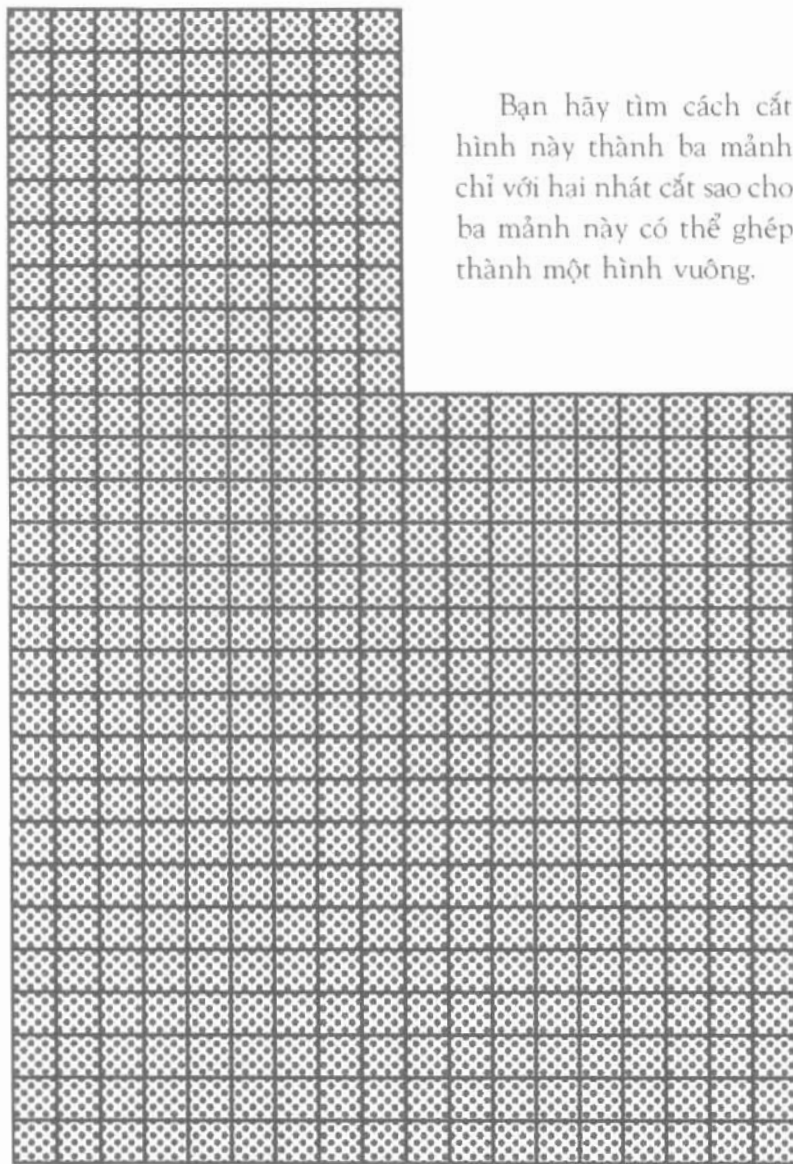
Diện tích = $13 \times 5 = 65$ đơn vị diện tích

Paul Curry đã xem xét nghịch lí này. Ông cắt và sắp xếp lại các mảnh của một



Diện tích của tam giác ban đầu là 60 đơn vị diện tích. Diện tích của tam giác xếp lại là 58 đơn vị diện tích. Tổng diện tích của các mảnh là 59 đơn vị diện tích. Như vậy, lỗ hổng có diện tích là 1 đơn vị.

Giả sử một mặt của tam giác được tô đậm, còn mặt kia thì không. Cắt tam giác ra thành các phần như hình vẽ. Lật chúng lại và xếp lại các phần tô đậm. Tam giác nhận được có cùng kích thước với tam giác đầu, nhưng lại có một lỗ hổng ở giữa. Vì sao vậy?

**BIẾN ĐỔI
HÌNH VUÔNG**

Bạn hãy tìm cách cắt hình này thành ba mảnh chỉ với hai nhát cắt sao cho ba mảnh này có thể ghép thành một hình vuông.

MA PHƯƠNG VÀ NHỮNG TRÒ GIẢI TRÍ KHÁC

CHƠI VỚI MA PHƯƠNG

Tôi không ép
bạn gì cả, nhưng
bạn sẽ sẵn sàng cho

hình vuông 16 ô là điều thần kì nhất trong số bất cứ ma
phương nào đã từng được tạo ra bởi bất cứ nhà ảo thuật nào.

—*Benjamin Franklin*

Hãy hình dung sự sắp xếp các số vào trong một hình vuông với những tính chất đặc biệt hấp dẫn. Với nhiều người thời xưa, những hình vuông số này có vẻ như sở hữu một sức mạnh, một đặc điểm thần bí. Những ghi chép đầu tiên về ma phương xuất hiện ở Trung Quốc vào khoảng năm 2200 tr.C.N khi một

124	19	94	120	15	90	8	1	6
49	79	109	45	75	105	3	5	7
64	139	34	60	135	30	4	9	2

ma phương số 3 x 3 có tên là *lạc thư*, được Vũ Đế nhìn thấy trên lưng một con thần quy dọc bờ sông Hoàng Hà. Thế kỉ thứ IX tr.C.N ở Ai Cập, các vết mực đã được phết lên khay bạc có chạm hình một ma phương, những hình này được dùng để xem tử vi giống như cách các nhà tiên tri soi lá chè. Thế kỉ VIII tr.C.N, một số nhà giả kim thuật tin rằng các ma phương nắm giữ chìa khóa cho việc biến kim loại thành vàng. Trong khi đó, ma phương của đạo Hồi lại mang ý nghĩa đặc biệt khi các số mẫu tự trên đó được dùng như là các chữ. Người Ả-rập thì

lùng những cách sắp xếp khác nhau của ma phương 3×3 để hiểu thị lửa, nước, đất và không khí. Hơn nữa, mỗi hành tinh đều có một ma phương tương ứng với nó và chúng còn được ứng dụng trong nghiên cứu của họ về thiên văn. Những hình vuông “huyền bí” này được sử dụng theo rất nhiều cách khác nhau: đặt ma phương lên trên dạ con của người phụ nữ đang đẻ, thêu chúng lên quần áo của người lính, treo chúng lên mặt tiền của ngôi nhà với tác dụng bảo vệ, đeo các bùa ma phương để gặp nhiều may mắn hay để chữa bệnh.

Ma phương mà chúng tôi minh họa ở trang trước đã được biến đổi thành một ma phương với năm 1994 trên đó, bằng cách bắt đầu từ ma phương 3×3 , nhân mỗi số của nó với 15. Cuối cùng, cộng 4 vào mỗi số trong hình vuông nhận được.

Trải qua nhiều thế kỷ, các tính chất và phương pháp xây dựng ma phương đã được khám phá và phát triển.

Dưới đây là một vài tính chất của các ma phương.

1) Mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo chính đều có tổng các số bằng nhau, tổng này được gọi là số kì ảo. Mỗi ma phương đều có một số kì ảo, có thể tìm nó bằng các cách sau:

a) *Bậc của ma phương là số lượng hàng (hay cột) của nó. Ma phương gồm các số tự nhiên $1, 2, 3, \dots, n^2$ có số kì ảo là $(1/2)n(n^2 + 1)$, trong đó n là bậc của ma phương. Tổng quát hơn, nếu i là số khởi đầu và B là giá số, thì số kì ảo $= i \cdot n + B(n/2)(n^2 - 1)$.*

b) *Lấy một ma phương bất kì. Bắt đầu từ góc bên trái đặt các số của ma phương từ nhỏ tới lớn tiếp trên mỗi dãy. Tổng của các số trên mỗi đường chéo chính là số kì ảo của ma phương.*

2) Bất kì hai số nào trong một hàng, cột hay đường chéo cách đều với tâm ma phương đều bù nhau tức là tổng của chúng bằng với tổng của số lớn nhất và số nhỏ nhất trong ma phương.

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

Đây là siêu ma phương "già" 16 x 16 của Benjamin Franklin. Nó có tất cả các tính chất của ma phương thông thường, ngoại trừ một điểm: tổng các số trên đường chéo chính không bằng số kì ảo của nó là 2056. Nhưng như trên hình vẽ đã minh họa, số kì ảo của nó xuất hiện bất ngờ theo rất nhiều cách như đường chéo gẫy 8 ô, hàng lệch 8 ô, bất kì hình vuông 4 x 4 nào, và có lẽ bạn còn có thể tìm thêm nữa. Trong tập chú của Viện Franklin năm 1952, Albert Chandler đã cho rằng ma phương này không phải là ma phương nguyên bản của Franklin mà một con số trong hình vẽ ông đã bị in sai.

3) Có rất nhiều cách để tạo một ma phương mới từ ma phương có sẵn:

a) Cộng hoặc nhân mọi số trong ma phương với cùng một số nào đó. Hình vuông mới nhận được cũng sẽ là ma phương.

b) Nếu hai hàng hoặc hai cột cách đều nhau so với tâm đối chọi cho nhau, thì ta vẫn nhận được một ma phương.

c) Đổi chỗ các góc phần tư của ma phương bậc chẵn.

d) Đổi chỗ các góc phần tư của ma phương bậc lẻ.

Có rất nhiều phương pháp được sử dụng để xây dựng ma phương. Ví dụ:

1) **Với ma phương bậc lẻ:** a) phương pháp cầu thang (của De la Loubère); b) phương pháp hình chóp; c) phương pháp nước đi của con mã (trong cờ vua) dùng cho các ma phương bậc lẻ có kích thước lớn hơn 3×3 ; d) phương pháp Philip de la Hire năm 1705.

2) **Với ma phương bậc chẵn:** a) phương pháp thay thế đường chéo cho ma phương 4×4 ; b) phương pháp đường chéo 8×8 .

3) **Cho ma phương bậc bất kì:** những phương pháp loại này thực sự có tồn tại nhưng rất phức tạp và rắc rối. Một trong số đó là phương pháp sử dụng đường biên do B. Frénicle phát triển.

Nhìn lại lịch sử của ma phương, ta thấy không có gì ngạc nhiên khi những trang giấy viết về ma phương nhiều hơn so với bất kì trò giải trí toán học nào khác. Nhiều người đã ngồi hàng giờ, một số khác hàng ngày, hoặc có thể hàng tháng chỉ để phát triển các phương pháp tạo ra ma phương, khám phá tính chất của chúng, tìm ra những ý tưởng mới và giải trí với sự thần kì của chúng. Trong danh sách vô tận những khám phá về ma phương, chúng ta thấy có: siêu ma phương “giả” 16×16 của Benjamin Franklin – thấy phù thủy của các ma phương*, người có thể tạo ra ma phương 3×3 với một số khởi điểm bất kì nào đó gần như là ngay lập tức; những thiết kế lạ thường của đường ma thuật (đoạn thẳng nối các số liên tiếp của ma phương), loại đường vốn được dùng để phân loại ma phương thành đối xứng hay không đối xứng; vòng tròn, lập phương, lục giác, hình sao, mặt cầu ma thuật, bàn domino ma thuật, ma phương nguyên tố, ma phương đường chéo gãy... Danh sách này sẽ còn tiếp tục dài thêm nữa bởi ngày càng có nhiều người bị cuốn hút khi giải trí với các ma phương.

*Bất kì ai cũng có thể là một thầy phù thủy của ma phương. Bạn chỉ cần ghi nhớ ma phương 3×3 cơ bản. Hãy bảo ai đó viết một số bất kì vào một ô trong hình vuông 3×3 trống. Ví dụ: ở đây số 78 được đặt ở vị trí số 2 trong ma phương cơ bản. Lập tức bạn sẽ có được ma phương mới khi điền nốt vào những ô trống còn lại bằng cách dùng tính chất sau của ma phương: nếu cộng một số vào tất cả các số của ma phương ta sẽ thu được một ma phương mới. Trong trường hợp này, cần cộng 76 vào mỗi số trong ma phương 3×3 cơ bản.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

84	77	82
79	81	83
80	85	78

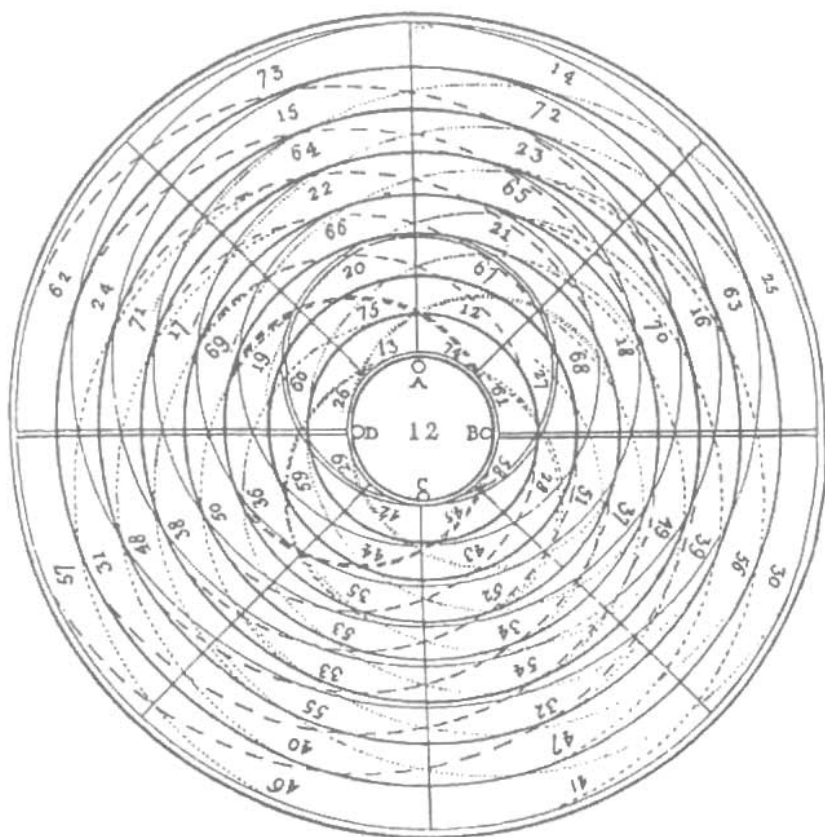
?	?	?
?	?	?
?	?	?

Vai trò của ma phương đã thay đổi đáng kể trong nhiều thế kỉ qua. Ngày nay, chúng được biết đến như là một hình thức giải trí toán học hấp dẫn và đầy thách thức.

VÒNG TRÒN MA THUẬT CỦA BENJAMIN FRANKLIN

Benjamin Franklin là một người say mê ma phương. Thực tế, khi ông còn là thư kí tại Hội đồng lập pháp

Pennsylvania, ông thường giải trí để thoát khỏi nỗi buồn chán của công việc bằng cách tạo ra ma phương. Trong vòng tròn ma thuật của ông, các số dọc theo bán kính của vòng tròn lớn nhất có tổng bằng nhau. Những số nằm giữa các vòng tròn cuộn lẫn nhau cũng vậy.



LEONHARD EULER VÀ NƯỚC ĐI QUÂN MÃ

Ma phương tuyệt vời này được Leonhard Euler tạo ra vào thế kỉ XVIII. Giống như trong hầu hết

các ma phương khác, các hàng, cột và đường chéo chính của nó có tổng các số bằng nhau - 260. Ngoài ra, nó có bốn hình vuông mà tổng các số trên mỗi hàng và cột của chúng bằng 130. Nhưng điểm hấp dẫn hơn cả là quân mã trong cờ vua có thể nhảy từ ô số 1 liên tiếp đến ô số 64 trên bàn cờ ma phương đặc biệt này.

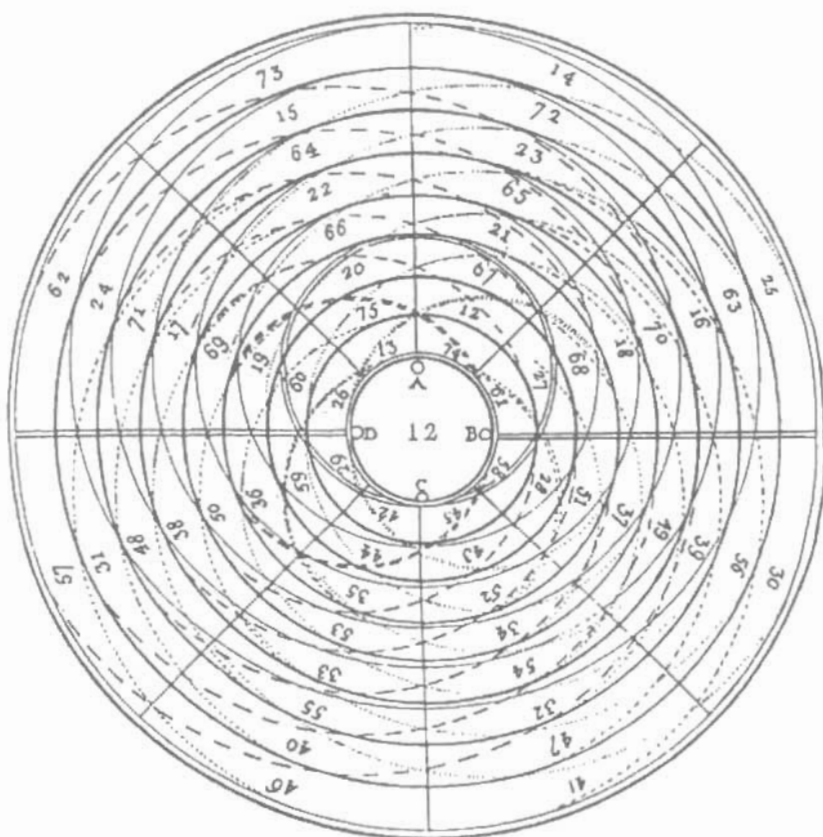


1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Benjamin Franklin là một người say mê ma phương. Thực tế, khi ông còn là thư kí tại Hội đồng lập pháp

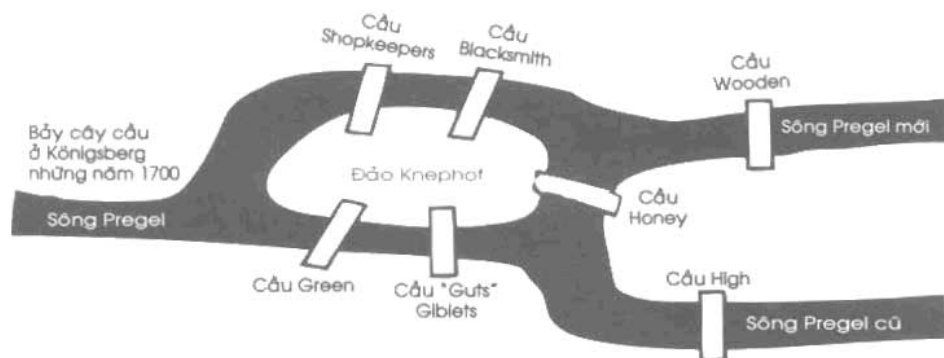
Pennsylvania, ông thường giải trí để thoát khỏi nỗi buồn chán của công việc bằng cách tạo ra ma phương. Trong vòng tròn ma thuật của ông, các số dọc theo bán kính của vòng tròn lớn nhất có tổng bằng nhau. Những số nằm giữa các vòng tròn cuộn lẫn nhau cũng vậy.

VÒNG TRÒN MA THUẬT CỦA BENJAMIN FRANKLIN



BÀI TOÁN BẢY CÂY CẦU CẦU KÖNIGSBERG HIỆN ĐẠI

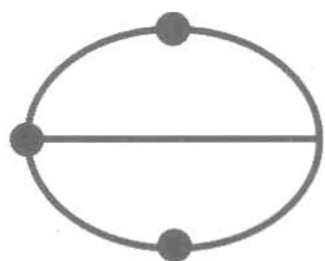
Thành phố Königsberg được giáo binh đoàn Giéc-manh thành lập vào năm 1308, là căn cứ phía đông của Đức trong hơn 400 năm. Sau Chiến tranh thế giới thứ hai, nó được gọi là Kaliningrad, và trở thành căn cứ hải quân lớn nhất của USSR. Ngày nay, Königsberg nằm giữa Lithuania và Ba Lan. Bài toán Bảy cây cầu Königsberg sẽ như thế nào trong thời đại này? Liệu người dân nơi đây có còn ý định đi tìm một con đường không thể có hay không? Đầu tiên, chúng ta hãy cùng nhắc lại bài toán Bảy cây cầu Königsberg năm xưa.



Nhiều thế kỷ trôi qua, bài toán Bảy cây cầu Königsberg đã đem lại sự phong phú cho toán học. Bài toán ra đời vào những năm 1700. Địa điểm là thành phố Königsberg, nằm dọc theo con sông Pregel. Hai đảo trên dòng sông là một phần của thành phố, chúng nối với thành phố bởi bảy cây cầu. Với những người dân Königsberg có một thói quen tao nhã đã hình thành ở họ. Vào ngày chủ nhật họ thường đi dạo theo bờ sông và hai đảo để tìm ra con đường đi qua tất cả các cầu mà không đi lại bất kì cầu nào. Mặc dù hầu hết người dân ở đây đều coi nó là một thú tiêu khiển thú vị, nhưng một nhà toán học đã phát hiện, và sau đó phát triển một biến thể khác cho trò giải

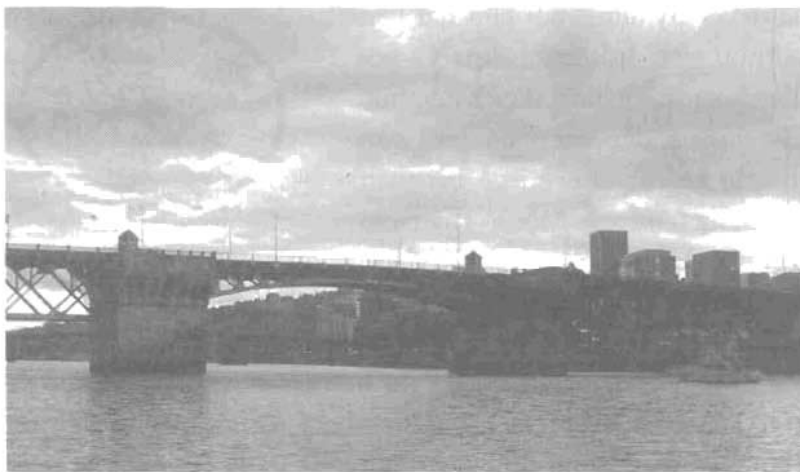
trị này. Nhà toán học người Thụy Sĩ Leonhard Euler (1707 – 1783) biết đến bài toán Bảy cây cầu Königsberg trong thời gian ông sống tại St. Petersburg để làm việc cho Nữ hoàng Nga Catherine I.

Năm 1735, Euler đã trình một bài báo lên Viện Hàn lâm Nga, trong đó có những kết quả tiến xa hơn và có tác dụng lớn lao đến toán học hơn bài toán nguyên thủy ban đầu. Những ý tưởng ông đưa ra trong đó chính là bước khởi đầu cho lĩnh vực tô pô sau này. Không giống như hình học Euclid, tô pô là lĩnh vực hình học chuyên nghiên cứu các tính chất không thay đổi của vật thể khi kích thước và hình dáng của nó thay đổi. Ví dụ: nếu một tam giác bị kéo ra thành hình vuông hay hình tròn, thì tô pô sẽ tìm hiểu những tính chất nào của nó là không thay đổi. Với bài toán bảy cây cầu Königsberg, Euler đã biến đổi và đơn giản hóa một tập hợp vật chất thành mô hình toán học (gọi là đồ thị) để chứa đựng hết bản chất nhưng lại làm bài toán đơn giản hơn. Với mỗi phần của thành phố mà các cây cầu bắc sang, ông kí hiệu nó bằng một điểm gọi là *đỉnh*, rồi biểu diễn mỗi cây cầu bằng một cung tròn. Ông kết luận



rằng bài toán đi qua cả bảy cầu mà không đi lại bất kì cầu nào tương đương với bài toán vẽ *hết đồ thị bằng một cây bút mà không cần nhấc bút lên*. Euler đánh dấu mỗi đỉnh bằng một số chẵn hoặc một số lẻ. Đỉnh chẵn là đỉnh có số đường đi đến

và ra khỏi nó bằng nhau hoặc nếu nó vừa là điểm đầu vừa là điểm cuối của hành trình. Đỉnh lẻ, ngược lại, hoặc chỉ là điểm đầu hoặc chỉ là điểm cuối của hành trình. Vì vậy, bất kì đồ thị nào *có thể vẽ được* (tức là không vẽ lại cung nào) chỉ có thể có nhiều nhất 2 đỉnh lẻ, tức là 0 các đỉnh lẻ nếu



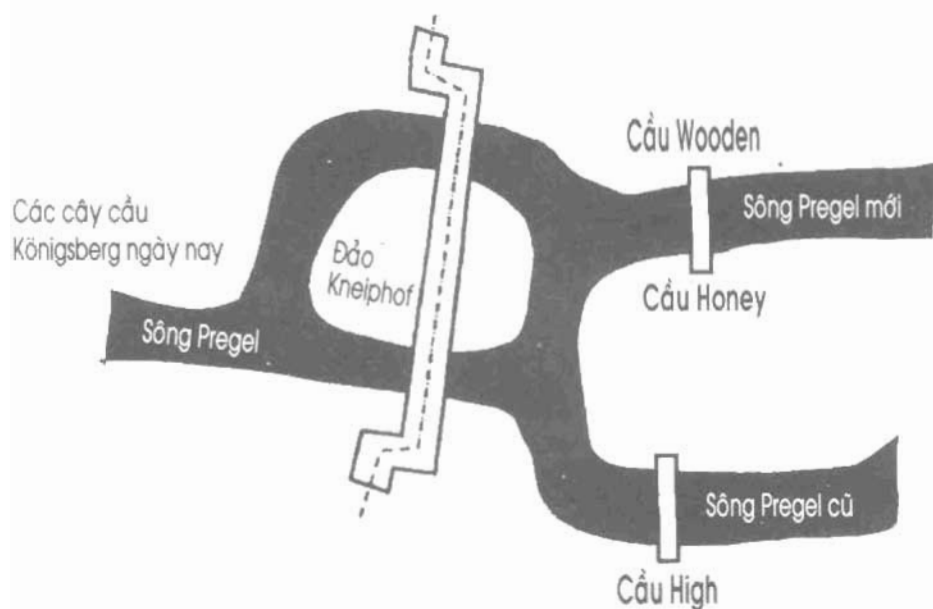
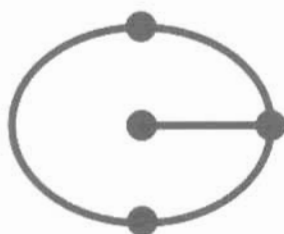
Một trong số ba cây cầu còn lại của Königsberg

tất cả chúng đều chẵn, **hoặc** 2 đỉnh lẻ nếu một điểm là điểm đầu, một điểm là điểm cuối. Ngoài ra, ông hình dung ra được rằng nếu đồ thị có một số chẵn các đỉnh lẻ, ví dụ 10, thì để có thể vẽ hết toàn bộ đồ thị, ta sẽ phải nhấc bút chì lên một số lần bằng một nửa của nó, tức là 5 lần. Trong bài viết của mình, Euler chỉ ra bài toán bảy cây cầu Königsberg trông có vẻ như là có bản chất hình học, nhưng hình học Euclid dường như không ứng dụng được vào đây bởi vì bài toán cây cầu không liên quan đến “độ lớn” nên nó không thể giải quyết được nếu dùng “các tính toán định lượng”. Thay vào đó, bài toán thuộc về *hình học về vị trí*, giống như cách miêu tả tô pô lúc ban đầu của Gottfried Wilhelm von Leibniz. Như vậy, lời giải của Euler cho bài toán bảy cây cầu Königsberg đóng vai trò như một chất xúc tác và là lời giới thiệu cho lĩnh vực tô pô.

Như bạn đã thấy trong hình minh họa, mỗi một trong số bảy cây cầu đều có tên gọi riêng, có lẽ liên quan đến những gì trên bờ của nó. Ngày nay chỉ ba trong số bảy cây cầu này là còn tồn tại – cầu Honey, cầu High và cầu Wooden. Một cây cầu mới

đã được xây dựng, nối liền hai bên bờ như trên ảnh minh họa và nối liền hoàn toàn hòn đảo Kneiphof. Các hướng dẫn viên du lịch vẫn thường kể câu chuyện về bài toán nổi tiếng năm xưa. Một số thậm chí còn nói rằng nó vẫn chưa giải được.

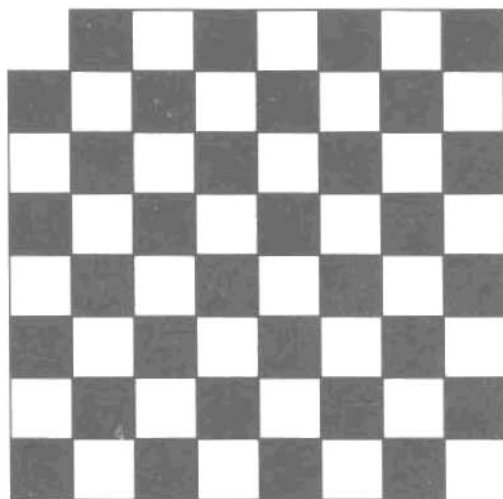
Nếu đồ thị của những cây cầu Königsberg giờ mới được vẽ ra, bài toán sẽ mất đi tính hấp dẫn của nó. Giả sử cây cầu mới chỉ bắc sang hòn đảo thôi thì đồ thị mới có lẽ sẽ có gì đó thú vị hơn. Đáng tiếc, bảy cây cầu Königsberg giờ chỉ còn là lịch sử, nhưng di sản mà nó để lại sẽ không dễ dàng bị phá hủy sớm như vậy. Lời giải sáng suốt của Euler cho đến nay vẫn là một phần quan trọng trong quá trình phát triển của lĩnh vực tô pô.



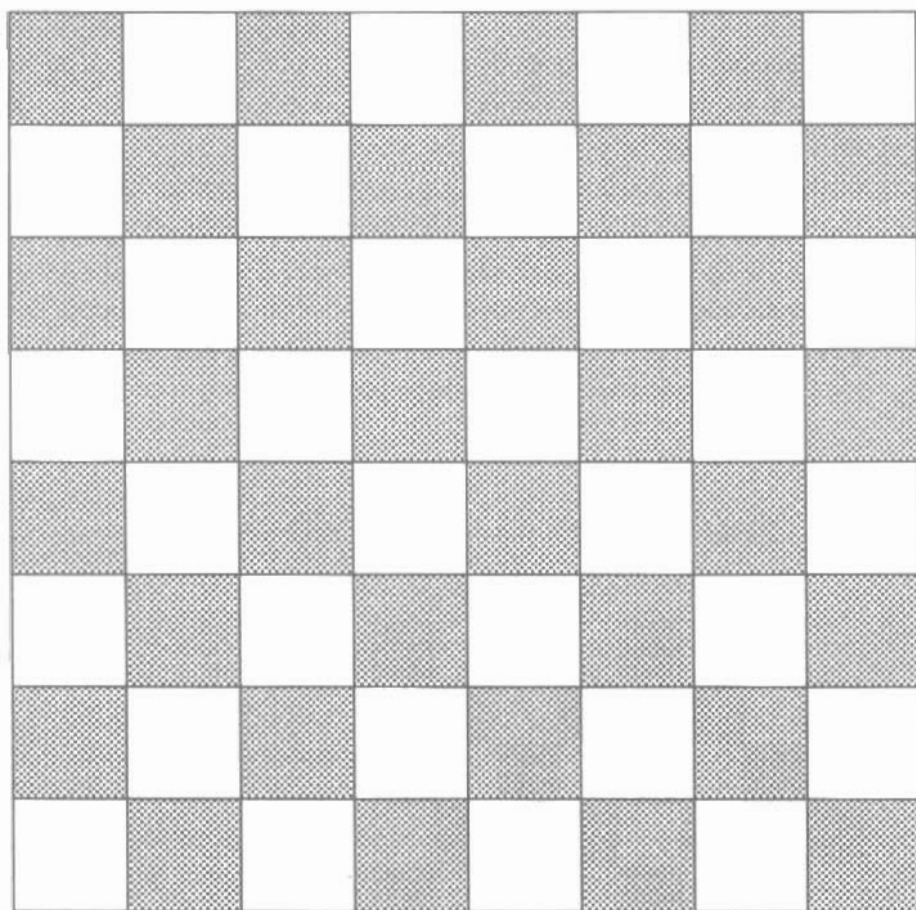
"HỘI CHỨNG" BÀN CỜ

Hàng nghìn năm trước, những người Ai Cập cổ đại đã chơi cờ trên các bàn cờ kẻ ô vuông. Tuy nhiên, trò chơi cờ đam ngày nay ra đời vào đầu thế kỉ XII tại châu Âu. Nó sử dụng bàn cờ giống như bàn cờ vua, các quân cờ lấy từ cờ thỏ cáo, người chơi đi theo các đường như ở cờ *Alquerque*, các nước đi liên quan tới cách di chuyển và số lượng quân cờ. Bản thân bàn cờ đã tự nói lên sự phong phú của các bài toán được phát triển trong nhiều năm qua.

PHỦ BÀN CỜ BẰNG CÁC ĐÔ-MI-NÔ

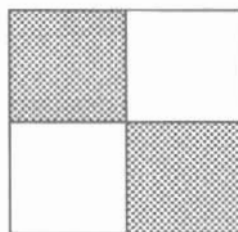


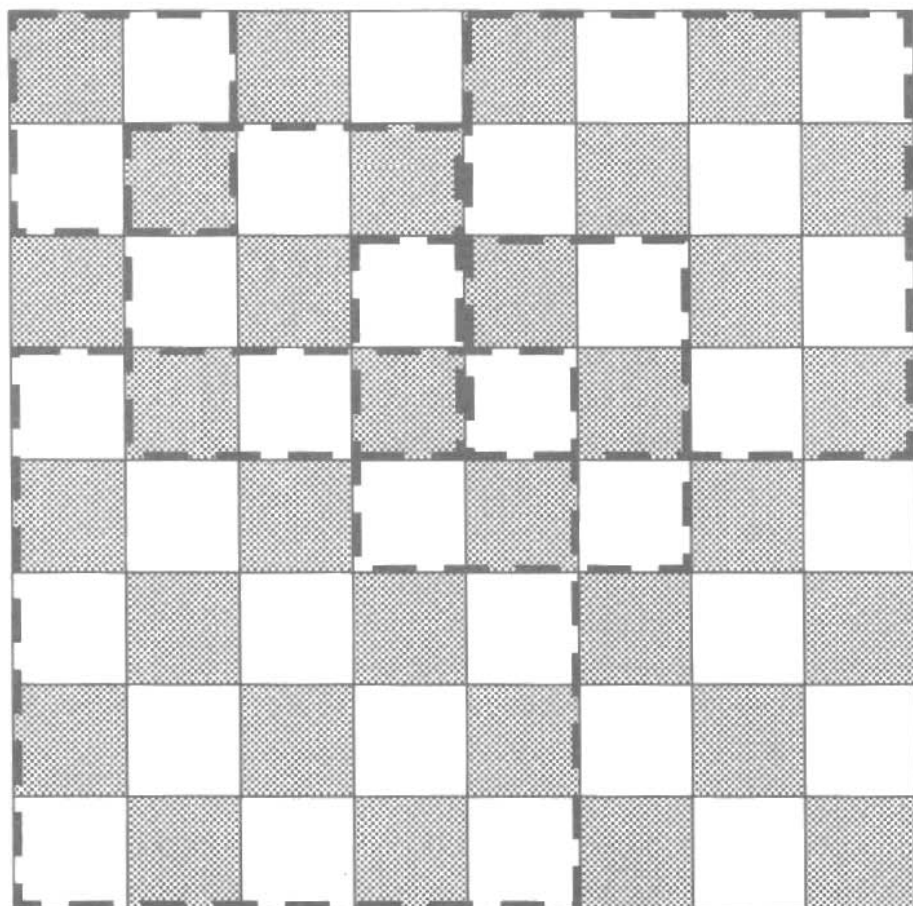
Nếu hai góc đối diện nhau của bàn cờ bị xóa đi, liệu có thể phủ bàn cờ bằng các quân đô mi nô hay không? Giả sử rằng mỗi quân cờ đô-mi-nô có kích thước bằng hai ô vuông kề nhau của bàn cờ. Không được đặt chồng đô-mi-nô này lên đô-mi-nô khác, các đô-mi-nô phải nằm trên mặt phẳng bàn cờ.



CẮT BÀN CỜ BẰNG MỘT LẦN CẮT

Sử dụng khả năng tưởng tượng và kỹ thuật gấp, bạn hãy tìm cách cắt hình vuông trên chỉ bằng một đường để chia bàn cờ thành những hình vuông 2×2 như bên cạnh.

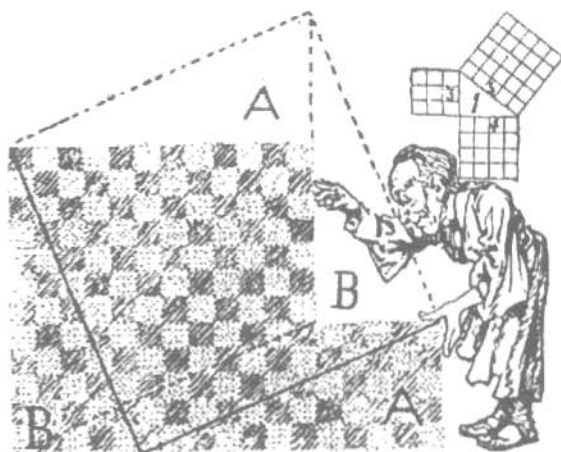




CÁC HÌNH VUÔNG TRÊN BÀN CỜ

Tám hàng và tám cột với các ô vuông đen và trắng tạo nên một bàn cờ mà trên đó, ta có thể tìm thấy các loại hình vuông khác nhau. Các hình vuông này có kích thước từ 8×8 đến 1×1 . Hỏi có tất cả bao nhiêu hình vuông trên bàn cờ?

HAI CÂU ĐỐ TRÊN BÀN CỜ CỦA SAM LOYD



Chuyên gia về câu đố Sam Loyd gọi câu đố này là *Câu đố của bà Pythagoras*. Bạn phải tìm ra một phương pháp cắt hình trên thành ba mảnh sao cho chúng ghép lại thành một hình vuông 13×13 với hoa văn và hướng của thiết kế vẫn giống như lúc ban đầu.

Câu đố về bàn cờ Sam Loyd (hình bên) được gọi là *A Battle Royal* (*Cuộc chiến hoàng gia*). Bạn hãy sắp xếp lại 8 mảnh sao cho chúng ghép thành một bàn cờ 8×8 .



MỘT SỐ TRÒ CHƠI CỔ XƯA

CÂU ĐỐ VỀ RỜI KHỎI TRÁI ĐẤT CỦA SAM LOYD

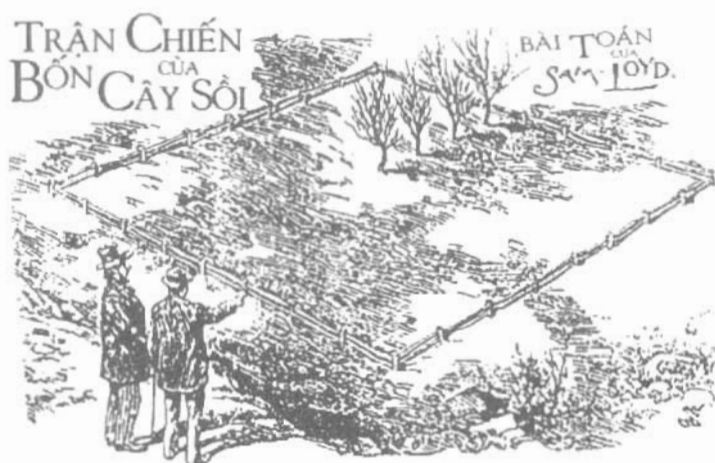
Câu đố về rời khỏi Trái Đất của Sam Loyd là một trong số những câu đố về sự biến mất phổ biến nhất. Loyd nhận bằng sáng chế ra nó năm 1896 và đã bán được hơn 10 triệu bản.

Câu đố được tạo nên từ một đĩa tròn di chuyển làm cho Trái Đất quay. Bạn hãy tìm xem điều gì xảy ra với người lính thứ 13 khi mặt cầu quay từ Đông Bắc sang Tây Bắc.



CÂU ĐỐ TRẬN CHIẾN BỐN CÂY SỎI CỦA SAM LOYD

Bốn cây sồi nằm thẳng hàng nhau trên một mảnh vườn hình vuông. Chia mảnh vườn thành bốn phần sao cho mỗi phần có cùng kích thước và hình dáng, đồng thời mỗi phần chứa một cây sồi.



CÂU ĐỐ VỀ KHỐI LƯỢNG VIÊN GẠCH CỦA SAM LOYD

Nếu cân một viên gạch cân bằng với $\frac{3}{4}$ viên gạch đó cộng $\frac{3}{4}$ pound, thì viên gạch nặng bao nhiêu pound?



BÀI TOÁN VỀ PHO-MÁT CỦA SAM LOYD

Nếu cắt khoanh pho-mát như hình vẽ thì ta sẽ thu được bao nhiêu miếng bơ có hình nêm?



CÒN LẠI GÌ TRONG HỘP KẸO?

Vì lí do nào đó nhãn của các hộp kẹo này đã bị dán lẫn lộn với nhau và bây giờ không có nhãn nào ở trên đúng hộp của nó cả.

Hỏi phải ăn thử ít nhất bao nhiêu cái kẹo để xác định được nhãn của từng hộp?

3 sô-cô-la

3 kem

2 sô-cô-la và
1 kem

CÂU ĐỐ VỀ HAI CHIẾC ĐỒNG HỒ CỦA LEWIS CARROLL

Có hai chiếc đồng hồ. Một cái chỉ đúng duy nhất một lần trong năm, cái còn lại chỉ đúng hai lần một ngày. Vậy chiếc đồng hồ nào tốt hơn?



CÂU ĐỐ CỦA TARTAGLIA

Nhà toán học Ý thế kỷ XVI Niccolo Tartaglia nổi tiếng là nhờ nghĩ ra lời giải cho phương trình bậc ba tổng quát (1535). Ông cũng viết bộ sách ba tập *Trattato generale di numeri et misure* (Luận về số và kích thước) (1556 – 1560). Ngoài ra, ông còn là người đầu tiên dịch bộ *The Elements* (Cơ bản) của Euclid sang một ngôn ngữ của phương Tây hiện đại (1543). Dưới đây là câu đố vui mà ông nghĩ ra:



Ba cặp vợ chồng mới cưới muốn sang bên kia sông. Nhưng chiếc thuyền chỉ có thể chở hai người mỗi chuyến. Mỗi người chồng đều rất ghen tuông và giữ gìn người vợ xinh đẹp của mình. Để mọi việc được êm ả, họ quyết định sẽ không để lại người phụ nữ nào cùng với người đàn ông khác nếu không có mặt chồng cô ở đó.

Làm cách nào để các cặp vợ chồng có thể sang sông? Số chuyến ít nhất là bao nhiêu?

LỜI GIẢI

Trang 35. **TẠI SAO MIỆNG CỐNG LẠI TRÒN?**

Lời giải: Đường tròn theo định nghĩa là tập hợp tất cả các điểm trên mặt phẳng cách đều một điểm cho trước. Vì thế, nắp hình tròn sẽ không thể rơi qua miệng cống tròn được, bởi tất cả đường kính của nó đều bằng nhau. Nếu miệng cống hình vuông thì nắp có thể rơi qua miệng cống khi đặt nó dọc theo đường chéo của hình vuông.

Trang 187. **CÔNG THỨC KÌ DIỆU CỦA EULER.**

Lời giải: Với một hình rhombicosidodecahedron, $F = 62$ (30 hình vuông, 20 tam giác, và 12 ngũ giác), $V = 60$, $E = 120$, như vậy $F + V - E = 2$.

Trang 292. **SỰ VIỆC ĐIỂN RA NHƯ THẾ NÀO?**

Lời giải: (1) Tom và Jerry là những cầu thủ bóng chày chuyên nghiệp, nhưng họ chơi cho những đội khác nhau. Ngày hôm đó hai đội bóng của họ có cuộc đấu. Tom là người bắt bóng và có nhiệm vụ ngăn cản Jerry chạy về vị trí phát bóng ban đầu (ở đây từ "home" có nghĩa là "nhà", nhưng trong bóng chày "home plate" có

nghĩa là vị trí phát bóng của bên đánh bóng).

(2) Trong khi đang dạo trên phố, Eric bỗng dừng bị nấc. Anh ta vào quán rượu mua nước uống để xem có thể hết nấc hay không. Người chủ quán đã nhận ra vấn đề của Eric, ông rút súng nhằm làm Eric sợ, hi vọng vì thế mà sẽ hết nấc. Và nó đã có tác dụng!

(3) Chồng Mary đã mất cách đây nhiều năm. Bà để hình đựng tro hỏa táng của ông ở trên bàn ăn. Trên bàn còn có một bình nuôi cá vàng. Mary đã để cửa sổ phòng bếp mở ngày hôm đó. Vì thế khi con mèo nhà hàng xóm vào để bắt chú cá vàng, nó làm đổ bình cá và cả bình tro xuống đất. Bình tro rơi vỡ đã làm tro đổ ra sàn nhà.

Trang 293. **ẢNH ẢO GIÁC KHỐI CHỮ NHẬT.**

Lời giải: có 61 khối $2 \times 1 \times 1$ ở trong khối lớn.

Trang 294. **ĐIỀU KHÔNG THỂ LÀ CÓ THỂ.**

Lời giải: Rạch hai khe trên tờ giấy tại vị trí của lỗ. Các cúc sau đó có thể nhét xuyên qua khe hở và tách rời khỏi tờ giấy.

Trang 294. **CHỒNG XÚC XẮC.**

Lời giải: Mẹo giải bài này là ở chỗ tổng các mặt đối diện của một xúc xắc bằng 7. Chồng đầu tiên có 10 xúc xắc, như vậy chúng ta nhận được 70 chấm trừ đi mặt ở trên đỉnh của nó là nhìn thấy, suy ra kết quả ở chồng đầu là 69. Chồng thứ hai có 7 xúc xắc, cho ra 49 chấm, trừ đi các chấm ở trên đỉnh là 3, ta nhận được 46 chấm. Vậy đáp số là $69+46=105$ chấm.

Trang 296. **CÂU ĐỐ VỀ XẾP HÌNH CHỮ CÁI.**

Lời giải:



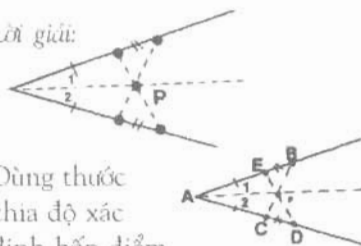
Trang 276. **CÂU ĐỐ VỀ CÁCH CHIA SỮA**

Lời giải:

10qt.	10qt.	5qt.	4qt.
10	10	0	0 – bắt đầu
5	10	5	0
5	10	1	4
9	10	1	0
9	10	0	1
4	10	5	1
4	10	2	4
8	10	2	0
8	6	2	4
10	6	2	2 – kết thúc

Trang 298. **CÓ THỂ ĐƯỢC KHÔNG?**

Lời giải:

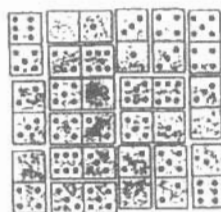


Dùng thước chia độ xác định bốn điểm như hình vẽ, kẻ hai đường chéo của tứ giác. Các đường chéo này giao nhau tại điểm P. Khi đó tia nối đỉnh của góc với điểm P chính là đường chia đôi góc đã cho.

Chú ý: Chứng minh $\hat{I} \cong \hat{2}$ bằng cách chứng minh $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ theo c.g.c $\rightarrow \hat{B} \cong \hat{D}$
 $\triangle BEP \cong \triangle DCP$ theo c.g.g. $\rightarrow BP \cong DP$
 $\rightarrow \triangle BPA \cong \triangle DPA$ theo g.g.g. $\rightarrow \hat{I} \cong \hat{2}$.

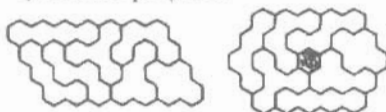
Trang 298. **BẠN CÓ THỂ TẠO ĐƯỢC HÌNH VUÔNG LA-TINH KHÔNG?**

Lời giải:



Trang 306. **CHƠI VỚI ĐA LỤC GIÁC.**

Lời giải: Hình có dạng tam giác là hình duy nhất không thể xếp lại thành polyhex.



Trang 307. **TRÒ DOUBLET
CỦA LEWIS CARROLL.**

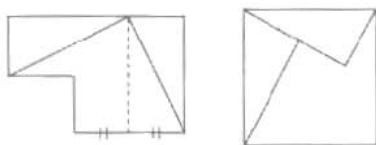
Lời giải: (1) EYE—LYE—LIE—LID
(2) PITY—PITS—FITS—FINS—
FIND—FOND—FOOD—GOOD
(3) TREE—FREE—FLEE—
FLED—FEED—WEED—WELD—
WOLD—WOOD
(4) OAT—RAT—ROT—ROE—
RYE

Trang 310. **LÍ GIẢI TAM GI-
ÁC CURRY.**

Lời giải: Khi các phần bị bỏ sót được tính toán bằng cách dùng các tam giác đồng dạng, kết quả nhận được quả thực là diện tích phần chồng lên nhau ở một số chỗ nào đó, và vì thế để lại khoảng trống ở những chỗ khác.

Trang 311. **BIẾN ĐỔI HÌNH
VUÔNG.**

Lời giải:

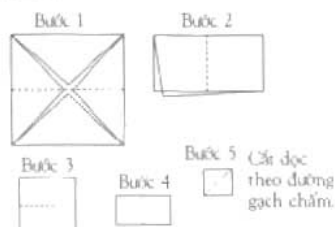


Trang 323. **PHỦ BÀN CỜ
BẰNG CÁC ĐÔ-MI-NÔ.**

Lời giải: Không thể phủ bàn cờ đã bị bỏ đi hai ô bằng các domino. Mỗi domino khi đặt lên bàn cờ sẽ chiếm một ô đen và một ô trắng. Vì cả hai ô bị bỏ đi ở hai góc là cùng màu, nên số

lượng các ô đen và trắng còn lại là không thích hợp.

Trang 324. **CHIA BÀN CỜ
THÀNH CÁC HÌNH VUÔNG
NHỎ.**



Trang 325. **SỐ HÌNH VUÔNG
TRÊN BÀN CỜ.**

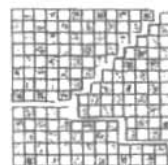
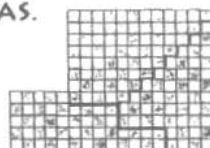
Lời giải: Có:

1 hình vuông cỡ 8x8
4 hình vuông cỡ 7x7
9 hình vuông cỡ 6x6
16 hình vuông cỡ 5x5
25 hình vuông cỡ 4x4
36 hình vuông cỡ 3x3
49 hình vuông cỡ 2x2
64 hình vuông cỡ 1x1

Tổng cộng có tất cả 204 hình vuông trên bàn cờ.

Trang 326. **CÂU ĐỐ CỦA BÀ
PYTHAGORAS.**

Lời giải:



ngay không chút do dự. Nhưng chúng ta hãy cùng xét kĩ.

Tôi có hai chiếc đồng hồ: một chiếc đồng hồ chết, chiếc còn lại chạy chậm một phút mỗi ngày. Bạn thích cái nào hơn? "Chiếc đồng hồ chết", bạn chọn ngay không chút nghĩ ngợi. Chết chúng ta cùng quan sát: chiếc đồng hồ chết một phút mỗi ngày sẽ mất 12 giờ, hay 720 phút để chu đúng lần tiếp theo. Mỗi ngày nó chậm một phút, suy ra để chậm 720 phút thì phải mất 720 ngày, vì thế nó chỉ giữ đúng thời gian chỉ có một lần trong hơn năm. Trong khi đó chiếc còn lại lúc nào cũng chỉ đúng một giờ như thế (vì nó không hề chạy), nên số lần nó chỉ đúng bằng với mức độ xuất hiện thường xuyên của thời gian đó, tức là hai lần một ngày.

Lewis Carroll.

Trang 330. **CÂU ĐỐ CỦA TARTAGLIA.**

Lời giải: Quy tắc không người phụ nữ nào bị để lại cùng với một người đàn ông trừ phi đó là chồng của cô ta khiến cho họ cần 11 chuyến để chở được tất cả qua sông.

Chú ý: Kí hiệu như sau: người chồng đầu tiên = H1, người vợ đầu tiên = W1, ...

- 1) H1 chở W1 qua sông và trở lại: 2 chuyến.
- 2) W2 chở W2 sang sông và trở lại: 2 chuyến.
- 3) H2 chở H1 sang sông và trở lại cùng với W2: 2 chuyến.
- 4) H3 chở H2 sang sông và trở lại: 2 chuyến.
- 5) H3 chở W3 sang sông, sau đó H2 trở lại để chở W2 sang sông: 3 chuyến.

Lời giải sau giải bài toán chỉ với 9 lần chèo chèo. Cách này do Janis Foxlesta tại Forestville, CA nghĩ ra:

- 1) H1 chở W1. W1 trở lại: 2 chuyến.
- 2) W1 chở W2. W2 trở lại: 2 chuyến.
- 3) W2 chở H2. W2 trở lại: 2 chuyến.
- 4) W2 chở W3. W3 trở lại: 2 chuyến.
- 5) W3 chở H3: 1 chuyến.

SÁCH DẪN

A

A Caucus-Race and a Long Tale, 26
 Archimedes, 50, 169
 Ai Cập,
 phép chia, 168
 phép nhân, 168
 phân số, 45, 247-254
 Adventure of the Dancing Men, 217
 Alberti, Leon Battista, 95
 Alice in Wonderland
 (Alice ở xứ sở thần tiên), 26
 All At One Point, Italo Cavino, 67
 Anaxagoras, 50
 Andre, Carl, 76
 Andrews, Patricia, 226
 Ảnh ảo giác, 227, 228
 Aristotle, 50
 Arlendes, Marquis d', 6
 Ashin và con rùa, 51
 A Wrinkle in Time, 66

Â

Âm nhạc của các thiên cầu,
 Kepler, 199
 Âm nhạc và các tỉ lệ, 192
 Âm nhạc & toán học, 91-199
 Âm thanh, 169, 190, 195
 Âm thanh, Qsound, 202

B

Ba bài toán dựng hình không
 Giải được thời cổ đại, 173, 177
 Babbage, Charles, 206
 Babylon
 các khái niệm toán học, 161
 hệ đếm, 45, 161-162
 xấp xỉ của căn bậc hai,
 160-163
 người Babylon và định lí
 Pythagoras, 162
 Bài toán chiếc kim, 299
 Bàn đánh pool, 21
 Bàn đánh pool elip và toán
 học, 21
 Bàn tính, 206
 hình bàn cờ, phép cộng, 208
 hình bàn cờ, phép nhân,
 209-210
 Bảng phương trình thời gian, 34
 Barnsley, Michael, 300
 Bellaschi, Pietro, 281
 Bernoulli, Daniel, 7
 Biểu đồ Schlegel, 87
 Bọ rầy vàng óng ánh, 216
 Boethius, 169
 Bolyai, Janos, 186
 Bolzano, Bernhard, 51
 Bondone, Giotto di, 95
 Bóng bucky, 274
 Book of Sand, The, 68
 Borelli, Giovanni, 6
 Borges, Jorge Luis, 68
 Bouvet, Père Joachim, 45

Bragdon, Claude, 72
 Brooks, Robert, 64
 Buckminsterfullerence, 274
 Bufano, Beniamino, 75
 Buffon, Count, 299
 Bộ tạo số ngẫu nhiên, 167

C

Các di vật khảo cổ, dụng cụ, 198
 Các dụng cụ âm nhạc và hình dạng của chúng, 193
 calder, Alexander, 76
 Calvino, Italo, 67
 Cantor, Georg, 51, 53
 Cantor, tập hợp, 53
 Cardan, Jerome, 46
 Carroll, Lewis, 25-26, 307
 Cayley, George, 6
 Câu chuyện của chú chuột, 25-26
 Câu chuyện toán học,
 cuộc viếng thăm đầy
 toán học, 27-32
 chuyện của số π , 119-121
 câu chuyện của Fractal, 57-59
 quaternion và đại hội các
 con số, 110-115
 Câu chuyện về các bí ẩn toán
 học, 288-292
 Câu đố & bài toán
 ảnh ảo giác khối chữ nhật,
 293
 biến đổi hình vuông, 311
 câu đố của Tartaglia, 330
 câu đố về bàn cờ, 323-326
 chia đôi góc, 298

có phải mọi bánh xe đều
 tròn? 295
 chồng xúc xắc, 294
 các câu đố của Sam Loyd,
 327, 328, 329
 điều không thể là có thể,
 294
 hai chiếc đồng hồ của
 Lewis Carroll, 329
 hai thùng sữa, 297
 hình vuông La-tinh, 298
 hộp kẹo, 329
 tam giác Curry, 310
 xếp hình chữ cái, 296
bảy cây cầu Königsberg
 bài toán, 173-177
 hiện đại, 319-322
 Cesaro, Ernesto, 53
 Chartres, R., 299
 Chen Jing-run, 175
 Chia ba một góc, 172-173
 Chiều không gian, 49
 Chou Pei, 165
 Chudnovsky, George V. và
 David V., 235
 Chuquet, Nicholas, 46
 Coates, Robert M., 16
 Kỹ thuật gen
 ADN, 250-254
 ARN, 250, 251, 252
 axit nucleic, 251, 252
 bazơ, 251-254
 gen, 251-254
 lipit, 251
 lí thuyết hỗn loạn, 254
 mã gen, 251-253

mạch xoắn kép, 251–253
 nucleotit, 251, 252
 nút & ADN, 259
 protein, 251, 252,
 tinh bột, 251
 và toán học, 250–254
 Công thức mã hóa DES, 217
 Cơ thể con người & các tỉ
 lệ, 256
 Crandall, Richard E., 219
 Cristo, 76
 Cubotahedron cắt, 100
 Cuộc sống nhân tạo, 236–237
 Curry, Paul, 310

D

Dalí, Salvador, 72
 Danh sách một số nhà toán
 học nổi tiếng, 159
 Dante, 67
 Danzig, George B., 13
 Dân chơi xai-bơ, 221
 Dây bốn nốt, thang âm Hy
 Lạp, 197
 De Progressione Dyadica, 45
 Desargues, Giard, 96
 Dedekind, J.W.R., 51
 Democritus, 50
 Denneau, M.M., 235
 DES, công thức mã hóa, 217
 Descartes, Rène, 182
 Diện tích hình tròn, 171
 Diophantus, Số học, 177
 Discobolus, 75
 Divine Comedy, the, 67

Dodgson, Charles L., 25, 307
 Douady, Adrien, 64
 Doyle, Conan, 217
 Dubner, Harvey, 123
 Dürer, Albrecht, 95–98
 đường conic, 100
 dựng hình các chữ cái
 Gô-tích, 1011
 điểm ảnh, 101

Đ

Đa diện, 86, 87, 272
 Tính chất bất biến, 187
 Đa lục giác, 306
 Đèn pha, 14
 Điểm nối ba, 137, 146, 149
 Điện thoại và
 lập trình tuyến tính, 10, 12
 phương pháp đơn hình, 13
 mã hoá nhị phân, 11
 thuật toán Karmarkar 13
 toán học, 10–13
 Định đề song song, định đề
 Euclid thứ 173, 177, 182, 186
 Đồ thị, 47, 145
 Đối ngẫu, 86
 Đối xứng, 146, 149
 Đồng hồ mặt trời, 33
 Đường
 conoid Nicomedes, 173
 cong quá vật, 62
 Peano, 54
 quadratrix của Hippias, 173
 xiclôit và sóng biển, 152, 153
 xoắn ốc, 84, 144, 147
 xoắn ốc Archimedes, 173

xoắn ốc đẳng giác, 144, 147
 xoắn ốc tạo bởi các đoạn
 thẳng, 84
 thân khai, 145, 148

Đường & sóng hình sin, 152, 153

E

Elip, 22

Elliptic, hình học, 42-43

Epidaurus, 200, 201

Eratosthenes, 219

Escher, M.C., 77, 78-92
 tranh khắc gỗ, 66

Eubulides, 240

Euclid, 39

Euler, Leonhard, 175, 178, 184,
 187, 219, 318, 320-322

Euler, công thức $F+V-E$, 187

Ê

Ê-ke, chia ba góc, 172

F

Fatou, Pierre, 62

Ferguson, Helaman, 77, 79

Fermat, Pierre de, 167, 175

định lý Fermat cuối cùng,
 175, 177-178

số Fermat, 219, 235

Fibonacci, số, 144, 145, 147

Flexagon, 309

Fourier, John, 193, 202

Fractal, 53-56, 144

Fractal hình học, 53

Fractal và

tự nhiên, 141-142

Đường bờ biển, 143

Francesca, Piero della, 95

Fuller, Buckminster, 271-274

$F+V-E=2$, 187

F stop và toán học, 19

G

Galileo, 15

Hội thoại về hai ngành khoa
 học mới, 179

và tỉ lệ, 179

ngịch lý, 51

gây mã hóa, 216

Geometry Supercomputer
 Project, 259

Gertner, Franz, 152

Goldbach, Christian, 175

phỏng đoán của Goldbach,
 122, 175

Green, Michael, 262

Greene, David, 277

Gợn toán học, 215

Gương phản xạ, 14

H

Hàm số mũ và các dụng cụ
 âm nhạc, 193

Hệ cơ số sáu mươi, số Sumer/
 Babylon, 46

Hệ nhị phân & John Napier,
 208-210

Heppner, Frank H., 139

Heuring, Vincent P., 238

Hexatetraflexagon, 309

thực tế ảo, 227-230

Hình

lập phương, 86, 87, 187

tròn, diện tích, 171

hình học, 182-185

hình học ảo, 186

sơ đồ thời gian, 185

fractal, 42

hyperbolic, 42-43

Tên gọi, 186

phi Euclid, 42-43, 182-185

xạ ảnh & nghệ thuật, 95-97

yên ngựa, 269

Hình lục giác và

tổ ong, 133

tự nhiên, 135-138

Hình thêu toán học và thêu

đường cong, 83

Hình vuông mã hóa Polybius,

216

Hỗn loạn

sự bay lượn của loài chim,

139-140

Hsuan-thu, 165

Hubbard, John, 64

Hv Lạp và

chia ba một góc, 172

è ke, 172

phương pháp xấp xỉ căn

bậc hai, 164

thang âm, 197

I

I Ching, 46

Isozaki, Arata, 277

J

Jefferson, Thomas, bánh xe

mã hóa, 216

Jordan, Harry F., 238

Julia, Gaston, 64

K

Karmarkar, Narendra, 131

thuật toán Karmarkar, 13

Kepler, Johannes, 33, 199, 255

Khoa học phức hợp, 16-17

Khối

bát diện, 86, 87, 187

bát diện cắt, 277

hai mươi mặt, 86, 87, 187

mười hai mặt, 86, 87, 184

mười hai mặt hình thoi, 277

Platon, 86

Kiến trúc

các khối lập đầy không

gian, 275-277

ngôi nhà Dymaxion, 271, 273

hữu cơ, 282

loại bỏ buồng hình hộp,

282-284

và toán học, 264-284

vòm, 278-280

thánh đường St. Mary, 269, 281

toàn vẹn căng, 271

Wright, Frank Lloyd,

282-284

kiểu sắp xếp lá, 146

Klein, Felix, 186

Koch, Helge von, 54

đường cong bông tuyết, 53,

diện tích hình bông tuyết, 60
Kummer, Ernest E., 178

L

La Jangada, 217
Làm vương hình tròn, 173
Large Magellanic Cloud, 137
Lát mặt phẳng, 150,
 thời cổ xưa, 94
 và loài ong, 133
Lát mặt phẳng không lặp, 74
Lát nền mặt phẳng bằng hình
chữ nhật biến dạng, 93
Lee, John, 281
Lees, John, 202
Leibniz, Gottfried Wilhelm,
45, 51, 206, 321
Lilienthal, Otto, 6
Little Fermat, 235
Lò sưởi điện parabol, 15
Lobachevsky, Nikolai, 186
logic mờ, 239, 242
Lowe, Danny, 202
Loyd, Sam và các câu đố, 310,
326-329
Lí thuyết nút, 236-241
L'Engle, Madeline, 66

M

Mã

liên lạc của loài ong, 134
thay thế chữ cái của Julius
Caesar, 216
phân tử, 246, 250
Cơ quan An ninh Quốc

gia Hoa Kỳ, 217
Mã hóa, 221
Ma phương, 312-316
 Benjamin Franklin, 314
 và nước đi quân mã, 318
Mạch xoắn kép, 226
Mandelbrot, Benoit, 55, 62, 63
Mạng lưới, 144
Matelski, J. Peter, 64
Mặt phẳng hypebol, 164
Máy ảnh và toán học, 19
Máy tính và
 cháy rừng, 225-226
 cuộc sống nhân tạo, 261-217
 hiện tại, 211-226
 nghệ thuật, 102-105
 ngôn ngữ Younis, 235
 quá khứ, 206-210
 quản lí cây cối, 211-214
 quang học, 238
 Toán học, 211-214
 tươi tiêu & bảo tồn tài
 nguyên nước, 223-224
 tương lai, 227-242
Máy vi tính/máy tính cổ xưa, 206
Mazur, Barry, 178
Menaechmus, 15
Mersenne, Marin, 219
 số Mersenne, 219
Michelangelo, 75
Miệng cống và toán học, 35
Mobot, phòng thí nghiệm của
MIT, 237
Mô hình toán học & hóa học,
255
Một cuộc họp kín và một câu

chuyện dài, 26
 Möbius, August, 231
 Myron, 75

N

Napier, John, 206
 số nhị phân & tính toán,
 208–210
 thanh Napier, 206
 Nervi, Pier Luigi, 277, 281
 Nếp gấp thời gian, 66
 Nghệ thuật
 chiều không gian thứ tư,
 72–74
 Dürer, Abrecht, 98–101
 hình học xạ ảnh, 95–97
 máy tính, 102–105
 M.C. Escher, 88–92
 thiết kế toán học, 82–87
 và toán học, 70–105
 Nghịch lý, 51
 Ashin và con rùa, 51
 lưỡng phân, 51
 Zeno, 51
 Ngôi sao toán học, 82
 Ngũ âm, thang âm Trung
 Quốc, 197
 Người Đếm Cát, 50
 Người La Mã tính diện tích
 hình tròn, 171
 lưỡng phân, 51
 Nhân đôi
 lập phương, 173
 hình vuông, Plato, 170
 Những bí ẩn toán học
 chưa lời giải đáp, 173–177

Những con số & công
 Nghiệp tái chế, 20
 Những hình nhân nhảy múa, 217
 Noguchi, Isamu, 75
 Nút, 258, 259
 Nước đi quân mã & ma
 phương, 318

P

Paoli, Luca, 256
 parabol, 15
 parabol tròn xoay, 14
 paraboloid hyperbolic, 281
 Pascal, Blaise, 47, 97, 167, 206
 Penrose, Roger, 308
 Perry, Charles, 75
 Phân số, chiều, 142
 Phân tích hình học, 310
 Pháp luật, 16
 Phègne, Claude, 223, 224
 Phép nhân, Ai Cập, 168
 Phòng thí nghiệm khoa học
 đầu tiên, 169
 Phối cảnh, 85, 86
 Phương pháp đơn hình, 131
 Phương trình thời gian, 33–34
 Pilâtre de Rozier, Jean, 6
 Pythagoras, 198
 các môn đồ của Pythagoras
 169, 198
 và âm nhạc, 192
 Plato, 170
 Meno, 170
 Poe, Edgar Allan mặt mã, 217
 Poisson, Simeon, 297

Poincaré, Henri, 65, 66
 Poncelet, Jean Victor, 97
 Pozzo, Andrea del, 97

Q

Quãng tám & toán học, 195–199
 Que tính, Trung Quốc, 206
 Qsound, 202
 Quipu, 206

R

Raga, âm nhạc Ấn Độ, 197
 Remailer, 222
 Resch, Ronald Dale, 80
 Rhombicododecahedron, 277
 Rhombicosidodecahedron, 187
 Ribet, Kenneth A., 178
 Robbin, Rony, 74
 Robot, 237
 Robot, Attila, 237
 Russell, Bertrand, 240,
 Ryan, Paul, 281

S

Sách về cát, 68
 Schartz, John, 262
 Scherks, Joel, 262
 Schlegel, Viktor, 87
 Schnirelmann, L., 175
 Shimura–Taniyama–Weil,
 phỏng đoán, 177
 Sierpinski, Waclaw, 62
 Tam giác Sierpinski, 55, 62
 Siêu lập phương, 49, 72–74

Siêu văn bản, 231–234
 Soleri, Paolo, 270, 276, 277

Sóng biển

chiều cao của sóng, 153
 chiều dài của sóng, 153
 chu kỳ của sóng, 153
 và toán học, 151–154

Số

âm, 46
 đếm, 46
 nguyên tố, 51, 122
 bài toán, 174
 Fermat, 219
 Germain, 123
 Mersenne, 219
 sinh đôi, 123
 và mã hóa thông tin, 220
 nón thông, 147
 phức, 47
 siêu hạn, 51
 thời kỳ Đồ đá, 45

Số học modula, 235

Srutis, âm nhạc Ấn Độ, 197
 Star Trek – The Next
 Generation, 68, 230
 Stidel, Michael, 46
 Strauss, Charles, 73

T

Taniyama, Yuktaka, 178
 Tần số và âm nhạc, 196
 Tập hợp
 Cantor, 53
 Julia, 64
 Tartaglia, Niccolo, 330
 Tên gọi của hình học elliptic, 186

- Thang âm
 Ấn Độ, 197
 Ba Tư, 197
 Hy Lạp, 197
 Trung Quốc, 197
 Thán khúc, 67
 Thang âm và toán học, 195–199
 Thang số tìm giá trị xấp xỉ, 164
 Thánh đường St. Peter, 200
 Thế giới
 fractal, 53–64
 hình học, 42–43
 hyperbolic, 65–66
 số, 44–48
 trong một điểm, Italo
 Cavino, 67
 toán học, 37–68
 sự hình thành, 39–41
 trong văn chương, 65–68
 các vô cùng, 50–52
 Theon ở Smyrna, 169
 Thông điệp qua những con
 tem, 24
 Tỷ lệ, 179
 cơ thể người, 256
 Tỷ lệ & âm nhạc, 192
 Tính đếm được, 51
 Tính toán
 phép cộng, sách số học đầu
 tiên ở nước Anh, 207
 phép chia Ai Cập, 168
 phép nhân Ai Cập, 168
 phép nhân, Ý, những năm
 1478, 207
 nương tác, 231
 Toán học
 và âm nhạc, 190–199
 âm thanh, 169, 200–202
 bàn đánh pool elip, 21
 cơ thể con người, 246–248
 công nghiệp tái chế, 20
 dấu vân tay, 215
 đền pha, 14
 điện thoại, 10–13
 điều khắc, 75–81
 đời sống hàng ngày, 4–35
 f-stop/máy ảnh, 19
 gương phản xạ, 14
 khu vườn, 144–150
 khuông nhạc, 191, 192
 kỹ thuật gen, 250–254
 kiến trúc, 264–284
 lò sưởi điện parabol, 15
 loài ong, 132–134
 logic, giải trí & các trò chơi,
 286–330
 miệng cống, 35
 máy vi tính, 204–242
 nghệ thuật, 70–105
 nghệ thuật của M.C.
 Escher, 88–92
 những chiếc bình, 181
 quăng tám, 195–199
 Qsound, 202
 sóng biển, 151–154
 thang âm, 195–199
 thiết kế & nghệ thuật, 82–87
 trong bay lượn, 5–9
 trong lịch sử, 156–187
 tự nhiên, 130–154
 vòm, 278–280
 xe đạp, 21

TOE (Lí thuyết toàn năng),
260-262
Trạm vũ trụ - Thế hệ mới,
68, 230
Trần nhà parabol, 201
Tranh cãi về tập hợp
Mandelbrot, 63
Tranh cãi dân về các ý tưởng
toán học và người phát minh, 157
Trò chơi, toán học,
chaos, 299
doublets, 307
hex, 305
Rhythmomachia, 301-304
xếp các hình Penrose, 308
trục đối xứng của hình lục
giác, 136, 137
Trung Quốc
chứng minh xếp chồng các
hình vuông, 165-166
định lí Pythagoras, 166
thang âm, 197
Trường từ & loài ong, 133
Tứ diện, 86, 87, 187
Tự nhiên & fractal, 141-142
Tự nhiên & các lục giác,
133, 135-138

U

Uccello, Paolo, 181

V

Vaillancourt, Louis, 76
văn học tương tác, 233
Verne, Jules, 217

Vinci, Leonardo da, 5, 77, 95,
104, 105, 256
Vinogradov, Ivan M., 175
Vitruvius, 256
Vô cùng, 50-52
Vô lí, đường cong, 62
Vòm trắc địa, 271-274
Vòng tròn ma thuật của
Benjamin Franklin, 317

W

Wang, Lifan, 137
Wiles, Andrew J., 177, 178
Wiles, đường cong elliptic
modular & định lí Fermat
cuối cùng, 177
Wright, Frank Lloyd, 282-284
Wright, Orville và Wilbur, 6

X

Xác suất, 167
Xe đạp, 21
Xúc xắc, cổ đại, 167

Z

Zadeh, Lofti, 240
Zeno, 51

GIỚI THIỆU VỀ TÁC GIẢ

Giáo viên dạy toán, cố vấn toán học Theoni Pappas nhận bằng cử nhân trường Đại học California tại Berkeley vào năm 1966 và bằng thạc sĩ tại trường Đại



học Stanford năm 1967. Pappas đã rất tận tụy trong công việc minh họa và làm sáng tỏ toán học, nhằm giúp mọi người loại bỏ suy nghĩ toán học chỉ dành cho những người giỏi và sự sợ hãi đối với nó. Năm 2000, bà nhận được giải thưởng dành cho người có thành tựu xuất sắc của Hội cựu sinh viên trường Đại học California.

Những cuốn sách do bà viết đã được biên dịch sang tiếng Nhật, tiếng Phần Lan, Slovakia, Séc, Hàn Quốc, Thổ Nhĩ Kỳ, tiếng Trung Quốc phổ thông và truyền thống, Bồ Đào Nha, tiếng Ý, tiếng Tây Ban Nha.

Tác phẩm của bà gồm: *Thường thức toán học*, *Niềm vui toán học*, *Thêm những niềm vui toán học*, *Fractal*, *Google và những câu chuyện về toán học khác*, *Sự kì diệu của toán học*, *Âm nhạc lập luận*, *Những vụ xì-căng-đan toán học*, *Những cuộc phiêu lưu của Penrose* – *Chú mèo ham học toán*, *Toán học cho trẻ em và mọi người*, *Toán học mỗi ngày*, *Những dấu ấn toán học*, *Tâm mạn về toán học*. Quyển sách mới nhất của bà chính là *Những cuộc phiêu lưu mới của Penrose* – *Chú mèo ham học Toán...*

“Hiếm khi chúng ta bắt gặp được một cuốn sách toán với lượng kiến thức phong phú và có chiều sâu như cuốn sách này. Sách của Pappas không chỉ thỏa mãn sự tò mò của học sinh, của những người yêu thích toán học, mà còn dành cho cả các nhà nghiên cứu. Pappas vừa là một nhà toán học vừa là một nhà thơ. Bằng tư duy sắc sảo của một nhà khoa học và cái nhìn của một nhà nghệ thuật, bà đã lựa chọn những chủ đề lý thú kích thích trí tưởng tượng và khơi dậy niềm đam mê của bạn đọc về sự bao la kì vĩ của thế giới toán học”.

– Clifford A. Pickover,
tác giả cuốn *Computers & the Imagination*

SỰ KÌ DIỆU CỦA TOÁN HỌC

thế giới của các ý tưởng,
tìm hiểu những nhịp điệu mà toán học
đã mang lại cho cuộc sống của chúng ta
và giúp bạn khám phá toán học trong
cả những điều ít ngờ đến nhất.



CÔNG TY CỔ PHẦN VĂN HÓA GIÁO DỤC LONG MINH

website: www.longminh.com.vn

Địa chỉ: Phòng 303, Nhà 1719 Khu đô thị Trung Hòa
Nhân Chính, Quận Thanh Xuân, TP Hà Nội
Điện thoại: 04. 6281 6835 • Fax: 04. 6281 6834
Email: sach@longminh.com.vn



7102303800027

Giá: 80.000đ



8 935036 616203